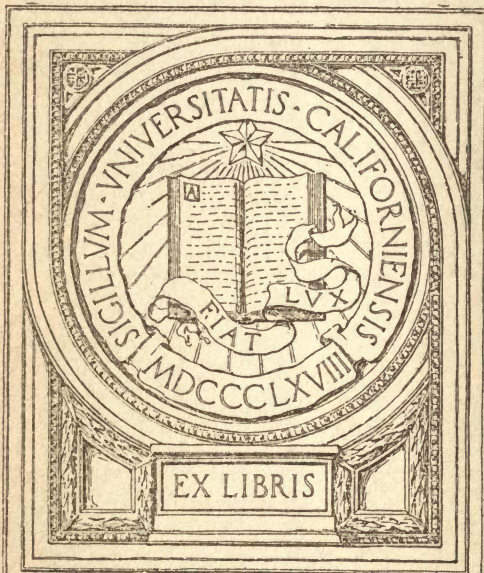
MANUALI HOEPLI

Prof. E. PASCAL

REPERTORIO DI MATEMATICHE SUPERIORI

(Definizioni - Formole - Teoremi - Cenni bibliografici)

II. GEOMETRIA

ULRICO HOEPLI
EDITORE-LIBRAIO DELLA REAL CASA
MILANO

MANUALI HOEPLI

REPERTORIO
DI
MATEMATICHE SUPERIORI

(DEFINIZIONI - FORMOLE - TEOREMI - CENNI BIBLIOGRAFICI)

PER
ERNESTO PASCAL
PROF. ORDINARIO NELLA R. UNIVERSITÀ DI PAVIA.

II.
GEOMETRIA.

ULRICO HOEPLI
EDITORE-LIBRAJO DELLA REAL CASA
MILANO

1900.

INDICE.

PARTE II.

GEOMETRIA.

CAPITOLO PRIMO.

LA GEOMETRIA DELLE FORME CONTINUE FONDAMENTALI.

CAPITOLO II.

GEOMETRIA DELLE FORME DISCONTINUE.

CAPITOLO III.

TEORIA INVARIANTIVA DELLE FORME ALGEBRICHE. CONNESSI.

CAPITOLO IV.

LE CONICHE.

CAPITOLO V.

LE QUADRICHE.

CAPITOLO VI.

TEORIA GENERALE DELLE CURVE PIANE ALGEBRICHE.

CAPITOLO VII.

LE CUBICHE PIANE.

CAPITOLO VIII.

LE QUARTICHE PIANE.

CAPITOLO IX.

TEORIA GENERALE DELLE SUPERFICIE E CURVE GOBBE ALGEBRICHE.

CAPITOLO X.

LE CURVE STORTE DI VARI ORDINI.

CAPITOLO XI.

LE SUPERFICIE DI 3.º ORDINE.

CAPITOLO XII.

LE SUPERFICIE DI 4.º ORDINE.

CAPITOLO XIII.

SUPERFICIE DI ORDINE SUPERIORE AL QUARTO. SUPERFICIE RIGATE.

CAPITOLO XIV.

LA GEOMETRIA DELLA RETTA NELLO SPAZIO, E LA GEOMETRIA DELLA SFERA.

CAPITOLO XV.

GEOMETRIA NUMERATIVA.

CAPITOLO XVI.

TEORIA INFINITESIMALE DELLE CURVE E SUPERFICIE.

CAPITOLO XVII.

PRINCIPALI GENERAZIONI E TRASFORMAZIONI METRICAMENTE SPECIALIZZATE DI CURVE E SUPERFICIE. LA GEOMETRIA DI CURVE SPECIALI.

CAPITOLO XVIII.

ANALYSIS SITUS O TOPOLOGIA. TEORIA DEI POLIEDRI. CONNESSIONE DELLE SUPERFICIE DI RIEMANN.

CAPITOLO XIX.

GEOMETRIA PROJETTIVA DEGLI IPERSPAZI.

CAPITOLO XX.

LA GEOMETRIA INFINITESIMALE E INTRINSECA NEGLI IPERSPAZI LINEARI E NEGLI SPAZI A CURVATURA COSTANTE.

CAPITOLO XXI.

LA GEOMETRIA ASSOLUTA, E SPECIALMENTE LA GEOMETRIA NON EUCLIDEA NEL PIANO E NELLO SPAZIO.

CAPITOLO XXII.

GEOMETRIA MODERNA DEL TRIANGOLO.

CAPITOLO XXII.

GEOMETRIA ELEMENTARE DEL TRIANGOLO.

PREFAZIONE

La buona accoglienza fatta dal pubblico matematico alla prima parte di quest'opera,* mi ha indotto ad occuparmi con maggior cura e diligenza di questa seconda parte, la quale è riuscita assai più estesa, e ricca di particolari e di notizie, e mi è costata assai maggior fatica.

Avendo, nella Prefazione della prima parte, già trattato degli scopi del mio lavoro, e degli intenti che con esso io mi proponevo di raggiungere, posso ora ritenermi dispensato dal ripetere le cose già dette in quell'occasione.

Un lavoro come questo che io pubblico, può anche rendere, parmi, il gran servigio di estendere con una relativa facilità la cultura dei giovani matematici, che molte volte hanno il grave torto di specializzarsi troppo, cioè di dedicarsi, con troppo esclusivismo, ad una specialissima parte delle matematiche, trascurando tutte le altre.

* Una traduzione tedesca di quest' opera, per cura di A. Schepp, è in corso di stampa a Leipzig pei tipi del celebre editore Teubner, e una traduzione polacca per cura di S. Dickstein si sta pubblicando a Warszawa.

La specializzazione negli studi è venuta a mano a mano come una necessaria conseguenza dell'immenso sviluppo che in questo secolo hanno preso le varie parti della scienza, ma anche nella specializzazione una misura ci vuole, e io ho sempre pensato che non è bello il vedere dei matematici limitare, quasi deliberatamente, la propria cultura solo ad un ristrettissimo campo, e credersi legittimamente dispensati dal volgere anche un solo sguardo ai campi vicini: è poi meno bello ancora il vedere dei giovani acquistare troppo presto una siffatta tendenza.

Ora io credo che noi dobbiamo combattere, con tutte le nostre forze, una così pericolosa tendenza. Una dieta intellettuale che comincia e finisce con un cibo solo non può essere profittevole per alcuno, e può essere invece causa di grandi mali, perchè, come una volta disse Gladstone in un discorso tenuto nel 1879 agli studenti dell'Università di Glasgow, con cotesta esclusività ci si priva del benefizio di quella luce di fianco che i regni della scienza gittano l'uno sull'altro, e ci si dispone ad esagerare la forza, il valore e forse la importanza del proprio particolare merito. Ora se ciò è vero per i rapporti che le varie scienze hanno le une colle altre, quanto non sarà vero per le varie parti, divisioni e suddivisioni della medesima scienza? E quanto non sarà vero ancor più per le scienze matematiche, i cui più recenti progressi hanno sempre viemeglio mostrato quanto sieno fragili le barriere che pareva ne separassero le varie parti?

Alla fine di questo volume ho fatto seguire un particolareggiato indice alfabetico di tutte le cose contenute nel 1.° e nel 2.°. Quei critici che si sono meravigliati della mancanza di un tale indice alla fine della prima parte, non hanno pensato che sarebbe stato inutile e assai meno comodo il fare due separati indici alfabetici.

Nelle indicazioni bibliografiche sono stato alquanto più diffuso in questo secondo volume. Però non si creda che abbia citato tutto ciò che c'era da citare, il che mi sarebbe parso eccessivo ed inutile; ciò che è necessario, parmi, si è solo di porre bene in vista i lavori più importanti riflettenti un determinato soggetto, quelli cioè che hanno tracciato l'orma più profonda e che sono da reputarsi il fondamento degli altri; chè se invece ci si lascia dominare dalla manìa di citar troppo si finisce col far perdere al lettore l'orientamento più naturale e più semplice.

Nella disposizione generale delle varie parti, sono stato costretto alle volte, per seguire un certo ordine di simmetria, da cui ho creduto bene non allontanarmi, a non seguire l'ordine logico, e a porre in precedenza qualche teoria, per le dimostrazioni riguardanti la quale (ma, si badi bene, non per comprenderne i risultati) occorrerebbe qualche concetto che appartiene a teorie poste dopo; per l'indole del nostro libro non mi sembra che ciò possa reputarsi un inconveniente.

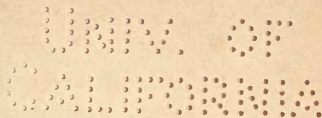
Devo poi ancora avvertire che il posto più naturale del Cap. XXII *(Geometria del triangolo)* sarebbe stato alla fine del Cap. II; ma i fogli di questo capitolo erano già stampati quando pensai

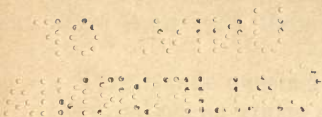
alla opportunità di fare anche un cenno dei moderni studi sulla Geometria del triangolo.

Terminando questa Prefazione debbo infine rendere pubbliche grazie al solerte e operoso Editore Comm. U. Hoepli alla cui larga liberalità si deve se libri di tal genere possano pubblicarsi in Italia; e devo infine ringraziare di cuore il Sig. Dottor U. Aeschlimann di Winterthur che, offertosi spontaneamente, si è addossato il non lieve compito di rivedere tutte le bozze di stampa di questo secondo volume.

Voglio augurarmi che il penoso lavoro da me durato per condurre a compimento quest'Opera, possa essere utile, e non sia stato durato indarno; e spero poi che il lettore vorrà essere indulgente nel giudicarmi, e che vorrà perdonare qualche menda nella quale per avventura, avrò potuto incorrere, e ciò specialmente considerando che quest'Opera, nella quale trovan posto tutte le più svariate parti delle matematiche pure, non è il risultato della collaborazione di molti e diversi intelletti, ma del lavoro di un intelletto solo.

Pavia, 31 agosto 1899.

Ernesto Pascal.

PARTE II.

GEOMETRIA.

CAPITOLO PRIMO.

La geometria delle forme continue fondamentali.

§ 1. — DEFINIZIONI E CONCETTI INTRODUTTORI.

Si indicano col nome di *forme geometriche fondamentali di* 1.ª *specie* le seguenti tre figure geometriche:

1. *La retta punteggiata*, cioè l'assieme di tutti i punti *(elementi della forma)* situati su di una retta, che si chiama *sostegno della punteggiata.*

2. *Il fascio di rette*, cioè l'insieme di tutte le rette di un piano passanti per un punto *(sostegno o centro del fascio).*

3. *Il fascio di piani*, cioè l'insieme di tutti i piani dello spazio passanti per una retta *(sostegno o asse del fascio.)*

Si indicano col nome di *forme geometriche di* 2.ª *specie* le seguenti quattro figure geometriche:

1. *Il piano punteggiato*, cioè l'assieme di tutti i punti di un piano.

2. *Il piano rigato*, cioè l'assieme di tutte le rette di un piano.

3. *La stella di rette*, cioè l'insieme di tutte le rette dello spazio passanti per un punto.

4. *La stella di piani*, cioè l'insieme di tutti i piani dello spazio passanti per un punto.

Si chiamano poi infine *forme geometriche di* 3.ª *specie* le seguenti:

1. *Lo spazio punteggiato,* cioè l'insieme di tutti i punti dello spazio.

2. *Lo spazio di piani,* cioè l'insieme di tutti i piani dello spazio.

Per brevità suole poi anche indicarsi col nome di *sistema piano* l'assieme del piano punteggiato e del piano rigato; col nome di *stella* l'assieme delle due stelle, di rette e di piani; e col nome di *spazio* l'assieme delle due forme di 3.ª specie.

Data una forma geometrica di 1.ª *specie si può stabilire una corrispondenza fra i suoi elementi e i numeri della serie naturale in modo che ad ogni elemento corrisponda un solo numero, e ad ogni numero corrisponda uno e uno solo elemento, e in modo inoltre, che, fissato un numero N e l'elemento corrispondente a, data una quantità σ piccola a piacere, si possa sempre trovare un' altra quantità τ tale che per* TUTTI *i numeri compresi fra N e $N+\tau$, gli elementi corrispondenti abbiano una distanza da a (se si tratti di punteggiata) o facciano un angolo con a (se si tratti di fasci) minore di σ.* Per queste due proprietà la corrispondenza si dice *biunivoca e continua.*

Data una forma geometrica di 2.ª *o* 3.ª *specie si può similmente stabilire una corrispondenza* BIUNIVOCA *e* CONTINUA *fra i suoi elementi e le coppie ovvero rispett. le terne di numeri naturali. (Dando per " corrispondenza continua " una definizione*

analoga a quella data sopra per il caso delle forme di 1.ª specie.)

Questi numeri che in siffatto modo corrispondono all'elemento della forma data si indicano col nome di *coordinate degli elementi della forma stessa.*

Le forme di 1.ª, 2.ª, 3.ª specie sono rispettivamente forme ad una, due, tre coordinate.

Si suol dire anche che le forme di 1.ª, 2.ª, 3.ª specie sono rispettivamente *ad una, due, tre dimensioni*, o anche che esse contengono rispettivamente ∞^1, ∞^2, ∞^3 elementi.

Proiettare da un centro fisso (centro di proiezione) una figura composta di punti e rette, significa costruire le rette che passano per il centro e per i punti della figura, e i piani che passano per il centro fisso e per le rette della figura.

Proiettare da una retta fissa (asse di proiezione) una figura composta di punti, significa costruire i piani passanti per la retta fissa e per ciascuno dei punti dati.

Segare con un piano una figura composta di piani e rette, significa costruire le intersezioni del piano segante coi piani e colle rette date.

Segare con una retta una figura composta di piani significa costruire le intersezioni della retta con tutti i piani della figura.

Le forme geometriche della stessa specie si deducono l'una dall'altra mediante proiezioni e sezioni.

Nella geometria moderna ha grande importanza lo studio delle corrispondenze fra le figure o fra le forme geometriche, nell'intento di ricavare le

proprietà di una figura da quelle di una figura ad essa corrispondente.

Una corrispondenza può essere *biunivoca* o no. È *biunivoca* quando ad un elemento di una delle due forme corrisponde uno e un solo elemento dell'altra, e viceversa.

Le due forme messe in corrispondenza possono anche essere *sovrapposte* cioè avere *il medesimo sostegno*. In tal caso la corrispondenza può essere tale che ad un elemento corrisponda sempre il medesimo altro elemento, sia che il primo si consideri appartenente ad una forma, sia che si consideri appartenente all'altra; una siffatta corrispondenza si chiama *involutoria;* si dice anche che *allora gli elementi si corrispondono in doppio modo.*

Fra le più semplici corrispondenze sono da notarsi la *proiettività*, detta anche *collinearità o omografia*; (di cui son casi particolari la *omologia*, e la *prospettività*) e la *dualità* detta anche *correlazione* o *reciprocità*.

Due forme geometriche fondamentali si dicono *riferite proiettivamente*, *o in corrispondenza proiettiva*, *o* semplicemente *proiettive*, se fra i loro elementi può stabilirsi una tal corrispondenza che l'una può dedursi dall'altra, mediante un numero finito di proiezioni o sezioni. In luogo della denominazione *forme proiettive* si può anche adoperare l'altra di *forme omografiche* o *collineari.* Questa definizione non vale per forme di 3.ª specie. Per queste può valere la seguente altra:

Due forme di 2.ª o 3.ª specie si dicono *proiettive* se i loro elementi di medesima specie si corrispondono biunivocamente, e in modo che ad ele-

menti che si appartengono corrispondono anche elementi che si appartengono.

Due forme proiettive ad una terza sono anche proiettive fra loro.

Due forme fondamentali sono *prospettive* nei seguenti casi:

a) Due punteggiate, se sono sezioni di uno stesso fascio di raggi;

b) Due fasci di piani, se proiettano da due centri diversi uno stesso fascio di raggi;

c) Due fasci di raggi, se proiettano una stessa punteggiata da due centri diversi, o sono sezioni di uno stesso fascio di piani;

d) Una punteggiata e un fascio di raggi (o di piani), ovvero un fascio di raggi e uno di piani, se la prima forma è una sezione della seconda;

e) Due piani punteggiati o rigati, se sono sezioni di una stessa stella;

f) Due stelle, se proiettano da due centri diversi un medesimo piano punteggiato o rigato;

g) Un piano punteggiato o rigato e una stella, se la prima forma è una sezione della seconda.

Due sistemi piani sovrapposti si dicono *omologici* se sono sezioni di due stelle prospettive; e due stelle col medesimo centro si dicono *omologiche* se proiettano da un centro due sistemi piani prospettivi.

Due sistemi piani si dicono *duali*, *reciproci*, o *correlativi* se i punti dell'uno corrispondono biunivocamente alle rette dell'altro, e viceversa, e in modo che ad elementi che si appartengano corrispondano anche elementi che si appartengono.

Due spazi si dicono *duali*, *reciproci* o *correlativi* se i *punti*, le *rette* e i *piani* dell'uno corrispondono biunivocamente e rispett. ai *piani*, alle *rette* e ai *punti* dell'altro, e in modo che ad elementi che si appartengano corrispondano anche elementi che si appartengono.

Si dice *proprietà proiettiva di una figura* quella che si conserva quando alla figura se ne sostituisce un'altra ad essa *proiettiva*. Una proprietà dipendente essenzialmente da misure di distanze, angoli, aree, ecc. si dice *proprietà metrica*.

Alcune proprietà metriche possono anche essere proiettive.

Si dice poi *proprietà grafica o descrittiva o di posizione* una proprietà che si riferisce esclusivamente alla posizione degli elementi di una figura (come il passare una linea o superficie per certi punti, o l'avere più linee o superficie certi punti comuni o linee comuni, ecc.) e da cui è eliminata ogni qualsiasi idea di *quantità*.

Ogni proprietà grafica è sempre proiettiva.

Le proprietà grafiche delle figure sono sottoposte ancora alla legge che si chiama *principio di dualità o di correlazione nel piano e nello spazio:*

Ogni teorema esprimente una proprietà grafica di una figura piana, continua a sussistere se mutiamo dappertutto gli elementi RETTA *e* PUNTO *negli elementi* PUNTO *e* RETTA, *e sostituiamo ad elementi che si appartengano ancora elementi che si appartengano.*

Ogni teorema esprimente una proprietà grafica di una figura solida continua a sussistere se mutiamo dappertutto gli elementi PUNTO *e* PIANO *negli*

elementi PIANO *e* PUNTO, *e lasciamo inalterato l'elemento* RETTA, *e sostituiamo ad elementi che si appartengono ancora elementi che si appartengano.*

Le due operazioni del proiettare da un centro (o da un asse) e del segare con un piano (o con una retta) sono due operazioni duali nello spazio; come le altre due del proiettare da un centro in un piano e del segare con una retta in un piano, sono operazioni duali nel piano.

Due forme geometriche correlative ad una terza sono proiettive fra loro.

Una dualità di due forme sovrapposte (aventi il medesimo sostegno) può essere anche involutoria e allora si dice *polarità.*

Il *principio di polarità* non è dunque che un caso particolare di quello di *dualità.*

Secondo il principio di dualità ad una curva piana, considerata come luogo di punti, ne corrisponde un'altra considerata come inviluppi di tangenti, cioè ai punti di una curva corrispondono le tangenti di un'altra.

È fondamentale nella geometria il concetto di *elemento all'infinito.*

Si dice che:

tutte le rette parallele in un piano, si incontrano in un punto a distanza infinita;

in un piano vi sono tanti punti a distanza infinita quante sono le possibili direzioni di una retta in quel piano;

tutti questi punti stanno su di una retta; la retta all'infinito di quel piano;

tutti i piani paralleli dello spazio si incontrano in una retta a distanza infinita;

tutte le rette a distanza infinita dello spazio, come anche tutti i punti a distanza infinita, stanno tutti in un piano che si chiama, il piano all'infinito dello spazio.

Nel capitolo seguente si tratterà delle *forme discontinue.* Intanto per intendere le cose contenute nei seguenti paragrafi occorre conoscere le seguenti definizioni del quadrangolo e quadrilatero completo.

Si dice *quadrangolo piano completo* la figura formata da quattro punti *(vertici)* di un piano, (di cui tre non sieno mai su di una retta) e dalle 6 rette *(lati)* che congiungono a due a due questi punti; i tre punti d'incontro dei lati opposti (cioè quei lati che non si incontrano in uno dei vertici dati) formano un triangolo che si chiama *triangolo diagonale.*

Si dice *quadrilatero piano completo* la figura formata da quattro rette *(lati)* di un piano, (di cui tre non passino mai per un punto) e dai 6 punti *(vertici)* in cui questi lati si incontrano a due a due; le tre rette che congiungono i vertici opposti (vertici non situati sullo stesso lato) formano il cosiddetto *trilatero diagonale.*

§ 2. — La geometria delle forme di 1.ª specie.

1. *La retta punteggiata.* — Una retta può essere percorsa da un suo punto in due direzioni; una di queste direzioni si chiami *direzione positiva*, e l'altra *negativa*. Ogni segmento della retta abbia il segno + o — secondochè è percorso in direzione positiva o negativa.

Colla notazione AB intendiamo il numero che misura il segmento che va da A sino a B. Per modo che $AB = -BA$.

Fra i segmenti determinati da tre punti di una retta si ha la relazione:

$$AB + BC + CA = 0.$$

Fra i segmenti determinati da quattro punti A, B, C, D di una retta si ha la relazione

$$AB \cdot CD + AC \cdot DB + AD \cdot BC = 0.$$

Chiamando $\delta_{12}\, \delta_{13} \ldots$ le distanze dei punti

$$1, 2, 3, \ldots$$

fra le distanze di tre punti in linea retta si ha la relazione (sotto forma di determinante)

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \delta_{12}^2 & \delta_{13}^2 \\ 1 & \delta_{21}^2 & 0 & \delta_{23}^2 \\ 1 & \delta_{31}^2 & \delta_{32}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Si dice che quattro punti A, B, C, D su di una retta sono *armonici*, quando fra i segmenti da essi

limitati sussiste la relazione

$$\frac{1}{AC} - \frac{1}{AB} = \frac{1}{AB} - \frac{1}{AD}$$

ovvero

$$\frac{2}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}$$

ovvero

$$\frac{AC}{CB} = -\frac{AD}{DB}.$$

Indicando con M il punto medio del segmento AB, *si ha anche*

$$MC \cdot MD = \overline{MA}^2.$$

I punti A e B si dicono *coniugati armonici*, come anche C e D.

Geometricamente: I quattro punti A, B, C, D si diranno *armonici* se si può costruire un quadrangolo completo tale che due lati opposti concorrono in A, due altri lati opposti in B, un quinto lato passi per C e il sesto opposto a questo, passi per D. *Se di tali quadrangoli se ne può costruire uno, se ne potranno costruire infiniti.*

Se quattro punti armonici si proiettano da un centro su di un'altra retta, si hanno ancora quattro punti armonici.

Dati tre punti A, B, C e dato l'ordine con cui devono essere considerati, è determinato in modo unico un quarto punto D che sia con essi in ar-

monia, che sia cioè coniugato armonico di C rispetto alla coppia A, B.

Se A B C D è una forma armonica, sono anche armoniche le forme B A C D, A B D C, B A D C.

Nella forma armonica A B C D, i punti coniugati A, B sono necessariamente SEPARATI *dagli altri due C, D.*

In un quadrilatero completo ciascuna diagonale è divisa armonicamente dalle altre due.

Dati quattro punti A, B, C, D su di una retta il rapporto delle distanze

$$\frac{A\,C}{B\,C} : \frac{A\,D}{B\,D}$$

si dice *doppio rapporto o rapporto anarmonico o birapporto* dei quattro punti, e si indica col simbolo $(A\,B\,C\,D)$.

Un doppio rapporto non si altera se si scambiano fra loro due punti, e fra loro anche gli altri due.

Permutando i quattro punti fra loro in tutti i 24 modi possibili, il doppio rapporto assume solo 6 valori diversi, che si esprimono poi in modo semplice mediante uno solo di essi.

Se λ è il doppio rapporto (A B C D), tali sei valori sono

$$(A\,B\,C\,D) = \lambda$$

$$(A\,B\,D\,C) = \frac{1}{\lambda}$$

$$(A\,C\,B\,D) = 1 - \lambda$$

$$(A\,C\,D\,B) = \frac{1}{1-\lambda}$$

$$(A\,D\,B\,C) = \frac{\lambda - 1}{\lambda}$$

$$(A\,B\,D\,C) = \frac{\lambda}{\lambda - 1}\,.$$

Se due dei quattro punti coincidono, il loro doppio rapporto acquista uno dei valori 0, 1, ∞.

Se i quattro punti sono armonici, il loro doppio rapporto acquista uno dei valori -1, $\frac{1}{2}$, 2.

I sei rapporti anarmonici di quattro punti REALI *sono in generale disuguali, almenochè non si tratti di uno dei due casi precedenti, in cui essi sono eguali a due a due, e quindi i sei rapporti si riducono allora a soli tre distinti.*

Se uno dei punti va all'infinito, il doppio rapporto diventa

$$(A\,B\,C\,\infty) = \frac{A\,C}{B\,C}\,.$$

Se il doppio rapporto $(A\,B\,C\,D)$ *è eguale ad* r *si ha*

$$\frac{r-1}{A\,B} = \frac{r}{A\,C} - \frac{r}{A\,D} \qquad \text{(Möbius.)}$$

Si fissi sulla retta un punto O *(origine)*, si stabilisca la direzione positiva e si fissi un'unità di misura. Ogni punto A della retta può determinarsi allora mediante il numero che misura la di-

stanza di esso dall'origine, avendo cura di considerare positivo o negativo tal numero secondochè il segmento OA è positivo o negativo.

Il numero positivo o negativo, che corrisponde in tal maniera al punto A si dice *coordinata ordinaria o ascissa* di A.

Supponiamo invece fissati due punti A, B, e dato un altro punto C. Il rapporto

$$\frac{AC}{CB} = r$$

si chiama *coordinata baricentrica del punto C.*

La coordinata baricentrica del punto all' infinito della retta è — 1.

Fissati tre punti $A\,B\,C$ della retta, si può assumere come *coordinata* di un qualunque punto D della retta, il doppio rapporto $(A\,B\,C\,D)$. Questa coordinata si suol chiamare *proiettiva.* I punti A, B hanno allora per coordinate ∞ e 0 e si dicono *punti fondamentali;* il punto C ha per coordinata 1 e si dice *punto unità.*

Questo sistema di coordinate ha per caso particolare quello delle coordinate ordinarie; basta supporre A all'infinito, B origine delle coordinate, e C situato alla distanza $+1$ da B.

Cioè: *la distanza di due punti è eguale al rapporto anarmonico della quaterna formata dai due punti, dal punto all' infinito e dal punto unità.*

Se invece C è medio fra i punti A, B, allora *le coordinate proiettive, diventano le coordinate baricentriche.*

Passiamo ora a dire qualche cosa sulle *coordinate omogenee* dei punti di una retta.

Supponiamo fissato sulla retta un qualunque sistema di coordinate; sia x la coordinata di un punto P e poniamola sotto la forma

$$x = \frac{x_1}{x_2};$$

le quantità x_1, x_2, il cui rapporto determina la coordinata di P si chiamano *coordinate omogenee* di P.

Fra i sistemi di coordinate omogenee è notevole il seguente:

Supponiamo assegnati due punti (fondamentali) A, B, e chiamate p, q le distanze di un punto P dai due punti A, B, per modo che $p + q = AB$; fissate indi due costanti a, b, poniamo

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{b\,p}{a\,q},$$

allora ad ogni punto P corrisponderà una coppia di valori $x_1\,x_2$ *il cui rapporto è costante, e ad ogni siffatta coppia di valori, corrisponderà un* UNICO *punto P.* Le quantità $x_1\,x_2$ possono assumersi perciò come *coordinate omogenee* del punto della retta; ad $x_1 = 0$ corrisponde il punto A, e ad $x_2 = 0$ corrisponde il punto B; il punto all'infinito ha per coordinate $x_1 \equiv -b$, $x_2 \equiv a$. Il punto U per cui $\frac{x_1}{x_2} = 1$ cioè il punto per cui $\frac{p}{q} = \frac{a}{b}$ si chiama il *punto unità.*

Questo sistema di coord. omog. ha come caso particolare il sistema di coord. ordinarie (ascisse) NON *omogenee;* basta perciò supporre che B si al-

lontani all'infinito; resta allora inutile considerare la coordinata x_2 perchè q è sempre infinito, e la posizione del punto è determinata solo da x_1 cioè dalla distanza di esso da A.

È facile inoltre vedere che il rapporto $\frac{x_1}{x_2}$, potendosi scrivere $\frac{b}{a} : \frac{q}{p}$, $\left(\text{ed essendo } \frac{b}{a} \text{ il rapporto delle distanze del punto unità } U \text{ dai punti } B, A\right)$ non è altro che il doppio rapporto dei punti $B\,A\,U\,P$. Quindi in fondo il sistema che abbiamo sviluppato non è altro che quello che si ottiene ponendo sotto forma omogenea, al solito modo, la *coordinata proiettiva*; esso è perciò *un sistema di coordinate omogenee proiettive*.

Facendo assumere alla coordinata dei punti di una retta, anche i valori immaginari, possiamo immaginare introdotti degli enti che chiameremo i *punti immaginari della retta*.

In coordinate ordinarie il doppio rapporto di quattro punti si esprime colla formola

$$\frac{(x - x'')}{(x' - x'')} : \frac{(x - x''')}{(x' - x''')}$$

se le x sono le ascisse dei quattro punti dati.

Con questa formola può allora calcolarsi il doppio rapporto anche di punti immaginari della retta.

Estendendo così il concetto di doppio rapporto si trova anche un altro caso, oltre quei due sopra enumerati, nei quali *i sei doppi rapporti di quat-*

tro elementi non sono tutti distinti, e quest'altro caso si ha *quando il valore di uno dei doppi rapporti è una radice cubica complessa dell'unità negativa.* Allora i quattro punti si dicono *equianarmonici* e *i sei doppi rapporti si riducono a soli due distinti.*

Si dice che un'equazione algebrica in x di grado n, *rappresenta un gruppo di* n *punti su di una retta*; con ciò si intende dire che si immagina risoluta l'equazione, e si interpretano come coordinate di n punti (reali o complessi) di una retta, le n radici di quella equazione.

Due punteggiate sono PROIETTIVE (v. § 1) *(o anche* OMOGRAFICHE *o* COLLINEARI) *quando ad ogni punto dell'una corrisponde uno e un solo punto dell'altra, e il doppio rapporto dei quattro punti dell'una è sempre eguale al doppio rapporto dei quattro punti corrispondenti dell'altra.*

Questa proprietà potrebbe anche servire a fondamento per la definizione di *punteggiate proiettive.*

Un'altra definizione può essere la seguente (di STAUDT):

Due punteggiate sono dette proiettive o riferite proiettivamente, quando sono riferite fra loro in modo che a gruppi armonici nell'una corrispondano gruppi armonici nell'altra.

Il punto corrispondente in una punteggiata, al punto all'infinito dell'altra, si dice *punto di fuga o punto limite.*

Se i due punti di fuga sono anche all'infinito le due punteggiate si dicono *simili.*

La definizione della proiettività può anche darsi nel seguente modo:

Due punteggiate si dicono proiettive quando si corrispondono in modo che dai punti dell' una si passi a quelli dell' altra con un numero finito di proiezioni e sezioni.

La corrispondenza è determinata se sono fissate ad arbitrio tre coppie di punti corrispondenti.

Se x e y sono le coordinate ordinarie dei punti di una punteggiata e dell'altra, una relazione bilineare del tipo

$$a\,x\,y + b\,x + c\,y + d = 0$$

è la relazione che deve sussistere fra x e y, perchè le due punteggiate sieno proiettive (equazione della proiettività).

Se I' e J sono i punti di fuga di due punteggiate proiettive, e $A\,A'$ due punti corrispondenti, il prodotto $J\,A \,.\, I'\,A'$ è costante, qualunque sia la coppia A, A'.

In due punteggiate simili, è costante il rapporto fra i segmenti corrispondenti (rapporto di simiglianza).

Se questo rapporto è $\pm\,1$ le due punteggiate si dicono *congruenti o eguali.*

Se due punteggiate proiettive, a sostegni distinti, hanno un punto unito (cioè un punto che ha per corrispondente sè stesso) esse sono prospettive (v. § 1).

Date tre coppie $A\,A'$, $B\,B'$, $C\,C'$ di elementi corrispondenti in due punteggiate proiettive, per costruire le altre coppie, cioè, come si dice, *per costruire la proiettività*, si può procedere così: *Sulla*

retta che unisce due punti corrispondenti p. es. $A\ A'$ *si prendano due centri* S, S'; *si conducano* $S\ B$, $S'\ B'$ *che si incontrino in* B''; *indi* $S\ C$, $S'\ C'$ *che si incontrino in* C'', *e si congiunga* $B''\ C''$; *da un punto* D *della prima punteggiata, colla proiezione da* S *si ottenga* D'' *su* $B'\ C''$; *si proietti indi* D'' *da* S' *e nell'incontro colla seconda retta si avrà il punto* D' *corrispondente a* D.

Se le due punteggiate sono sovrapposte, si proietti una di esse da un centro su di un'altra retta, indi si operi come precedentemente.

Se si scelgono $S\ S'$ nei punti $A'\ A$, la retta $B''\ C''$ che si ottiene si dice *asse di proiettività o di omografia.*

Essa taglia le due punteggiate nei punti che corrispondono al loro punto comune. Per una proprietà di quest'asse v. pag. 27.

Se i sostegni delle due punteggiate omografiche sono la medesima retta, le due punteggiate si dicono *sovrapposte.*

Due punteggiate omografiche sovrapposte, se non sono coincidenti (cioè se tutti i loro elementi non sono uniti) possono avere al massimo due punti UNITI *reali. La equazione*

$$a\,x^2 + (b + c)\,x + d = 0$$

ha per radici le coordinate di tali punti.

I punti uniti si chiamano anche *punti doppi o fuochi.*

Se le radici di questa equazione sono immaginarie, noi diremo che esistono anche allora i due punti uniti, *ma sono immaginari.*

Il punto medio del segmento limitato dai punti uniti coincide con quello del segmento limitato dai due punti di fuga.

In due punteggiate omografiche sovrapposte è costante il doppio rapporto di due punti corrispondenti qualunque coi due punti uniti.

La corrispondenza fra tali due punteggiate è involutoria, (cioè ad un punto corrisponde sempre un medesimo altro punto) solo quando tale doppio rapporto ha per valore $+1$ *o* -1.

Nel primo caso le due punteggiate sono *identiche*, e nel secondo caso formano *una omografia involutoria* o semplicemente *una involuzione* (DESARGUES).

Analiticamente, una involuzione è determinata da una equazione del tipo

$$a\,x\,y + b\,(x + y) + d = 0.$$

I punti uniti dell'involuzione sono dati dalla equazione

$$a\,x^2 + 2\,b\,x + d = 0.$$

Se i coefficienti a, b, d sono reali, secondochè i punti uniti sono *reali*, *immaginari*, *o coincidenti*, *l'involuzione si dirà iperbolica*, *ellittica*, *parabolica.*

Nel caso dell'involuzione i due punti limiti coincidono in un unico punto detto centro dell'involuzione, e che è il punto medio del segmento determinato dai due punti uniti.

Se in due punteggiate omografiche sovrapposte vi sono due punti distinti i quali si corrispondono in doppio modo (v. § 1), *lo stesso accadrà per due*

punti corrispondenti qualunque, e si avrà l'involuzione.

Se O è centro dell'involuzione, e $A\,A'$ sono due punti corrispondenti sarà sempre

$$O\,A\,.\,O\,A' = \text{cost.}$$

Una involuzione è determinata da due coppie di punti corrispondenti $A\,A'$, $B\,B'$.

Date le coppie $A\,A'$, $B\,B'$, di punti corrispondenti, per costruire l'involuzione si procede così: assumasi un punto arbitrario G fuori della retta e descrivansi i cerchi $G\,A\,A'$, $G\,B\,B'$, che si segheranno in un altro punto H. Il punto O in cui la retta data incontra $G\,H$ è il centro dell'involuzione, e ogni circolo descritto per $G\,H$ incontra la retta data in due punti corrispondenti dell'involuzione.

Se $A\,A'$, $B\,B'$, $C\,C'$ sono coppie di punti in involuzione si ha fra i segmenti che questi punti determinano sulla retta, la relazione

$$A\,B'\,.\,B\,C'\,.\,C\,A' + A'\,B\,.\,B'\,C\,.\,C'\,A = 0.$$

Se $x_1\,y_1$, $x_2\,y_2$ sono le coordinate di $A\,A'$, $B\,B'$, la equazione dell'involuzione è

$$\begin{vmatrix} x\,y & x+y & 1 \\ x_1\,y_1 & x_1+y_1 & 1 \\ x_2\,y_2 & x_2+y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Se $f_1(x) = 0$ è l'equazione di 2.° grado avente per radici $x_1\,y_1$, e $f_2(x) = 0$ è quella che ha per radici $x_2\,y_2$, l'equazione dell'involuzione è

$$f_1(x) + \lambda\,f_2(x) = 0.$$

Se un angolo retto ruota intorno al suo vertice nel proprio piano, i suoi lati descrivono su di una retta due punteggiate in involuzione.

Le tre coppie di lati opposti di un quadrangolo completo sono segate da una trasversale arbitraria in tre coppie di punti coniugati in involuzione.

I sei punti che si ottengono proiettando da un centro arbitrario su di una retta, le tre coppie di vertici opposti di un quadrilatero completo, sono accoppiati in involuzione.

Se due punteggiate omografiche sovrapposte hanno $A\,A'$, $B\,B'$ *per coppie di elementi corrispondenti, ed* E, F *per due punti uniti (distinti o no) saranno* E, F; A, B'; B, A' *tre coppie di punti coniugati in una involuzione.*

Una proiettività di punteggiate sovrapposte può essere *ciclica di ordine n*, cioè tale che se di un punto A si cerchi il corrispondente A', indi di A', considerato come appartenente anche alla prima punteggiata, si cerchi ancora il corrispondente A'', e così di seguito, dopo n di siffatte operazioni si giunge ad ottenere sempre daccapo il punto A.

L'involuzione è una proiettività ciclica di 2.° ordine.

Prendendo i punti uniti come punti fondamentali di coordinate proiettive (non omogenee), la equazione della proiettività ciclica di ordine n può scriversi $y - \varepsilon x = 0$ *dove* ε *è una radice primitiva* n^{ma} *dell'unità.*

Le proiettività cicliche ebbero questo nome dal Clebsch (*Crelle*, LXVIII); se ne erano occupati prima Möbius (*Werke*, II) e Battaglini (*Accad.*

Napoli, 1863) che le avea chiamate *involuzioni di ordine superiore.*

Per le corrispondenze generali fra due punteggiate sovrapposte (in generale fra due forme fondamentali di 1.ª specie sovrapposte) è importante il seguente teorema detto *principio di corrispondenza di* CHASLES:

Se fra i punti di due punteggiate sovrapposte si stabilisce una corrispondenza tale che ad ogni punto dell'una ne corrispondono m dell'altra, e ad ogni punto dell'altra ne corrispondono n dell'una, vi saranno m + n punti che corrispondono a sè stessi (CHASLES, *Compt. Rend.* 1864, 1866).

2. *Fascio di rette.* — Fissata nel fascio una certa retta *(retta origine)* il fascio può essere descritto facendo rotare questa retta intorno al centro del fascio stesso. La rotazione può avvenire in due sensi; stabiliamo di chiamare rotazione *positiva* quella che avviene in un certo senso, e rotazione *negativa* la opposta. Se a, b sono due rette del fascio, noi intenderemo per *angolo* $(a\,b)$ il più piccolo angolo che deve descrivere il raggio a rotando *nel senso positivo* per andare a coincidere con b. Il numero che misura l'angolo che la retta origine fa con ciascuna retta del fascio, può chiamarsi *coordinata ordinaria o anomalia* della retta del fascio. Per modo che $(b\,a) + (a\,b) = \pi$.

Il *doppio rapporto* di quattro raggi del fascio è quello dei quattro punti in cui il fascio è segato da una trasversale qualunque. *Esso è anche rap-*

presentato da

$$(a\,b\,c\,d) = \frac{\operatorname{sen}(a\,c)}{\operatorname{sen}(b\,c)} : \frac{\operatorname{sen}(a\,d)}{\operatorname{sen}(b\,d)}$$

ovvero anche da:

$$(a\,b\,c\,d) = \frac{C\,A}{C\,B} : \frac{D\,A}{D\,B}$$

dove $C\,A$, $C\,B$, $D\,A$, $D\,B$ sono le distanze di due punti C, D dei raggi c, d, dai raggi a, b.

Ponendo $(a\,b\,c\,d) = r$ si ha

$$\frac{r-1}{\operatorname{tg} a\,b} = \frac{r}{\operatorname{tg} a\,c} - \frac{r}{\operatorname{tg} a\,d} \qquad \text{(Möbius.)}$$

Se $(a\,b\,c\,d) = -1$ si dirà che le quattro rette sono *armoniche*.

Quattro raggi $a\,b\,c\,d$ di un fascio sono ARMONICI *se si può costruire un quadrilatero completo in modo che due vertici opposti stanno su a, due opposti su b; un quinto sta su c, e il sesto su d.*

Se si può costruire uno di tali quadrilateri se ne potranno costruire infiniti.

Fissati nel fascio due raggi a, b, si può prendere come coordinata di un raggio c il rapporto $\frac{\operatorname{sen}(a\,c)}{\operatorname{sen}(c\,b)}$; si ha così un sistema di coordinate analogo a quello detto *baricentrico*, nel caso della punteggiata.

Fissati invece nel fascio tre raggi a, b, c si può prendere come coordinata di un raggio d il rap-

porto anarmonico $(a\,b\,c\,d)$; si ha così il sistema di *coordinate proiettive.*

Facendo assumere alla coordinata valori immaginari, si hanno le *rette immaginarie* del fascio (per definizione).

Due fasci di rette sono omografici o collineari o proiettivi (v. § 1) *quando si corrispondono in modo che i rapporti anarmonici di quattro raggi dell'uno è sempre eguale al rapporto anarmonico dei raggi corrispondenti (coniugati) dell'altro.*

Anche qui, come per le punteggiate, si può dire che questa proprietà potrebbe servire alla definizione di fasci proiettivi.

Un' altra definizione può poi anche essere la seguente (di Staudt): *Due fasci sono proiettivi se si corrispondono in modo che a gruppi armonici nell'uno corrispondono gruppi armonici nell'altro.*

Se i due fasci hanno il medesimo centro (sostegno) allora vi saranno sempre due raggi (reali o immaginari) i quali corrispondono a sè stessi (raggi uniti o doppi).

Se poi la corrispondenza è *involutoria* (senza essere tale che ogni raggio corrisponda a sè stesso) allora si dice che le coppie di raggi corrispondenti formano *una involuzione. Due rette coniugate (corrispondenti) sono allora armoniche con le due rette doppie.*

Come per le punteggiate, anche quì potrebbero poi definirsi *le proiettività cicliche di ordine n.*

Un angolo retto che rota in un piano intorno al proprio vertice descrive coi suoi lati due fasci di raggi in involuzione. I raggi doppi sono immaginari e sono quelli che vanno ai due punti ciclici (v. § 3).

Le tre coppie di vertici opposti di un quadrilatero completo sono proiettate da un centro arbitrario per mezzo di tre coppie di raggi coniugati in involuzione.

L'omografia fra due fasci di raggi è determinata da tre coppie di elementi corrispondenti.

Se due fasci omografici a centri diversi hanno un raggio unito sono prospettivi (v. § 1).

Per costruire l'omografia di due fasci di raggi, assegnate tre coppie $a\,a'$, $b\,b'$, $c\,c'$ di raggi corrispondenti, si proceda in modo correlativo a quello seguito pel caso di due punteggiate. *Pel punto comune a due raggi corrispondenti* a, a' *si conducano due rette* s, s', *e sia* b'' *la retta che congiunge i punti* $s\,b$, $s'\,b'$, *e* c'' *la retta dei punti* $s\,c$, $s'\,c'$; *il punto* $b''\,c''$ *è il centro di un fascio che sarà prospettivo ad ambedue i fasci dati; dato perciò un raggio* d *del primo fascio, se ne trovi l'incontro con* s; *questo punto d'incontro si congiunga col punto* $(b''\,c'')$ *e di questo raggio si trovi l'incontro con* s'; *la retta che unisce il centro del secondo fascio con questo punto sarà il raggio corrispondente* d'.

Se per s, s' si assumono rispett. le rette a', a, si avrà che le rette congiungenti i punti $a\,b'$, $b\,a'$; $a\,c'$, $c\,a'$; $b\,c'$, $c\,b'$; ... concorrono in un punto che si chiama *centro di proiettività o di omografia* dei due fasci.

Il centro di proiettività gode della proprietà che ogni retta passante per esso sega i fasci secondo due punteggiate in involuzione, e viceversa ogni retta siffatta passa per quel centro.

L'asse di proiettività di due punteggiate proiet-

tive (pag. 20) gode della proprietà correlativa, che ci esoneriamo dall'enunciare.

Due fasci di raggi si dicono *simili* se (essendo i loro centri all' infinito) una sezione dell'uno è simile ad una sezione dell'altro (v. § 2).

Due fasci di raggi si dicono *eguali* se l'uno non è che l'altro trasportato in altra posizione.

Due fasci eguali sono proiettivi.

3. *Fascio di piani.* — La geometria del fascio di piani non ha niente di sostanzialmente diverso da quello della retta punteggiata e del fascio di rette. Si possono introdurre le stesse nozioni introdotte precedentemente; la nozione di coordinata quella di doppio rapporto, di armonia, di omografia, di involuzione.

§ 3. — Geometria delle forme di 2.ª specie. Piano punteggiato e rigato.

Fra le aree dei triangoli aventi per vertici tre di cinque dati punti A, B, C, D, E del piano, sussiste la relazione

$$ABE.CDE + BCE.ADE + CAE.BDE = 0$$

e similmente per 6 punti del piano si ha

$$ABC.DEF + ACD.BEF + ADB.CEF = BCD.AEF$$

(Monge, Möbius).

Chiamando $\delta_{12}\ \delta_{13} \ldots$ le distanze a due a due di quattro punti $A_1\ A_2\ A_3\ A_4$ di un piano si ha la

relazione:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \delta_{14}^2 & \delta_{24}^2 & \delta_{34}^2 \\ 1 & \delta_{41}^2 & 0 & \delta_{21}^2 & \delta_{31}^2 \\ 1 & \delta_{42}^2 & \delta_{12}^2 & 0 & \delta_{32}^2 \\ 1 & \delta_{43}^2 & \delta_{13}^2 & \delta_{23}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Supponiamo nel piano segnate due rette *(assi coordinati)* che si incontrino in un punto O detto *origine.* Sieno in un qualunque modo stabiliti su queste due rette due sistemi di coordinate ordinarie come nel § 2, prendendo il punto O come origine in ciascuna. Per ogni punto P del piano passerà una retta parallela alla prima retta e una retta parallela alla seconda; ogni punto del piano si proietterà, con proiezione parallela alla seconda retta, in uno e un solo punto P' della prima, e con proiezione parallela alla prima retta in uno e un solo punto P'' della seconda. Le coordinate di P' e di P'' possono allora prendersi per *coordinate di* P; esse si chiamano *coordinate cartesiane.* Il caso più ovvio e più semplice si ottiene supponendo ortogonali le due rette date, ed eguali le unità di misura colle quali sulle due rette si computano le coordinate di P' e P''. Se si chiamano x y le coordinate dei punti della prima retta e della seconda, chiameremo *asse delle* x la prima retta, e *asse delle* y la seconda retta.

Un altro sistema di coordinate pei punti del piano è quello cosiddetto delle *coordinate polari.* Si

fissi nel piano un punto O (polo) e una retta OA uscente da esso, della quale si fissi la direzione positiva (asse polare). Un punto P del piano può essere determinato dalla distanza (sempre positiva) del punto P dal punto O, e dall'ampiezza dell'angolo (positivo o negativo) che la direzione positiva della retta OA deve compiere, girando in senso positivo o negativo (v. § 2. *Fascio di rette*), per andare a sovrapporsi alla retta OP.

Finalmente un altro sistema di coordinate è quello detto *bipolare.* Fissati nel piano due punti O, O' come centri di due fasci; per ogni punto P del piano passa un raggio del primo fascio e un raggio del secondo; le coordinate di tali due raggi in ciascuno dei fasci, possono prendersi come coordinate di P.

Se le due coordinate $x\,y$ di un punto in un piano si pongono sotto la forma $x = \frac{x_1}{x_3}$, $y = \frac{x_2}{x_3}$, le quantità $x_1\,x_2\,x_3$ si dicono *coordinate omogenee* dei punti del piano. Fra i sistemi di coordinate omogenee è notevole quello cosiddetto *trilineare o trimetrico.*

Consideriamo tre rette del piano, non passanti per un punto, e chiamate p, q, r le distanze di un qualunque punto P del piano dalle tre rette, e a, b, c tre costanti qualunque, poniamo $x_1\,x_2\,x_3$ proporzionali ai rapporti

$$\frac{p}{a}, \quad \frac{q}{b}, \quad \frac{r}{c}.$$

Si può far vedere che *in tal maniera ad ogni terna di valori* $\rho\,x_1$, $\rho\,x_2$, $\rho\,x_3$, *(dove* ρ *sia un qua-*

lunque fattore di proporzionalità) corrisponde un UNICO *punto del piano, e viceversa;* dunque le quantità $x_1\, x_2\, x_3$ possono rappresentare un sistema di coordinate omogenee. I vertici $A\ B\ C$ del triangolo formato dalle tre rette hanno per coordinate rispettivamente

$$\begin{matrix} 0 & 0 & x_3 \\ 0 & x_2 & 0 \\ x_1 & 0 & 0. \end{matrix}$$

Il triangolo $A\ B\ C$ si chiama *triangolo fondamentale delle coordinate.*

Esiste nel piano un punto U tale che le sue distanze dalle tre rette sono proporzionali ad a, b, c; le coordinate omogenee di esso sono 1, 1, 1; esso perciò si chiama *punto-unità.*

Il rapporto di due delle coordinate di un punto P, p. es. i rapporti $\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}$ *possono rappresentarsi come doppi rapporti di fasci di raggi.* Giacchè

$$\frac{x_1}{x_3} = \frac{c}{a} : \frac{r}{p}$$

$$\frac{x_2}{x_3} = \frac{c}{b} : \frac{r}{q};$$

e i secondi membri sono eguali ai doppi rapporti dei quattro raggi dei fasci

$$B(A,\ C,\ U,\ P),\ \text{e}\ A(B,\ C,\ U,\ P).$$

Quindi il sistema di coordinate qui introdotto è *un sistema di coordinate omogenee proiettive.*

Se U è il centro del circolo iscritto al triangolo fondamentale, le coordinate $x_1\, x_2\, x_3$ di P sono proporzionali alle distanze del punto P dai tre lati del triangolo fondamentale.

Se uno dei lati del triangolo fondamentale diventa la retta all'infinito del piano, il sistema di coordinate trilineari (omogenee) diventa il sistema di coordinate cartesiane (non omogenee).

Le formole generali per la trasformazione di un sistema di coordinate cartesiane in un altro sistema anche cartesiano sono le seguenti: *Se $(x\, y)$ sono le coord. di un punto, riferite a due assi passanti per un punto O, e facenti un angolo ω fra loro, e $(X\, Y)$ sono le coord. del medesimo punto riferite ad altri due assi passanti per un altro punto O' che ha per coordinate $(a\, b)$ rispetto agli antichi assi, si hanno le relazioni*

$$x = a + X \frac{\operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \omega} + Y \frac{\operatorname{sen} \beta'}{\operatorname{sen} \omega}$$

$$y = b + X \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \omega} + Y \frac{\operatorname{sen} \alpha'}{\operatorname{sen} \omega}$$

dove α, β sono gli angoli che il nuovo asse X fa cogli antichi e $\alpha'\, \beta'$ sono gli angoli che il nuovo asse Y fa cogli antichi (essendo

$$\alpha + \beta = \alpha' + \beta' = \omega). *$$

* Per *angoli di assi* si intendono gli angoli che fanno fra loro le direzioni positive di essi.

Il determinante dei coefficienti di X e Y in queste formole ha per valore $\frac{\operatorname{sen}\Omega}{\operatorname{sen}\omega}$, *essendo* Ω *l'angolo dei nuovi assi.*

Se ambedue i sistemi di coordinate sono ortogonali, e se α è l'angolo che il nuovo asse di X forma coll'antico asse di x, le formole di trasformazione sono semplicemente le seguenti

$$x = a + X\cos\alpha \pm Y\operatorname{sen}\alpha$$
$$y = b + X\operatorname{sen}\alpha \mp Y\cos\alpha.$$

In queste formole bisogna considerare i segni superiori o inferiori secondochè le direzioni positive di Y e y formano fra loro un angolo α o un angolo $\pi - \alpha$.

Le formole di trasformazione di coordinate cartesiane ortogonali in coordinate polari sono:

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\operatorname{sen}\varphi$$

$$\rho = +\sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x},$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad \operatorname{sen}\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

dove ρ, φ sono le coordinate polari del punto di coordinate cartesiane $x\,y$, e dove si suppone che il polo coincida coll'origine delle coordinate, e che l'asse polare coincida coll'asse su cui si contano le x.

Se $(x\,y)$ $(x'\,y')$ sono le coordinate cartesiane di due punti, la distanza dei due punti è data, dalla

formola:

$$\rho^2 = (x'-x)^2 + (y'-y)^2 + 2(x'-x)(y'-y)\cos\omega$$

essendo ω *l'angolo che formano fra loro gli assi.*

Se α, β *sono gli angoli che una retta del piano forma cogli assi coordinati si ha la relazione fondamentale*

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\omega = \operatorname{sen}^2\omega.$$

Se α, β *e* $\alpha'\,\beta'$ *sono gli angoli che due rette formano cogli assi coordinati, l'angolo delle due rette è dato dalle formole*

$$\cos(r\,r') = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2\omega}\begin{vmatrix} 1 & \cos\omega & \cos\alpha \\ \cos\omega & 1 & \cos\beta \\ \cos\alpha' & \cos\beta' & 1 \end{vmatrix},$$

$$\operatorname{sen}(r\,r') = -\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha' & \cos\beta' \end{vmatrix}.$$

La condizione perchè le due rette sieno ortogonali è

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\omega & \cos\alpha \\ \cos\omega & 1 & \cos\beta \\ \cos\alpha' & \cos\beta' & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

e la condizione perchè sieno parallele è

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha' & \cos\beta' \end{vmatrix} = 0.$$

Se gli assi sono ortogonali, le relazioni prece-

denti diventano

$$\cos(r\,r') = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta',$$
$$\text{sen}\,(r\,r') = \cos\alpha\cos\beta' - \cos\alpha'\cos\beta.$$

Se (xy) $(x'\,y')$ $(x''\,y'')$ *sono le coordinate dei tre vertici di un triangolo, l'area di questo è data, in valore assoluto, da*

$$\frac{1}{2}\,\text{sen}\,\omega \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x' & y' & 1 \\ x'' & y'' & 1 \end{vmatrix}.$$

La condizione perchè tre punti di coord.

$$(x\,y)\ (x'\,y')\ (x''\,y'')$$

sieno in linea retta è

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x' & y' & 1 \\ x'' & y'' & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Una equazione fra le coordinate di un punto nel piano, rappresenta *un luogo di punti.*

Fra le coordinate $x\,y$ *di un punto appartenente ad una linea retta sussiste una relazione di 1.° grado (equazione della retta) del tipo*

$$a\,x + b\,y + c = 0$$

dove a, b, c *sono coefficienti costanti.*

L'equazione della retta che passa per due punti di coordinate $(x'\,y')$, $(x''\,y'')$ *può scriversi sotto*

ciascuna delle forme

$$\frac{x - x'}{x'' - x'} = \frac{y - y'}{y'' - y'}$$

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x' & y' & 1 \\ x'' & y'' & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Le coordinate di un punto che sta sulla retta determinata dai punti $(x' y')$ $(x'' y'')$ *possono scriversi*

$$\left(\frac{x' + \lambda x''}{1 + \lambda}, \frac{y' + \lambda y''}{1 + \lambda}\right).$$

I punti

$$\left(\frac{x' + \lambda x''}{1 + \lambda}, \frac{y' + \lambda y''}{1 + \lambda}\right) \left(\frac{x' - \lambda x''}{1 - \lambda}, \frac{y' - \lambda y''}{1 - \lambda}\right)$$

dividono armonicamente il segmento limitato dai punti $(x' y')$ $(x'' y'')$.

Supposti gli assi ortogonali e posta l'equazione della retta sotto la forma

$$y = Ax + B$$

il coefficiente A *si chiama coefficiente angolare dell'equazione della retta, e rappresenta la tangente trigonometrica dell'angolo che la retta fa coll'asse di* x.

Indicando con α, β *gli angoli che la perpendicolare alla retta fa cogli assi coordinati, e con* ρ *la distanza dell'origine delle coordinate dalla retta,*

l'equazione di questa può scriversi

$$x \cos \alpha + y \cos \beta - \rho = 0 \quad \textit{(equaz. normale).}$$

Per ridurre l'equazione $a x + b y + c = 0$ *alla forma normale, basta dividere i suoi coefficienti per*

$$\frac{\operatorname{sen} \omega}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2 a b \cos \omega}},$$

dove il radicale si prenderà col segno + o — secondochè il prodotto $c \operatorname{sen} \omega$ *è negativo o positivo.*

Se $a x + b y + c = 0$ *è l'equazione di una retta, gli angoli che essa forma cogli assi sono dati dalle formole (dove* ω *è l'angolo degli assi)*

$$\cos \alpha = \frac{a \operatorname{sen} \omega}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2 a b \cos \omega}}$$

$$\cos \beta = \frac{b \operatorname{sen} \omega}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2 a b \cos \omega}}$$

e la distanza dell'origine dalla retta è data dalla formola

$$\rho = - \frac{c \operatorname{sen} \omega}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2 a b \cos \omega}}$$

dove per il segno del radicale vale la medesima osservazione di sopra.

La distanza, di un punto di coordinate $X\ Y$ *da una retta di equazione*

$$a x + b y + c = 0$$

è data dalla formola

$$-\frac{(a\,X+b\,Y+c)\,\mathrm{sen}\,\omega}{\sqrt{a^2+b^2-2\,a\,b\cos\omega}}.$$

dove per il segno del radicale vale l'osservazione come sopra, e tale distanza sarà positiva o negativa secondochè il punto sta, rispetto alla retta, dalla stessa parte dell'origine o da parte opposta.

Le coordinate del punto d'intersezione di due rette

$$a\,x+b\,y+c=0$$
$$a'x+b'y+c'=0$$

sono date dalle formole

$$x=\frac{b\,c'-b'c}{a\,b'-a'\,b},\qquad y=\frac{a'\,c-a\,c'}{a\,b'-a'\,b}.$$

L'angolo φ *compreso fra due rette è dato da*

$$\mathrm{sen}\,\varphi=\frac{(a\,b'-a'\,b)\,\mathrm{sen}\,\omega}{\sqrt{a^2+b^2-2\,a\,b\cos\omega}\,\sqrt{a'^2+b'^2-2\,a'\,b'\cos\omega}}$$

$$\cos\varphi=\frac{a\,a'+b\,b'-(a\,b'+a'\,b)\cos\omega}{\sqrt{a^2+b^2-2\,a\,b\cos\omega}\,\sqrt{a'^2+b'^2-2\,a'\,b'\cos\omega}}.$$

Condizione necessaria e sufficiente perchè le due rette sieno parallele è

$$a\,b'-a'\,b=0.$$

Condizione necessaria e sufficiente perchè le due rette sieno ortogonali è

$$a\,a'+b\,b'-(a\,b'+a'\,b)\cos\omega=0.$$

L'equazione della retta che passa pel punto $(x'\,y')$ ed è perpendicolare alla retta

$$a\,x + b\,y + c = 0,$$

è

$$\frac{x - x'}{a - b\cos\omega} = \frac{y - y'}{b - a\cos\omega}.$$

Condizione necessaria e sufficiente perchè tre rette di equazioni

$$\begin{aligned} a\,x + b\,y + c &= 0 \\ a'\,x + b'\,y + c' &= 0 \\ a''\,x + b''\,y + c'' &= 0 \end{aligned}$$

passino per un medesimo punto è

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0.$$

L'area del triangolo limitato dalle tre rette di cui le equazioni sono quelle soprascritte è data da

$$\frac{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}^2}{(a\,b' - a'\,b)\,(a'\,b'' - a''\,b')\,(a''\,b - a\,b'')}\,\mathrm{sen}\,\omega.$$

Ponendo $\frac{a}{c} = u$, $\frac{b}{c} = v$, l'equazione della retta diviene

$$u\,x + v\,y + 1 = 0.$$

Se in questa equazione consideriamo fisse u, v, e variabili x, y, abbiamo una relazione fra le coordinate di ogni punto di una retta; ma se invece consideriamo variabili u, v, e fisse $x\, y$, *abbiamo una relazione cui devono soddisfare le quantità* u, v *corrispondenti a qualunque retta che passi per il punto fisso di coordinate* $x\, y$. Date le quantità u, v si individua una retta; perciò esse si possono chiamare *coordinate della retta.*

Quelle rette le cui coordinate soddisfano ad una stessa equazione lineare, passano tutte per un punto.

Condizione necessaria e sufficiente perchè le tre rette di coordinate $(u\, v)$ $(u'\, v')$ $(u''\, v')$ *passino per un punto è*

$$\begin{vmatrix} u & v & 1 \\ u' & v' & 1 \\ u'' & v'' & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Le coordinate di una retta che passa per l'intersezione delle due di coordinate $(u'\, v')$ $(u''\, v'')$ *sono del tipo*

$$\frac{u' + \lambda u''}{1 + \lambda}, \qquad \frac{v' + \lambda v''}{1 + \lambda}.$$

Le rette di coordinate

$$\left(\frac{u' + \lambda u''}{1 + \lambda}, \frac{v' + \lambda v''}{1 + \lambda}\right) \quad \text{e} \quad \left(\frac{u' - \lambda u''}{1 - \lambda}, \frac{v' - \lambda v''}{1 - \lambda}\right)$$

dividono armonicamente l'angolo delle rette

$$(u'\, v')\ (u''\, v'').$$

Una relazione fra le coordinate u, v di rette, rappresenterà in generale un assieme di infinite rette tangenti ad una curva; si dice che rappresenta *un inviluppo*

L'angolo delle due rette (u, v) (u', v') *è dato dalla formola:*

$$\cos \alpha = \frac{u\,u' + v\,v'}{\sqrt{u^2 + v^2}\;\sqrt{u'^2 + v'^2}}.$$

Sono notevoli i due punti immaginari all'infinito del piano rappresentati dall'equazione (in coordinate di rette) $u^2 + v^2 = 0$. Essi si chiamano i *punti ciclici* perchè *per essi passano tutti i cerchi del piano* (v. il Cap. sulle coniche).

È notevole la seguente definizione proiettiva dell'angolo di due rette, introducendo i punti ciclici del piano:

L'angolo di due rette è eguale al prodotto di $\frac{\sqrt{-1}}{2} = \frac{i}{2}$ *per il rapporto anarmonico della quaterna formata dalle due rette date e dalle altre due rette che vanno ai due punti ciclici* (v. p. es. Clebsch-Lindemann, *Geometr.*, I).

Due sistemi piani (piani punteggiati e rigati) si dicono *omografici* o *collineari* o *proiettivi*, se fra i loro punti e le loro rette (reali) si stabilisce una corrispondenza tale che ad ogni punto corrisponda un punto P' e ad ogni retta p corrisponda una retta p', colla condizione che se P appartiene a p, anche P' appartenga a p'.

Per il caso più generale in cui si vogliano comprendere elementi reali e immaginarii, la definizione analitica per la *omografia* di due sistemi piani è la seguente: chiamate $x\,y$ le coordinate cartesiane di un punto del piano e $x'\,y'$ le coordinate del punto corrispondente del secondo, i due sistemi sono omografici se sussistono le relazioni

$$x' = \frac{a\,x + b\,y + c}{a''\,x + b''\,y + c''}, \quad y' = \frac{a'\,x + b'\,y + c'}{a''\,x + b''\,y + c''}$$

ove il determinante $(a\,b'\,c'')$ è diverso da zero.

Ovvero: chiamate u, v le coordinate di una retta del primo, e $u'\,v'$ le coordinate della retta corrispondente del secondo, i due sistemi sono omografici se sussistono relazioni del tipo

$$u' = \frac{a\,u + b\,v + c}{a''\,u + b''\,v + c''}, \quad v' = \frac{a'\,u + b'\,v + c'}{a'\,u + b''\,v + c''}.$$

Due rette punteggiate corrispondenti o due fasci di rette corrispondenti, contenuti in due sistemi piani omografici, sono sempre proiettivi.

La omografia fra due sistemi piani è determinata quando si stabilisca che ai quattro vertici di un quadrangolo nell'un piano corrispondano i quattro vertici di un quadrangolo nell'altro, ovvero ai quattro lati di un quadrilatero nell'un piano corrispondano i quattro lati di un altro quadrilatero nell'altro.

Due sistemi piani omografici si dicono *affini* quando alla retta all'infinito dell'uno corrisponde la retta all'infinito dell'altro.

Le equazioni dell'affinità sono del tipo

$$x' = a\,x + b\,y + c, \qquad y' = a'\,x + b'\,y + c'.$$

L'affinità è determinata quando si stabilisca la corrispondenza fra tre punti (non in linea retta) dell'un piano e tre punti (non in linea retta) dell'altro; ovvero fra tre rette (non di un fascio) dell'uno, e tre rette dell'altro.

Nella corrispondenza affine due punteggiate corrispondenti sono simili, e il rapporto fra le aree di due triangoli corrispondenti è costante.

Caso particolare dell'affinità è la *simiglianza*. Due sistemi piani si dicono *simili* quando gli angoli corrispondenti sono sempre eguali.

In due sistemi simili il rapporto di simiglianza fra due punteggiate corrispondenti è sempre il medesimo, e i fasci di raggi corrispondenti sono eguali.

Se i due sistemi piani omografici sono sovrapposti, si possono cercare i punti, (o le rette) che corrispondono a sè stessi *(punti uniti o doppi, rette unite o doppie).*

Esistono in generale tre punti uniti, e tre rette unite, che sono rispettivamente vertici e lati di uno stesso triangolo.

I tre punti uniti si ottengono cercando le radici t dell'equazione cubica

$$\begin{vmatrix} a-t & b & c \\ a' & b'-t & c' \\ a'' & b'' & c''-t \end{vmatrix} = 0$$

e indi cercando l'unico punto comune alle tre rette di equazioni

$$\begin{aligned} a\ x + b\ y + c &= t\,x \\ a'\,x + b'\,y + c' &= t\,y \\ a''x + b''y + c'' &= t. \end{aligned}$$

Collo scambio di x, y in u, v si ricaverebbe il procedimento per ottenere le rette unite, se la omografia è scritta in coordinate di rette.

Due sistemi piani òmografici sono *omologici* quando le congiungenti i punti corrispondenti si incontrano in un punto (centro di omologia o di prospettiva). *In tal caso le rette corrispondenti si incontrano in punti di una retta* (asse di omologia). Si potrebbe prendere anche questa seconda proprietà a fondamento della definizione, e allora la prima ne deriverebbe di conseguenza.

La omologia è una omografia nella quale esiste una retta di punti uniti (asse di omologia) e un fascio di rette unite (il cui centro è il centro di omologia).

Se in due sistemi piani omografici, tre punti di una retta hanno per corrispondenti sè stessi, i due sistemi sono omologici.

La omologia ha luogo quando il determinante

$$D = \begin{vmatrix} a - t & b & c \\ a' & b' - t & c' \\ a'' & b'' & c'' - t \end{vmatrix}$$

ha, per un certo valore di t, eguali a zero, tutti i suoi minori. Quel valore di t è allora radice

doppia o tripla dell'equazione $D = 0$; in quest'ultimo caso si ha che il centro d'omologia sta sull'asse d'omologia.

Due sistemi piani omografici (non affini) si possono sempre situare in modo da essere omologici.

Due sistemi piani omologici sono definiti dal centro, dall'asse d'omologia, e da una coppia di punti corrispondenti.

Due sistemi piani omografici e sovrapposti si deducono l'uno dall'altro mediante un numero finito di omologie, come anche mediante un numero finito di proiezioni e sezioni.

Le rette limiti (o di fuga) di due sistemi piani omologici (rette di un piano corrispondenti a quelle all'infinito dell'altro) sono parallele all'asse di omologia.

Una omologia di due sistemi piani sovrapposti si dice *armonica* o *involutoria* quando due punti (e due rette) si corrispondono in doppio modo, cioè ad un punto P corrisponde sempre un medesimo altro punto P', sia che P si immagini appartenente ad un piano, sia che si immagini appartenente all'altro, e così per due rette.

Nell'omologia involutoria, due punti corrispondenti sono separati armonicamente dal centro e dall'asse di omologia (di qui ne viene la denominazione di *armonica), e lo stesso per due rette corrispondenti.*

È importante notare che: *Una omografia (piana) in cui la corrispondenza sia involutoria (nel senso sopraindicato) è necessariamente un'omologia.*

Se l'asse di omologia si suppone all'infinito, i due sistemi piani si dicono *omotetici*. Se anche il centro va all'infinito i due sistemi si dicono *congruenti*.

Nella corrispondenza omotetica le rette limiti coincidono all'infinito.

Nell'omotetia il rapporto di due segmenti rettilinei corrispondenti è costante (rapporto di omotetia).

I sistemi omotetici sono un caso particolare dei sistemi simili.

Un caso più generale della omografia involutoria è la *omografia ciclica di ordine n* per due sistemi piani sovrapposti. Essa è tale che cercando il corrispondente A' di un punto A, indi il corrispondente di A' (considerato come appartenente al primo sistema piano) e così di seguito, dopo n operazioni si giunga di nuovo al punto A.

Adoperando coordinate omogenee per i punti del piano, e scegliendo il triangolo fondamentale coi vertici in tre punti uniti della omografia ciclica di ordine n, le equazioni di questa possono sempre ridursi alla forma

$$x'_1 = \varepsilon_1 x_1, \qquad x'_2 = \varepsilon_2 x_2, \qquad x'_3 = \varepsilon_3 x_3$$

essendo le ε *radici primitive* n^{me} *dell'unità.*

Se gli elementi (reali) di due sistemi piani, sovrapposti o no, si fanno corrispondere in modo che ai punti dell'uno corrispondono le rette dell'altro, e viceversa, e che a punti in linea retta p dell'un piano, corrispondano nell'altro rette passanti per un punto P corrispondente di p, e viceversa, allora i due piani si dicono in *corrispondenza correlativa o duale*, o *reciproca*.

Per il caso più generale in cui vogliano considerarsi elementi reali e immaginarii, la *dualità* è analiticamente definita da relazioni del tipo

$$u' = \frac{a\,x + b\,y + c}{a''\,x + b''\,y + c''}, \quad v' = \frac{a'\,x + b'\,y + c}{a''\,x + b''\,y + c''}$$

dove x, y sono coordinate di punti, e u', v' coordinate di rette, e il determinante $(a\,b'\,c'')$ è diverso da zero.

La dualità è determinata se ai quattro vertici di un quadrangolo si fanno corrispondere i quattro lati di un quadrilatero.

Due sistemi piani correlativi, ad un terzo sono omografici.

Una reciprocità o dualità per due sistemi piani sovrapposti, può essere *involutoria*, cioè tale che ad un punto corrisponda sempre la stessa retta sia che il punto si consideri come appartenente al primo sistema piano, sia che si consideri appartenente al secondo; una siffatta dualità involutoria prende il nome di *polarità.*

Il punto e la retta corrispondenti si chiamano allora rispett. *polo* e *polare.*

Quando una dualità è tale che esista un triangolo ai cui vertici, considerati come punti di uno dei due sistemi piani, corrispondano nell'altro, i lati opposti (triangolo polare, autoreciproco, autoconiugato) essa è una polarità.

In una polarità esistono infiniti triangoli polari.

Una polarità è determinata assegnando un triangolo polare (cioè avente la proprietà indicata nel precedente teorema), e dando la polare di un

punto non situato su alcun lato del triangolo stesso.

In una polarità due punti si dicono *reciproci* se l'uno sta sulla polare dell'altro. E similmente per *due rette reciproche*.

Se la polare di un punto passa per il punto stesso, il punto si dirà *punto unito*, e la sua polare si dirà *retta unita* della polarità.

Analiticamente, la polarità è definita da relazioni simili a quelle della dualità, dove però

$$a' = b, \qquad a'' = c, \qquad b'' = c'$$

Adoperando coordinate omogenee per i punti e le rette del piano, le equazioni della dualità sono

$$u_i = \sum_k a_{ik} x_k \qquad (i, k = 1, 2, 3)$$

e quelle della polarità sono queste stesse dove però $a_{ik} = a_{ki}$.

I punti uniti sono dati dalla relazione

$$\sum a_{ik} x_i x_k = 0$$

(che corrisponde ad una conica).

Se il triangolo fondamentale delle coordinate è polare, questa espressione diventa del tipo

$$\sum a_{ik} x_i^2 = 0.$$

In quanto alla geometria delle altre due forme fondamentali di 2.ª specie cioè la stella di rette e la stella di piani, non crediamo necessario estenderci su essa, e solo osserviamo che le proprietà della stella possono ricavarsi da quelle del sistema

piano, immaginando proiettato questo da un punto situato fuori di esso. Le definizioni di *stelle omografiche* o *proiettive*, *stelle correlative o reciproche*, ecc. e le proprietà fondamentali di tali corrispondenze sono le analoghe a quelle pei sistemi piani.

§ 4. — Geometria delle forme fondamentali di 3.ª specie.

Lo spazio di punti e di piani.

Fra i tetraedri aventi per vertici quattro di 6 punti dati A, B, C, D, E, F dello spazio, sussiste la relazione:

$$ABEF.CDEF + BCEF.ADEF + \\ + CAEF.BDEF = 0;$$

per sette punti si ha

$$ABCG.DEFG + ACDG.BEFG + \\ + ADBG.CEFG = BCDG.AEFG;$$

e per otto punti si ha infine

$$BCDE.AFGH + ACED.BFGH + ADEB.CFGH + \\ + ABEC.DFGH + ABCD.EFGH = 0$$

(Monge, Möbius).

Indicando con δ_{12}, δ_{13} ... le mutue distanze fra

cinque punti dello spazio si ha

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \delta_{51}^2 & \delta_{52}^2 & \delta_{53}^4 & \delta_{54}^2 \\ 1 & \delta_{15}^2 & 0 & \delta_{12}^2 & \delta_{13}^2 & \delta_{14}^2 \\ 1 & \delta_{25}^2 & \delta_{21}^2 & 0 & \delta_{23}^2 & \delta_{24}^2 \\ 1 & \delta_{35}^2 & \delta_{31}^2 & \delta_{32}^2 & 0 & \delta_{34}^2 \\ 1 & \delta_{45}^2 & \delta_{41}^2 & \delta_{42}^2 & \delta_{43}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Questa relazione è di LAGRANGE (*Mém. de Berlin*, 1773), il quale la presentò sotto altra forma. Indi se ne occuparono CARNOT in un lavoro speciale (Paris, 1806) e CAYLEY che le dette la forma di determinante (*Camb. math. J.* II).

Di queste relazioni, insieme alle analoghe per la retta e il piano, si sono anche occupati SCHERING (*Gött. Nach.*, 1870), D'OVIDIO (*Giorn. di Batt.*, XI), e più recentemente DE TILLY (*Mém. de Belg.*, 1893) e MANSION (*Société scient. de Bruxelles*, 1895).

Supponiamo nello spazio segnate tre rette *(assi coordinati)* concorrenti in un punto *O (origine).* Le tre rette determineranno tre piani *(piani coordinati)*, e per ogni punto *P* dello spazio passeranno tre altri piani rispettivamente paralleli ai tre primi.

Considerando le intersezioni di questi cogli assi coordinati, si hanno, su questi, tre punti che possono considerarsi proiezioni del punto dato dello spazio; ad ogni punto dello spazio corrispondono

così tre punti proiezioni, ciascuno in ciascuna delle tre rette date; epperò se in ciascuna di queste stabiliamo un sistema di coordinate per la determinazione dei proprii punti, *le tre coordinate delle tre proiezioni di P potranno assumersi come coordinate di P.* Si ha così il sistema di coordinate che si suol chiamare *cartesiano.*

Il caso più comune è che le coordinate sulle tre rette punteggiate sieno coordinate cartesiane coll'origine comune O, e calcolate colla medesima unità di misura.

Se i tre assi sono ortogonali a due a due, il sistema di coordinate si dice *ortogonale.*

Supponiamo dato un punto O *(polo)*, una retta per esso *(asse polare)* e un piano per questa *(piano polare).*

Ogni punto P dello spazio può essere determinato quando ne sia assegnata la distanza ρ da O, l'angolo θ che la retta OP fa coll'asse polare, e l'angolo φ che misura il diedro compreso fra il piano polare e il piano di P e della retta polare.

I tre numeri ρ, θ, φ possono prendersi come coordinate di P; si ha così il *sistema di coordinate polari.* Si può stabilire che ρ debba essere una quantità sempre positiva, e θ debba essere sempre compreso fra 0 e π, mentre φ debba estendersi fra 0 e 2π.

Ponendo le tre coordinate di un punto dello spazio sotto la forma

$$x = \frac{x_1}{x_4}, \quad y = \frac{x_2}{x_4}, \quad z = \frac{x_3}{x_4}$$

le quantità $x_1\, x_2\, x_3\, x_4$ si dicono *coordinate omogenee.*

Fra i sistemi di queste è notevole quello delle *coordinate quadriplanari o tetrametriche.*

Diamo quattro piani dello spazio formanti un *tetraedro (fondamentale).* Sieno p, q, r, s le distanze di un punto P dai quattro piani, e a, b, c, d, quattro costanti; poniamo $x_1\, x_2\, x_3\, x_4$ proporzionali a

$$\frac{p}{a}, \quad \frac{q}{b}, \quad \frac{r}{c}, \quad \frac{s}{d}.$$

I quattro vertici del tetraedro si chiamano *punti fondamentali*, e i quattro piani, *piani fondamentali.* Il punto U di cui tutte le coordinate sono eguali, cioè il punto di cui le distanze dalle quattre facce sono proporzionali ad a, b, c, d, si dice *punto unità.*

Similmente come al § 3 si riconosce che *i rapporti di due qualunque di tali coordinate omogenee sono eguali ai doppi rapporti dei quattro piani di un fascio, che ha per asse uno degli spigoli del tetraedro, e di cui i quattro piani sono: le due facce del tetraedro che passano per quello spigolo, il piano passante per U, e quello passante per P.*

Le coordinate così definite sono dunque *coordinate proiettive.*

Se uno dei piani del tetraedro va all' infinito, il sistema tetrametrico si riduce al sistema cartesiano, come al § 3.

Come pel piano, il primo problema che ci si presenta è quello cosiddetto della *trasformazione*

delle coordinate, cioè la ricerca delle formole mediante le quali le coordinate in un certo sistema si esprimono mediante quelle in un altro sistema.

Se i due sistemi sono ambedue cartesiani le relazioni sono le seguenti:

$$x = \frac{X\cos(Xx') + Y\cos(Yx') + Z\cos(Zx')}{\cos(xx')} + a$$

$$y = \frac{X\cos(Xy') + Y\cos(Yy') + Z\cos(Zy')}{\cos(yy')} + b$$

$$z = \frac{X\cos(Xz') + Y\cos(Yz') + Z\cos(Zz')}{\cos(zz')} + c$$

dove $(x\,y\,z)$ $(X\,Y\,Z)$ *sono le coordinate di un medesimo punto nell'uno e nell'altro sistema,* $(a\,b\,c)$ *sono le coordinate dell'origine del 2.° sistema rispetto al 1.°,* $x'\,y'\,z'$ *rappresentano le rette normali ai piani* $y\,z$, $z\,x$, $x\,y$, *e*

$$\cos(x\,x)\ldots\cos(X\,x')\ldots$$

rappresentano i coseni degli angoli formati dalle rette x, x', *ovvero* X *e* x', *etc.*

Per sistemi ortogonali le formole diventano più semplici:

$$x = a + X\cos(Xx) + Y\cos(Yx) + Z\cos(Zx)$$
$$y = b + X\cos(Xy) + Y\cos(Yy) + Z\cos(Zy)$$
$$z = c + X\cos(Xz) + Y\cos(Yz) + Z\cos(Zz).$$

In questo caso fra i nove coseni $\cos(Xx)\ldots$ *sussistono varie relazioni, cioè*

$$\cos^2(Xx) + \cos^2(Xy) + \cos^2(Xz) = 1$$

e le altre cinque che si ricavano da questa collo scambio di X in Y o Z, ovvero collo scambio nelle tre così ottenute di $x\,y\,z$ in $X\,Y\,Z$;

$$\cos(Yx)\cos(Zx) + \cos(Yy)\cos(Zy) + \\ + \cos(Yz)\cos(Zz) = 0$$

e le altre due che si ricavano permutando circolarmente X, Y, Z, insieme alle altre tre che si ottengono da quelle così ottenute scambiando $x\,y\,z$ con $X\,Y\,Z$.

Si hanno in tutto 13 relazioni, delle quali solo 6 sono indipendenti.

Le formole colle quali le coordinate polari si esprimono per le cartesiane ortogonali o viceversa sono le seguenti: supponiamo che l'origine delle coordinate cartesiane ortogonali coincida col polo del sistema di coordinate polari, e che l'asse polare coincida coll'asse di z, mentre il piano polare coincida col piano $x\,z$. *Si hanno allora le formole*

$$x = \rho \operatorname{sen} \theta \cos \varphi \qquad \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$y = \rho \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi \qquad \cos \theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$z = \rho \cos \theta \qquad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}.$$

Nel sistema di coordinate cartesiane, se $(x_1\,y_1\,z_1)$ $(x_2\,y_2\,z_2)$ $(x_3\,y_3\,z_3)$ sono le coordinate di tre punti, le condizioni perchè i tre punti sieno in linea retta sono

$$\frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_3} = \frac{y_1 - y_2}{y_1 - y_3} = \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3};$$

le stesse condizioni possono essere espresse dall'annullarsi dei determinanti della matrice

$$\left\|\begin{matrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{matrix}\right\| .*$$

La distanza di un punto di coord. $(x\,y\,z)$ dall'origine delle coordinate è data dalla formola

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2\,x\,y \cos(x\,y) + 2\,y\,z \cos(y\,z) + \\ + 2\,z\,x \cos(z\,x)$$

Fra i coseni degli angoli che una retta r fa coi tre assi sussiste la relazione

$$\left|\begin{matrix} 1 & \cos(r\,x) & \cos(r\,y) & \cos(r\,z) \\ \cos(x\,r) & 1 & \cos(x\,y) & \cos(x\,z) \\ \cos(y\,r) & \cos(y\,x) & 1 & \cos(y\,z) \\ \cos(z\,r) & \cos(z\,x) & \cos(z\,y) & 1 \end{matrix}\right| = 0.$$

Per assi ortogonali si ha semplicemente

$$\cos^2(r\,x) + \cos^2(r\,y) + \cos^2(r\,z) = 1.$$

Per assi ortogonali l'angolo di due rette $r\,r'$ è dato dalle formole

$$\cos(r\,r') = \cos(x\,r)\cos(x\,r') + \cos(y\,r)\cos(y\,r') + \\ + \cos(z\,r)\cos(z\,r')$$

$$\operatorname{sen}^2(r\,r') = \left\|\begin{matrix} \cos(x\,r) & \cos(y\,r) & \cos(z\,r) \\ \cos(x\,r') & \cos(y\,r') & \cos(z\,r') \end{matrix}\right\|^2$$

* Basta che se ne annullino due.

L'area A del triangolo formato da tre punti di coordinate $(x_1\,y_1\,z_1)$ $(x_2\,y_2\,z_2)$ $(x_3\,y_3\,z_3)$ *è data dalla formola (coord. rettang.)*

$$4\,A^2 = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}^2 .$$

Il volume V del tetraedro formato da quattro punti è dato, in valore assoluto, dalla formola (in coord. cartesiane qualunque)

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & \cos(x\,y) & \cos(x\,z) \\ \cos(y\,x) & 1 & \cos(y\,z) \\ \cos(z\,x) & \cos(z\,y) & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} .$$

Per assi ortogonali il primo determinante diventa eguale ad 1.

Le coordinate cartesiane $x\,y\,z$ *del punto di un piano soddisfanno ad un'equazione di 1.° grado del tipo*

$$a\,x + b\,y + c\,z + d = 0 \quad \textit{(equaz. del piano)}$$

e ogni siffatta equazione rappresenta un piano.

La condizione necessaria e sufficiente perchè quattro punti sieno in un piano è

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

dove i tre primi elementi di ciascuna linea sono le coordinate cartesiane dei quattro punti.

Il piano che passa per i tre punti di coord.

$$(x_1 y_1 z_1)\ (x_2 y_2 z_2)\ (x_3 y_3 z_3)$$

è dato dalla stessa equazione precedente, dove $(x\,y\,z)$ *si suppongono le coordinate di un punto indeterminato del piano (coord. correnti).*

La equazione $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1$ *è quella del piano che determina sugli assi i segmenti* $p\,q\,r$, *a contare dall' origine.*

Due piani

$$ax + by + cz + d = 0, \quad a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

sono paralleli allora e allora solo che

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

Una retta nello spazio è individuata da due equazioni che sono quelle di due piani che passano per essa.

Tre piani appartengono ad un fascio cioè hanno in comune una retta, quando si annullano i determinanti di 3.° ord. della matrice

$$\left\| \begin{matrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{matrix} \right\|$$

(basta che se ne annullino due).

Quattro piani passano per un punto quando si annulla il determinante di 4.° ordine dei 16 coefficienti delle equazioni dei quattro piani.

Indicando con $\alpha\ \beta\ \gamma$ *gli angoli che la retta perpendicolare al piano fa cogli assi, e con* ρ *la distanza dell'origine dal piano, l'equazione di questo può scriversi (forma normale)*

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - \rho = 0.$$

Per assi ortogonali, l'equazione generale di un piano, si riduce a forma normale, moltiplicandola per

$$\frac{1}{\pm \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

dove il radicale va preso col segno contrario a quello del termine noto dell'equazione.

La distanza di un punto X Y Z da un piano si calcola ponendo nel primo membro (cambiato di segno) dell'equazione normale del piano, in luogo delle coordinate correnti, quelle del punto.

L'angolo α *di due piani per assi ortogonali è dato da*

$$\cos \alpha = \frac{a a' + bb' + c c'}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\ \sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}$$

$$\operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{\left\| \begin{matrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{matrix} \right\|^2}{(a^2 + b^2 + c^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2)}.$$

La condizione di ortogonalità di due piani (per assi ortogonali) è:

$$a a' + b b' + c c' = 0.$$

Ponendo l'equazione del piano sotto la forma

$$u x + v y + w z + 1 = 0$$

i coefficienti $u\, v\, w$ possono assumersi come *coordinate del piano.*

Possono allora farsi considerazioni simili a quelle relative alle coordinate di rette nel piano, ma su ciò non ci dilungheremo.

Due spazi (a tre dimensioni) sono *omografici o collineari o proiettivi* se si corrispondono in modo che ad ogni punto e piano (reali) dell'uno corrispondono un punto e piano dell'altro colla condizione che se nel primo spazio il punto appartiene al piano, anche il punto corrispondente appartenga al piano corrispondente; in altri termini se nel primo spazio un punto si muova in un piano, il punto corrispondente nel secondo spazio si muova anche in un piano e questo sia il corrispondente al primo piano.

Le definizioni analitiche (che includono la precedente, e si estendono poi anche al caso di elementi immaginarii) per due spazi omografici sono le seguenti: se $x\, y\, z$ e $x'\, y'\, z'$ sono le coordinate dei punti corrispondenti nei due spazi, questi si diranno *omografici* se sussistono le relazioni

$$x' = \frac{a x + b y + c z + d}{a''' x + b''' y + c''' z + d'''}$$

$$y' = \frac{a' x + b' y + c' z + d'}{a''' x + b''' y + c''' z + d'''}$$

$$z' = \frac{a'' x + b'' y + c'' z + d''}{a''' x + b''' y + c''' z + d'''}.$$

dove il determinante $(a\, b'\, c''\, d''')$ sia diverso da zero.

Ovvero: se $u\, v\, w$, $u'\, v'\, w'$ sono le coordinate di due piani corrispondenti nei due spazi, fra esse sussistano relazioni lineari analoghe alle soprascritte.

Vi sono in generale quattro piani uniti (cioè punti e piani che corrispondono a sè stessi).

La omografia fra due spazi è determinata stabilendo la corrispondenza fra i quattro vertici (o le quattro facce) di un tetraedro nell'uno, e i vertici (o le facce) di un tetraedro nell'altro, e un piano dell'uno spazio, non passante per alcuno dei quattro punti (o un punto non situato in alcuna delle quattro facce) con un piano dell'altro, non passante per alcuno dei quattro punti corrispondenti (ovvero con un punto non situato in alcuna delle quattro facce corrispondenti).

Se i piani all'infinito dei due spazi si corrispondono allora la omografia diventa *affinità*.

L'affinità di due spazi è determinata assegnando la corrispondenza fra quattro facce (o vertici) di un tetraedro nell'uno con quattro facce (o vertici) di un tetraedro nell'altro.

In due spazi affini, due punteggiate corrispondenti sono simili, e due piani corrispondenti sono affini.

In due spazi affini le distanze di due punti corrispondenti, da due piani fissi, hanno un rapporto costante.

In due spazi affini i volumi di due corpi corrispondenti stanno in un rapporto costante.

Caso particolare dell'affinità è la *simiglianza.* Due spazi si dicono *simili* se gli angoli corrispondenti sono sempre eguali. *In due spazi simili due sistemi piani corrispondenti sono anche simili* (v. § 3).

Due spazi omografici che contengono una stella di elementi uniti, ovvero un sistema piano di elementi uniti *(l'una cosa è conseguenza dell'altra)*, si dicono *omologici;* il centro della stella si dice *centro d'omologia*, e il piano si dice *piano d'omologia.* Se la corrispondenza fra i due spazi è involutoria si ha al solito la *omologia involutoria o armonica.*

Due spazi omologici sono definiti mediante il centro, il piano d'omologia e la corrispondenza fra due punti (necessariamente allineati col centro di omologia, e di cui nessuno coincida con esso).

Se il centro va all' infinito, si ha l'*omologia affine;* se, invece il piano d'omologia va all'infinito si ha l'*omotetia. L'omotetia è un caso particolare della similitudine. Due spazi simili possono sempre situarsi in posizione omotetica.*

È da notarsi anche la *omografia assiale* la quale ha per punti uniti tutti quelli di due rette sghembe (le quali saranno anche inviluppi di piani uniti). *Nella omografia assiale due punti corrispondenti stanno sempre su di una retta che incontra ambedue le rette dei punti uniti, in due punti aventi coi primi un rapporto anarmonico costante. Una siffatta omografia è involutoria se tale quaterna di punti è armonica.*

Ogni omografia spaziale involutoria può essere o un'omologia involutoria o un'omografia assiale involutoria.

Caso più generale della omografia involutoria è anche qui la *omografia ciclica d'ordine n* per la quale vale la analoga definizione del § preced.

Fra i punti e i piani di uno spazio e i piani e punti di un altro può immaginarsi una corrispondenza biunivoca simile a quella di cui abbiamo trattato nel § 3, e che si chiama *dualità o correlatività o reciprocità.*

In coordinate omogenee di punti e piani, le equazioni della dualità spaziale sono

$$u'_i = \sum_k a_{ik} x_k \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4).$$

La dualità è involutoria in due casi; cioè quando $a_{ik} = a_{ki}$, *e quando* $a_{ik} = - a_{ki}$, *donde* $a_{ii} = 0$; nel primo caso si chiama *polarità ordinaria* e nel secondo *polarità nulla o sistema nullo.*

Nella polarità ordinaria il luogo dei punti uniti è una quadrica (v. Cap. V).

In una polarità nulla ogni punto sta nel piano ad esso corrispondente, e ogni piano passa per il proprio polo; e l'assieme delle rette unite è un complesso lineare (v. Cap. XIV, § 3).

Delle *polarità nulle*, o *sistemi nulli* si occuparono prima Giorgini (*Mem. della Soc. it. delle scienze*, XX, 1827), indi Möbius, Chasles, v. Staudt, ecc. (v. Cap. X, § 2).

È utile ora fare cenno delle cosiddette *antiproiettività di* Segre.

Sieno x_i le coordinate omogenee dei punti (reali o complessi) di uno spazio (a 2 o a 3 dimensioni) e similmente sieno u_i le coordinate omogenee dell'elemento duale al punto in quello spazio (cioè della retta o del piano secondochè lo spazio è a due o tre dimensioni); indichiamo con $\overline{x_i}$, $\overline{u_i}$ le *quantità complesse coniugate* di x_i, u_i.

Poniamo allora in luogo delle relazioni solite della omografia e della dualità, le altre:

$$x'_i = \sum_k a_{ik} \overline{x_k}$$

$$u'_i = \sum_k a_{ik} \overline{x_k}.$$

Con queste formole restano stabilite due corrispondenze biunivoche fra gli elementi (x, x', *ovvero* x, u', *di due spazi. Per la prima a punti di una retta o di un piano corrispondono anche (come nelle omografie) punti di una retta o di un piano; e per la seconda a punti di una retta o di un piano corrispondono rette o piani di un fascio ovvero piani di una stella (come nelle dualità).*

Queste corrispondenze si chiamano rispett. *anticollineazione* (o *antiproiettività)* e *antidualità.*

Per esse si conserva la proprietà che ad elementi armonici corrispondono elementi armonici.

Se queste corrispondenze sono involutorie si hanno le *antiinvoluzioni*, e le *antipolarità.*

La considerazione degli elementi uniti di una antipolarità porta alle cosiddette *iperconiche* e *iperquadriche* rappresentate da un'equazione del

tipo

$$\Sigma a_{ik} x_i \overline{x_k} = 0$$

dove sia $a_{ik} = \overline{a_{ki}}$.

Su queste corrispondenze si possono vedere le quattro note di SEGRE (*Un nuovo campo di ricerche geometriche.* Atti di Torino, 1890), e *Math. Ann.*, XL.)

La prima geometria analitica si può dire essere stata la *Geometria* di DESCARTES comparsa per la prima volta nel 1637; indi comparsa in altre edizioni colle note di DE BEAUNE, e di SCHOOTEN.

In questo libro si introduce in modo sistematico e per la prima volta, il concetto di coordinate nel piano, mentre il concetto di coordinate nella retta punteggiata si può dire che era stato già introdotto da VIETE (1540-1603). Le coordinate baricentriche furono introdotte da MÖBIUS (*Der barycentr. Calcül*, 1827); le proiettive da STAUDT (*Beiträge*, 1858) e da FIEDLER (*Darst. Geom.*), e le coordinate *omogenee* furono estesamente studiate da MÖBIUS, PLÜCKER ed HESSE.

Il concetto di *doppio rapporto* si trova in MÖBIUS (che lo chiamò *rapporto di doppia sezione*) e in CHASLES che lo chiamò *rapporto anarmonico.* Alcuni ora lo chiamano anche *birapporto* (SEGRE). Altre ricerche su esso furono fatte da STEINER, e da STAUDT che lo definì indipendentemente da concetti di grandezze.

Il principio di omologia fu applicato da PONCELET, quello di omografia da MÖBIUS, STEINER,

Chasles, e quello di dualità si deve specialmente a Gergonne (*Ann. des math.*, 1827), Chasles e Plücker.

L'*involuzione* di punti fu studiata (senza contare i geometri greci) fra i moderni per la prima volta da Desargues (1593-1662) a cui si deve anche la denominazione.

La *Geometria proiettiva*, cioè quella che tratta delle proprietà proiettive delle figure, si compose in scienza verso la prima metà di questo secolo. I primi trattati importanti possono ritenersi quelli di Poncelet (*Traité des propr. project. des figures.* Paris, 1822), Steiner (*System. Entwick. der Abhängigkeit geom. Gestalten von einander*, *etc.* Berlin, 1832), Staudt, (*Geom. der Lage.* Nürnberg, 1847), Chasles (*Géom. supér.* Paris, 1852; *Sect. coniq.* Paris, 1865). Fra i più moderni noteremo quello del Cremona (*Elementi di Geometria proiettiva.* 1873), tradotto in varie lingue, l'opera di Reye (*Die Geom. der Lage*, 1877-1880), di Pasch (*Neuere Geom.* 1882), di Weyr (*Project. Geom.* Wien, 1883-87) e le più recenti di Sannia (Napoli, 1891, 1894) e di Enriques (Bologna, 1898).

A queste opere potrebbero aggiungersi quelle di *Geometria Descrittiva*, le quali trattano anche della Proiettiva, per es. le reputate opere di Fiedler (*Darst. Geom.* Leipzig, 1883-88), e di Wiener (*Lehrbuch der Darst. Geom.* Leipzig, 1884). È importante notare che la geometria proiettiva ha preso varii nomi secondo i diversi autori; così fu chiamata *Nuova geometria o geometria superiore* da Chasles, *Geometria di posizione o di situazione (Geom. der Lage)* da Carnot, Cayley,

v. Staudt, Gergonne, etc.; *Geometria proiettiva* da Cremona, Klein, etc.

Assai affine alla Geometria Proiettiva è la cosiddetta *Geometria Descrittiva* il cui scopo è la rappresentazione su di un piano, mediante proiezioni centrali o parallele ortogonali, delle figure solide, e lo studio delle proprietà di tale rappresentazione.

Si deve a Monge (1795) il primo trattato sistematico di geometria descrittiva, la quale si sviluppò appunto nel principio di questo secolo per opera di Monge, Lacroix, Olivier, Hachette, Dupin. Per la storia dettagliata della geometria descrittiva si vegga il primo capitolo della opera (cit.) di Wiener, e un recente libro di Obenrauch (*Gesch. der darst. und proiect. Geom.* Brünn, 1897).

Fra i concetti che hanno servito a dare la maggiore unità, semplicità, e generalità ai risultati geometrici, ed evitare inutili classificazioni di casi di eccezione, sono da annoverarsi quello degli *elementi all'infinito*, e quello degli *elementi immaginarii.* Il primo di essi risale sino a Desargues; il secondo è venuto come conseguenza dell'applicazione dell'analisi alla geometria.

Vari Autori hanno cercato di introdurre quest'ultimo concetto nella geometria pura, e introdurlo, si intende, indipendentemente da concetti analitici. Per ciò fare possono servire le *involuzioni ellittiche* i cui punti uniti, come si sa, sono immaginari, e di cui le coppie di punti reali possono servire perciò ad una definizione di una coppia di punti immaginari. Considerazioni di questo

genere furono fatte principalmente da STAUDT; i trattati moderni di geometria proiettiva (per es. quello sopracitato del SANNIA) sviluppano dettagliatamente questi concetti.

Fra i trattati di *geometria analitica* citeremo quello conosciutissimo del SALMON, di cui si son fatte parecchie edizioni e traduzioni, quello di BALTZER (Leipzig, 1882), quelli vari di HESSE (Leipzig, 1866-76) e quello di D'OVIDIO (Torino, 1885, 1895).

———

CAPITOLO II.

Geometria delle forme discontinue.

§ 1. — Generalità.

Le forme che consideremo in questo capitolo sono figure composte di punti, rette, piani, in numero finito; esse si sogliono chiamare *forme discontinue* in opposizione alle altre che abbiamo studiate nel Cap. I, perchè evidentemente non si può passare con continuità da un loro elemento ad un altro elemento, passando sempre per elementi della stessa specie tutti contenuti nella forma.

Un gruppo di un numero finito di punti di una punteggiata o di un piano o di uno spazio o un gruppo di un numero finito di rette o di piani di un fascio, ecc. sono *forme discontinue.* Oltre queste vi sono poi le seguenti altre:

Ennagono piano completo è il sistema di n punti *(vertici)* di un piano, tre dei quali non sono mai per diritto, insieme alle $\frac{n(n-1)}{2}$ rette *(lati)* che li uniscono a due a due.

L'intersezione di due lati non passanti ambedue per uno degli n punti si dice *punto diagonale.*

Il loro numero è $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8}$.

Ennilatero piano completo è il sistema di n rette *(lati)* di un piano, tre delle quali non concorrono mai in un punto, insieme agli $\frac{n(n-1)}{2}$ punti *(vertici)* secondo cui si segano a due a due. La retta che congiunge due vertici non situati sullo stesso lato si dice *retta diagonale.*

Il loro numero è $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8}$.

L'*ennagono* o *ennilatero piano semplice* è il sistema di n punti di un piano considerati in un dato ordine circolare, insieme alle n rette che congiungono ogni punto col successivo.

Proiettando l'ennagono piano completo da un punto fuori del suo piano si ha l'*angolo ennispigolo completo,* e proiettando l'ennilatero da un punto fuori del suo piano, si ha l'*angolo ennaedro completo.*

Ennagono gobbo completo è il sistema di n punti, di cui quattro mai situati in un piano, insieme alle $\frac{n(n-1)}{2}$ rette che li congiungono a due a due e agli

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}$$

piani *(facce)* che li congiungono a tre a tre.

Ennaedro completo è la figura correlativa a questa, cioè il sistema di n piani, di cui mai quattro

passanti per un punto, insieme a tutte le loro rette e punti d'intersezione.

Due ennagoni piani completi riferiti fra loro si dicono *prospettivi* se le congiungenti i vertici corrispondenti concorrono in uno stesso punto, e si dicono anche *omologici* se inoltre i lati corrispondenti si segano in punti di una stessa retta *(asse di omologia)*.

Due ennilateri piani corrispondenti riferiti fra loro si dicono *prospettivi* se i lati corrispondenti concorrono in punti di una stessa retta, e si dicono anche *omologici* se inoltre le congiungenti i vertici corrispondenti concorrono in uno stesso punto *(centro di omologia)*.

Analoghe definizioni possono darsi per due angoli ennaedri e due ennispigoli.

Due ennagoni gobbi completi, riferiti fra loro, si dicono *prospettivi* se le rette congiungenti i vertici corrispondenti concorrono in uno stesso punto e si dicono poi *omologici*, se inoltre le facce corrispondenti si segano in rette di uno stesso piano *(piano d'omologia)*.

Due ennagoni si dicono *proiettivi* se l'uno può dedursi dall'altro mediante un numero finito di proiezioni e sezioni.

Due ennagoni prospettivi situati in piani diversi sono necessariamente omologici. Analogo teor. per due ennaedri prospettivi con centri diversi.

Due triangoli, o due trilateri, o due triedri, o due trispigoli prospettivi sono anche omologici.

Due quadrangoli piani sono sempre proiettivi.

Due quadrangoli gobbi completi prospettivi sono anche omologici.

Se in due ennagoni completi

$$A_1 A_2 \ldots A_n, \quad A'_1 A'_2 \ldots A'_n,$$

riferiti fra loro e situati in uno stesso piano o in piani diversi, un lato $A_1 A_2$ del primo e tutti gli altri $2n-4$ lati che passano per A_1 o A_2, concorrono coi lati corrispondenti dell'altro ennagono in altrettanti punti di una retta s, i due ennagoni sono omologici; ed indicando con S il centro di omologia, due punti diagonali corrispondenti qualunque P, P' dei due ennagoni sono allineati con S.

Analogo teor. per due *ennilateri piani completi*, due *angoli ennaedri completi*, e due *angoli ennispigoli completi.*

Le definizioni di questo paragrafo provengono in gran parte da Steiner (*Op.* I, 288-396).

§ 2. — Proprietà proiettive delle coppie, terne, quaterne di punti su di una retta. Centri armonici. Apolarità. Involuzioni.

Un gruppo di n punti su di una retta può essere analiticamente rappresentato dalle radici di una forma binaria di ordine n. Lo studio degli invarianti e covarianti di tale forma, conduce alla ricerca di speciali proprietà invariantive, o, altrimenti, proiettive del gruppo di punti.

Per i valori $n = 2, 3, 4, \ldots$ abbiamo nel volume I, Cap. XII indicati i risultati che si ottengono dal punto di vista della teoria analitica delle

forme. Ora riferiamo i risultati geometrici che corrispondono a quelli analitici allora ottenuti, e perciò intenderemo che si abbiano presenti quei risultati e quelle notazioni e denominazioni.

(Polarità.) Data una forma a_x^n, possiamo formare le polari $a_x^{n-1} a_y, a_x^{n-2} a_y^2, \ldots$ e considerare i i punti radici di queste forme eguagliate a zero, quando si supponga che y sia un punto assegnato. Questi gruppi di punti si chiamano rispettivamente il 1.°, 2.°, ... *gruppo polare di y*. Alcuni li chiamano anche *gruppi armonici di y* ovvero *centri armonici* di $n-1^{mo}$, $n-2^{mo}$ ... *grado*. (Jonquieres, *J. de Liouville*, 1851.) L'ultimo gruppo polare è formato di un punto solo che Poncelet chiamò *centro delle medie armoniche* (*Crelle*, III). Se il polo va all'infinito il centro delle medie armoniche diventa il *centro delle medie distanze* che ha la proprietà che *la somma algebrica delle distanze di esso dagli n punti è zero.*

Indichiamo ora alcune delle fondamentali proprietà dei *centri armonici* o, altrimenti detti, dei *sistemi polari.*

Se M è un centro armonico di grado r di un dato sistema di n punti rispetto al polo O, viceversa O è un centro armonico di grado n — r del medesimo sistema rispetto al polo M.

Se $M_1 M_2 \ldots M_r$ *sono i centri armonici di grado r rispetto ad un polo O di un sistema di n punti, i centri armonici di grado s* ($s < r$) *del sistema* $M_1 \ldots M_r$ *rispetto al polo O sono anche i centri armonici di grado s del sistema dato rispetto allo stesso polo O.*

Se $M_1 \dots M_r$ sono i centri armonici di grado r rispetto ad un polo O_r, e $N_1 \dots N_s$ sono quelli di grado s rispetto ad un polo O_s, i centri armonici di grado $r + s - n$ del sistema $M_1 \dots M_r$ rispetto al polo O_s coincidono coi centri armonici di grado $r + s - n$ del sistema $N_1 \dots N_s$ rispetto al polo O_r.

Se A_1 è il centro armonico di 1.° grado del sistema $A_2 A_3 \dots A_n$ rispetto ad un polo O, esso è anche il centro armonico di 1.° grado del sistema $A_1 A_2 A_3 \dots A_n$ rispetto allo stesso polo.

Se nel sistema $A_1 \dots A_n$, r punti coincidono in uno solo, in questo punto coincideranno $r - p$ centri armonici di grado $n - p$ rispetto ad un polo qualsiasi.

I centri armonici di grado r rispetto ad un punto s^{plo} del sistema dato, preso come polo, si compongono di questo punto contato s volte e dei centri armonici di grado $r - s$ degli altri $n - s$ punti del sistema dato rispetto allo stesso punto.

Se nel sistema dato s punti coincidono in uno, i centri armonici di grado $r < s$ rispetto a questo preso come polo, sono indeterminati.

Le proprietà dei centri armonici sono proiettive.

Se $a_x{}^n$ (in notazione simbolica) è la forma binaria che eguagliata a zero dà il gruppo di n punti, la forma $H = (a\, b)^2\, a_x^{n-2}\, b_x^{n-2}$ (dove a, b sono coefficienti simbolici equivalenti) rappresenta il così detto *Hessiano* del gruppo dato. Ora si ha il teorema:

Esiste una forma di grado $2\, n - 4$ i cui punti nulli (gruppo Steineriano) sono quelli i cui gruppi di centri armonici di $n - 1^{mo}$ ordine hanno dei

punti doppi, i quali sono dati poi dai punti nulli dell' Hessiano $H = 0$. *Questa forma di grado*

$$2n - 4$$

è data eliminando z fra

$$a_x a_z^{n-2} a_1 = 0$$

e

$$b_x b_z^{n-2} b_2 = 0.$$

Vi sono $3n - 6$ *poli di cui i gruppi di centri armonici di* $n - 1^{mo}$ *ordine rispetto alla forma data e di* $2n - s^{mo}$ *ordine rispetto alla forma Hessiana, hanno un punto comune. — I punti comuni sono dati da (nelle solite notazioni del calcolo simbolico):*

$$T = (a\,b)\,(b\,c)^2\, a_x^{n-1}\, b_x^{n-2}\, c_x^{n-3}.$$

L'annullarsi identico della forma Hessiana è condizione necessaria e sufficiente perchè gli n punti del gruppo dato coincidano in uno solo.

(Apolarità.) — Una teoria interessante è quella dell'*apolarità*. Diremo che una forma binaria di ordine n, a_x^n, o un gruppo di n punti, è *apolare* con quella i cui punti sieno $y\,z\,t\ldots$ (in numero di n) quando la polare

$$a_y\, a_z\, a_t \ldots$$

è zero. Le due forme apolari sono allora a_x^n e

$$(x\,y)\,(x\,z)\,(x\,t)\ldots$$

Questo concetto si trova prima in BATTAGLINI (*Accad. Napoli*, 1864-68) il quale lo estese anche alle forme ternarie; indi fu svolto e felicemente applicato da ROSANES (*Crelle*, LXXV, LXXVI, *Math. Ann.*, VI) e da REYE (*Math. Ann.*, IV), il quale ultimo introdusse il nome di *apolarità;* il BATTAGLINI aveva chiamato le due forme *coniugate armoniche* considerando l'apolarità come generalizzazione dell'armonia ordinaria, cui infatti essa si riduce per $n = 2$.

La condizione per l'apolarità delle due forme $a_x{}^n$, $b_x{}^n$ *è* $(a\,b)^n = 0$.

Ogni forma binaria di grado dispari è apolare con sè stessa, ed ogni forma binaria di grado pari lo è, se è zero l'invariante bilineare $(a\,a')^n$, *che perciò si chiama* ARMONIZZANTE (BATTAGLINI, loc. cit.) Il risultato più importante nella teoria dell'apolarità è il seguente dovuto a ROSANES (loc. citato):

L'apolarità di due forme binarie di ordine n è condizione necessaria e sufficiente perchè una delle forme sia esprimibile linearmente mediante le n.me potenze dei fattori lineari dell'altra (forma canonica).

Date n forme binarie di ordine n, esse possono rappresentarsi con combinazioni lineari di potenze $n$me di n forme lineari, il cui prodotto è una forma apolare con tutte le n date.

Queste ricerche sull'apolarità di forme si estendono al caso di forme qualunque e si ottengono allora notevoli risultati riguardanti la rappresentabilità di forme ternarie, quaternarie, ecc. mediante potenze di forme lineari.

Affini a queste ricerche sono quelle più antiche di SYLVESTER, nelle quali si volea che il numero delle forme lineari mediante le cui n^{me} potenze doveva esprimersi la forma data fosse inferiore ad n e propriamente $\frac{n}{2}$ per n pari, ed $\frac{n+1}{2}$ per n dispari. — Allora occorre che sia soddisfatta una certa relazione fra i coefficienti della forma solo nel caso che n sia pari; il primo membro di questa relazione invariantiva si dice CATALLETTICANTE; pel caso di n dispari la rappresentazione di tal genere è invece sempre possibile.

§ 3. — SISTEMI LINEARI DI GRUPPI DI PUNTI. INVOLUZIONI GENERALI.

Si abbiano $k+1$ forme binarie di grado n, $(k \leqq n)$ linearmente indipendenti *

$$a_x{}^n,\ b_x{}^n \ldots$$

e si formi con $k+1$ parametri omogenei la forma

$$\lambda_1 a_x{}^n + \lambda_2 b_x{}^n + \lambda_3 c_x{}^n + \ldots$$

---

* Si dice che le forme date sono *linearmente indipendenti* quando non sussiste identicamente fra esse alcuna relazione lineare omogenea, cioè quando non si possano determinare dei parametri costanti $r_1\, r_2$ in modo che moltiplicando per essi rispettivamente le forme date, la somma dei prodotti così formati sia identicamente zero.

Questa forma di grado n, eguagliata a zero rappresenterà, ogni volta che sieno assegnati i valori per le costanti λ, un gruppo di n punti; si sarà dunque determinato, mediante le $k+1$ forme date, un sistema lineare k volte infinito o, come si suol dire, ∞^k gruppi di n punti. Si dice che questo sistema, è *un' involuzione di grado n e di specie k.* L'equazione

$$\lambda_1 a_x{}^n + \lambda_2 b_x{}^n + \ldots = 0$$

si chiama *l'equazione della involuzione.*

Per $n = 2$, $k = 1$ si ha l'involuzione ordinaria, cioè le infinite coppie di punti che si ottengono in questo caso, sono le coppie di punti coniugati della involuzione ordinaria determinata dalle due coppie di punti che rappresentano le due quadratiche date.

Un' involuzione di grado n e specie k è determinata da k + 1 gruppi di n punti che non appartengano ad una involuzione di specie inferiore.

Se r punti di un gruppo di un' involuzione, coincidono in un punto, si dice che quel punto è r^{plo} per l'involuzione.

Un' involuzione di grado n e di specie k ammette un numero finito di punti $k+1^{pli}$, *propriamente ne possiede* $(k+1)(n-k)$. (Cremona, *Preliminari*, ecc. Bologna, 1866-67.)

Un' involuzione di grado n e specie k contiene

$$\frac{2^k (n-k)(n-k-1)\ldots(n-2k+1)}{k!}$$

gruppi, ciascuno dei quali è dotato di k punti doppi.

Sono specialmente interessanti le involuzioni di grado n e prima specie. *In esse vi sono* $2n-2$ *punti doppi o uniti, i quali sono determinati dall' Jacobiano*

$$(a\,b)\,a_x^{\,n-1}\,b_x^{\,n-1}=0.$$

L' insieme delle prime polari di un gruppo di n *punti forma un' involuzione di grado* $n-1$ *e prima specie.*

Le involuzioni si possono far corrispondere fra loro *proiettivamente* stabilendo delle relazioni *bilineari* fra i parametri di una e quelli di un altra.

Per due involuzioni di prima specie e di gradi m *e* n, *sovrapposte, in corrispondenza proiettiva, accadrà* $m+n$ *volte, che un punto dell'una coincide con uno dei suoi corrispondenti nell'altra.* Questo teorema è un caso particolare del cosiddetto *principio di corrispondenza di* CHASLES (v. Capitolo I, § 2).

(Forme quadratiche.) — *Se di un punto dato si prende il punto polare rispetto ad una quadratica (centro armonico di primo grado), i due elementi di questa, il punto dato ed il punto polare sono in armonia.*

L'annullarsi dell' invariante $A_{f\varphi}$ *delle due forme quadratiche* f *e* φ *(v. I, pag. 291) esprime che i punti-zero della prima forma sono situati armonicamente rispetto ai punti zero della seconda.*

I punti rappresentati dal covariante $\vartheta=0$ *(Jacobiano) sono i punti uniti dell' involuzione di cui due coppie di punti coniugati sono rispettivamente quelli di* $f=0$ *e quelli di* $\varphi=0$.

Altrimenti: *Esistono due punti di cui l'uno è polare dell'altro (e quindi coniugato armonico) rispetto a ciascuna di due quadratiche date; tali punti sono quelli di* $\vartheta = 0$.

L'annullarsi dell'invariante R di tre forme quadratiche esprime che le tre coppie di punti appartengono ad una stessa involuzione.

Una forma quadratica può con trasformazione lineare ridursi alla forma canonica $X_1^2 + X_2^2$ *contenente cioè solo i quadrati delle coordinate; per ciò fare basta prendere per nuovi punti fondamentali delle coordinate omogenee due punti coniugati armonici fra loro rispetto alla forma quadratica, cioè il punto y (arbitrario) e il punto x radice di* $a_x a_y = 0$, *e inoltre scegliere convenientemente il punto unità.*

Scegliendo per punti fondamentali delle coordinate omogenee i due punti radici di $\vartheta = 0$, *ciascuna di due quadratiche si riduce a forma canonica.* Questi teoremi sono interessanti anche perchè trovano i loro analoghi nella teoria delle coniche e delle quadriche. Per essi si può vedere Clebsch, *Bin. Form.*, § 33, 37; essi sono poi anche casi particolari di quelli sopra accennati riguardanti la apolarità.

(Forme cubiche.) — I punti di una forma cubica $f = 0$ sieno a, b, c. Per l'apolarità della forma cubica con sè stessa si ha:

Se di un punto a della forma cubica si considera il gruppo polare di 1.° ordine (che è costituito di due punti) uno di questi coinciderà con a, e l'altro sarà il coniugato armonico di a rispetto alla coppia b, c.

Si hanno così tre altri punti a', b', c' *i quali sono i punti radici del covariante* $Q = 0$.

Ciascuno degli elementi di Q *ha il suo punto polare (gruppo di 2.° ordine) rispetto alla cubica, coincidente con un punto della cubica data* f.

I punti di f *insieme con quelli di* Q *formano tre coppie di punti coniugati in involuzione, di cui i punti doppi sono quelli dell'Hessiano* $\Delta = 0$.

Ciascuno dei due punti di $\Delta = 0$ *ha il gruppo polare di 1.° ordine rispetto alla cubica costituito di due elementi coincidenti, e con questo coincide poi anche il punto polare di 2.° ordine dello stesso elemento di* $\Delta = 0$ *rispetto alla cubica.*

Se rispetto ad una forma cubica e alla sua Jacobiana si prendono le coppie di elementi polari di 1.° ordine di un elemento arbitrario, tali coppie sono coniugate armoniche fra loro, e al variare dell'elemento arbitrario, costituiscono una involuzione di cui i punti doppi sono quelli di $\Delta = 0$.

Se un punto ha, rispetto alla cubica, i due elementi polari di primo ordine fra loro coincidenti, quel punto insieme ai tre elementi della cubica, costituisce una quaterna equianarmonica (v. Capitolo I, § 2); quindi *ogni punto dell'Hessiano insieme ai tre punti della cubica forma una quaterna equianarmonica.*

Prendendo per punti fondamentali di coordinate omogenee i punti di $\Delta = 0$, *la cubica si riduce a forma canonica, cioè contenente solo i cubi delle due variabili; e allora anche* Q *si riduce a forma canonica* (v. CLEBSCH, *Bin. Form.* § 38).

I tre elementi di f (come anche quelli di Q) sono fra loro in proiettività ciclica, di cui gli elementi doppi sono quelli di $\Delta = 0$.

In due terne di elementi $a\,b\,c$, $\alpha\,\beta\,\gamma$ *apolari l'uno dell'altro, due qualunque punti del primo gruppo, per es. a, b, sono coniugati armonici rispetto al primo gruppo polare di c rispetto alla terna* $(\alpha\,\beta\,\gamma)$.

Due forme cubiche sono apolari l'una dell'altra se è zero l'invariante $J = (f, \varphi)^3$ *.

Prendendo di ciascun elemento di una cubica il coniugato armonico rispetto agli altri due, si hanno tre punti; la condizione perchè questi siano apolari con quelli dell'altra cubica è data dall'annullarsi dell'invariante $A_{\Delta\Theta}$ *o* $A_{\nabla\Theta}$, *di terzo grado nei coefficienti di una cubica e di primo grado in quelli dell'altra.*

È $\Omega = 0$ *la condizione perchè sieno apolari le due terne di punti che si ottengono nella medesima indicata maniera da ciascuna delle due cubiche.*

L'annullarsi di $A_{\Delta\nabla}$ *rappresenta che la coppia di punti, ognuno dei quali forma una quaterna equianarmonica cogli elementi della prima cubica è armonica colla coppia analoga relativa alla seconda cubica.*

(Forme biquadratiche.) ** — *Se l' invariante j è zero, i quattro punti rappresentati da una binaria*

* Per le notazioni qui adoperate si vegga il vol. I di quest'Opera, pag. 297.

** Tralasciamo di notare le proprietà già notate nel volume I del Repertorio.

biquadratica sono armonici; se invece i è zero i quattro punti sono equianarmonici; in quest'ultimo caso la f è apolare con sè stessa.

L'Hessiano di una forma biquadratica rappresenta quattro elementi ciascuno dei quali ha il gruppo polare di 3.° ordine rispetto alla forma coincidente col gruppo polare di 2.° ordine (formato di elementi coincidenti). Ciascun punto di H forma coi tre punti del proprio primo gruppo polare una quaterna equianarmonica.

La forma $T=0$ rappresenta sei elementi ciascuno dei quali ha il 3.° gruppo polare (rispetto ad f) coincidente con uno dei tre punti del 1.° gruppo polare, e forma con questi tre una quaterna armonica.

Le tre involuzioni determinate dalle coppie degli elementi della biquadratica, ovvero del suo Hessiano, hanno per elementi doppi quelli del covariante T, e ciascuna di queste tre coppie di elementi doppi rappresenta anche gli elementi doppi dell'involuzione determinata dagli altri due.

Se $j=0$, la f si può ridurre alla forma canonica contenente solo le quarte potenze di due forme lineari, le quali sono quelle di una delle coppie di T. In tal caso gli elementi di f costituiscono una proiettività ciclica di cui gli elementi doppi sono due di quelli di T.

Queste considerazioni sulla rappresentazione geometrica delle forme binarie, si trovano, oltre che nelle opere degli autori tedeschi, anche in antiche memorie di Battaglini (*Accad. Nap.*, 1864 e seg.) ingiustamente dimenticate.

§ 4. — Proprietà proiettive dei triangoli, quadrangoli, esagoni, ecc.

Se in due quadrangoli piani completi, riferiti fra loro, cinque lati del primo segano i lati corrispondenti del secondo in cinque punti di una retta, anche i sesti lati si incontreranno in un punto della stessa retta, e le congiungenti i vertici corrispondenti concorreranno in un punto unico; inoltre anche i triangoli diagonali saranno omologici.

Di qui si ha: *Se un quadrangolo completo si deforma in modo che cinque dei suoi lati passino per punti fissi di una retta, anche il sesto roterà intorno ad un punto fisso della stessa retta, che con quei cinque costituisce una involuzione di sei punti.*

Le tre coppie di lati opposti di un quadrangolo completo sono segate da una trasversale arbitraria in tre coppie di punti coniugati in involuzione.

Di qui: *se una trasversale incontra in A e A', B e B', C e C' le tre coppie di lati opposti di un quadrangolo completo, fra i segmenti della trasversale ha luogo la relazione*

$$AB' . BC' . CA' + A'B . B'C . C'A = 0.$$

Possono poi naturalmente enunciarsi per il quadrilatero, i teoremi correlativi a questi.

I tre cerchi aventi per diametri le tre diagonali di un quadrilatero completo, passano per gli stessi punti.

I tre punti medi delle tre diagonali di un quadrilatero completo sono in linea retta.

In un quadrangolo completo, due lati concorrenti in un punto diagonale sono separati armonicamente mediante gli altri due.

In un quadrilatero completo ciascuna diagonale è divisa armonicamente dalle altre due

Indicando con L, L'; M, M'; N, N' i punti che insieme con una trasversale s dividono armonicamente i lati AB, CD, AC, BD, AD, BC di un quadrangolo completo, le rette LL', MM', NN', concorrono in un punto che insieme ad esse divide armonicamente LL', MM', NN'.

Se una trasversale sega i lati di un triangolo RSQ in tre punti A' B' C' i quali siano rispett. accoppiati in involuzione con tre altri punti ABC della stessa trasversale, le rette RA, SB; QC concorrono in un punto.

Se da un punto S si proiettano i vertici di un trilatero rsq mediante tre raggi a' b' c' i quali siano accoppiati in involuzione con tre altri raggi a, b, c uscenti da S, i punti ra, sb, qc saranno in una retta.

Se i lati di un triangolo sono segati da una trasversale arbitraria, e se i vertici si proiettano da un punto arbitrario sui lati risp. opposti, il prodotto dei rapporti anarmonici dei gruppi di quattro punti che si ottengono sui tre lati è l'unità negativa.

Se tre rette uscenti da un punto e passanti pei vertici di un triangolo ABC, incontrano i lati opposti in $A'B'C'$, fra i segmenti dei lati si ha la relazione

$$AB' \, . \, BC' \, . \, CA' + AC' \, . \, CB' \, . \, BA' = 0$$

ovvero

$$\frac{AB'}{CB'} \cdot \frac{BC'}{AC'} \cdot \frac{CA'}{BA'} = -1 \quad (\textit{teor. di } \text{Ceva}, 1678)$$

e reciprocamente se per tre punti $A'B'C'$ sui lati di un triangolo sussiste la precedente relazione, le congiungenti AA', BB', CC' concorreranno in un punto.

Se una trasversale sega i lati di un triangolo ABC in tre punti $A'B'C'$, fra i segmenti dei lati sussiste la relazione

$$AB' \, . \, BC' \, . \, CA' - AC' \, . \, CB' \, . \, BA' = 0$$

ovvero

$$\frac{AB'}{CB'} \cdot \frac{BC'}{AC'} \cdot \frac{CA'}{BA'} = 1 \qquad (\textit{teor. di } \text{Menelao})$$

e reciprocamente.

Se si dividono armonicamente i lati di un triangolo ABC, nei punti A', B', C', A'', B'', C'' in modo che sia

$$\frac{AB'}{CB'} \cdot \frac{BC'}{AC'} \cdot \frac{CA'}{BA'} = \frac{AB''}{B''C} \cdot \frac{BC''}{C''A} \cdot \frac{CA''}{A''B} = 1$$

i circoli di diametri A, A'; B, B'; C, C' passano per gli stessi due punti PP' tali che si ha

$$A\,P : B\,P : C\,P = A\,P' : B\,P' : C\,P',$$

e la corda PP' è divisa armonicamente e normalmente dal circolo dei tre punti $A\,B\,C$.

Se un esagono piano semplice ha i vertici di ordine dispari in una retta e quelli di ordine pari in un'altra retta, le tre coppie di lati opposti si tagliano in punti per diritto.

Se un seilatero piano semplice ha i lati di ordine impari concorrenti in un punto, e quelli di ordine pari concorrenti in un altro punto, le congiungenti le tre coppie di vertici opposti concorrono in uno stesso punto.

Questi due teoremi sono casi particolari di quelli chiamati teoremi di PASCAL e BRIANCHON (vedi più sotto) relativi alle coniche, e si ottengono dal caso generale supponendo che la conica fondamentale si scinda in due rette, o in due punti.

§ 5. — GEOMETRIA METRICA DEL TRIANGOLO PIANO. FORMOLE DI TRIGONOMETRIA PIANA.

Indicando con a, b, c i tre lati e con A, B, C i tre angoli (rispett. opposti) di un triangolo rettilineo *si hanno le relazioni*

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c \operatorname{sen} A$$

e le altre due che si ricavano dalla seconda permutando fra loro le lettere a, b, c, A, B, C.

Indi si hanno le altre formole (dove con s *si indica la semisomma dei lati):*

$$a = \frac{b}{\cos C + \operatorname{sen} C \operatorname{ctg} A}$$

$$= b \cos C + b \operatorname{sen} C \operatorname{ctg} B$$

$$= b \cos C \pm \sqrt{c^2 - b^2 \operatorname{sen}^2 C}$$

$$= b \cos c + c \cos B$$

$$= \frac{2 s \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C}$$

$$= \frac{s \operatorname{sen} \frac{1}{2} A}{\cos \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} C}$$

$$\operatorname{sen} A = \frac{2}{b c} \sqrt{s (s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \sqrt{1 - \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2 c b}}$$

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{b c}}$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{a \operatorname{sen} C}{b - a \cos C}$$

$$(a-b) \operatorname{tg} \frac{1}{2}(A+B) = (a+b) \operatorname{tg} \frac{1}{2}(A-B)$$

(*analogia di* NEPER)

$$(s-a)\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}A=(s-b)\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}B=(s-c)\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}C$$

$$s=(s-a)\,\mathrm{ctg}\,\frac{1}{2}B\,\mathrm{ctg}\,\frac{1}{2}C$$

$$c\,\mathrm{sen}\,(A-B)=a\,\mathrm{sen}\,A-b\,\mathrm{sen}\,B$$

$$\left.\begin{aligned}a\cos\frac{1}{2}(B-C)&=(b+c)\cos\frac{1}{2}(B+C)\\ a\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}(B-C)&=(b-c)\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}(B+C)\end{aligned}\right\}$$ (*doppio teor. di* GAUSS)

$$a^2\,\mathrm{sen}\,(B-C)=(b^2-c^2)\,\mathrm{sen}\,(B+C)$$

$$\mathrm{sen}\,A+\mathrm{sen}\,B+\mathrm{sen}\,C=4\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C$$

$$\mathrm{sen}\,2A+\mathrm{sen}\,2B+\mathrm{sen}\,2C=4\,\mathrm{sen}\,A\,\mathrm{sen}\,B\,\mathrm{sen}\,C$$

$$\cos A+\cos B+\cos C=4\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}A\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}B\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}C-1$$

$$\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=-4\cos A\cos B\cos C-1$$

$$\mathrm{tg}\,A+\mathrm{tg}\,B+\mathrm{tg}\,C=\mathrm{tg}\,A\,\mathrm{tg}\,B\,\mathrm{tg}\,C$$

$$\mathrm{ctg}\,A+\mathrm{ctg}\,B+\mathrm{ctg}\,C=\mathrm{ctg}\,A\,\mathrm{ctg}\,B\,\mathrm{ctg}\,C+$$
$$+\,\mathrm{cosec}\,A\,\mathrm{cosec}\,B\,\mathrm{cosec}\,C$$

$$\mathrm{sen}\,A+\mathrm{sen}\,B+\mathrm{sen}\,C=4\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}A\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}B\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}C$$

$$\mathrm{sen}\,2A+\mathrm{sen}\,2B+\mathrm{sen}\,2C=4\cos A\cos B\cos C$$

$$\mathrm{sen}^2 A+\mathrm{sen}^2 B-\mathrm{sen}^2 C=2\,\mathrm{sen}\,A\,\mathrm{sen}\,B\cos C$$

$$\mathrm{sen}^2 A+\mathrm{sen}^2 B+\mathrm{sen}^2 C=1-2\cos A\cos B\cos C.$$

L'area del triangolo può poi essere espressa dalle seguenti formole:

$$\text{Area} = \frac{1}{2}\,\frac{c^2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} C}$$

$$= \frac{1}{2}\, a\, b \operatorname{sen} C$$

$$= \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}.$$

§ 6. — Geometria metrica del triedro e del triangolo sferico. Formole di trigonometria sferica.

Consideriamo tre piani di una stella (non di un fascio, quindi non passanti per una stessa retta); supposti i tre piani limitati alle rette colle quali si intersecano a due a due e al punto d'intersezione comune, si ha *un triedro;* supposto questo triedro segato con una sfera di raggio 1 e che abbia per centro quello della stella, si ha sulla sfera *un triangolo sferico*, di cui i lati sono archi di circoli massimi, che possono essere misurati dagli angoli al centro della sfera, cioè dagli angoli contenuti nelle *facce del triedro;* inoltre gli angoli del triangolo sferico sono gli angoli che fanno fra loro le tangenti ai lati nel vertice del triangolo, e tali angoli sono quelli che fanno fra loro le facce del triedro, cioè quelli dei diedri contenuti nel triedro. La geometria metrica del triedro cioè la *triedrometria*, si confonde così con quella

del triangolo sferico, cioè colla *trigonometria sferica.*

Fra i triangoli sferici sono da notarsi i rettangoli, i birettangoli e i trirettangoli. Questi ultimi sono formati di tre archi di circoli massimi fra loro a due a due perpendicolari; *tutti i lati e tutti gli angoli sono di novanta gradi.*

In ogni triangolo sferico rettangolo i tre lati sono minori di 90 gradi, ovvero uno solo di questi lati è minore di 90 gradi.

In ogni triangolo sferico rettangolo, un angolo non retto, e il suo lato opposto sono ambedue maggiori o minori di 90 gradi.

Se in un triangolo sferico ciascun lato ed angolo è minore di 180°, la somma degli angoli è maggiore di 180°, e la differenza fra questa somma e 180° dicesi ECCESSO *del triangolo sferico.*

Il triangolo sferico è allora equivalente ad un altro triangolo sferico birettangolo il cui terzo angolo è l'eccesso del triangolo dato. (Questo teor. fu dimostrato incompletamente da GIRARD nel 1629; indi dimostrato in modo semplice da CAVALIERI nel 1632.)

Come *unità* delle aree sferiche si assume il triangolo birettangolo, il cui terzo angolo sia l'*unità angolare.* Allora si ha: *L'area di un triangolo sferico è eguale al suo* ECCESSO.

Dato un circolo massimo sulla sfera, i due estremi del diametro perpendicolare si chiamano *poli del circolo massimo.* Supposto il circolo massimo percorso in un certo senso (che si chiamerà *positivo)* da un viaggiatore che appoggi i piedi sulla sfera, si chiamerà propriamente *polo* del circolo, quello

fra i due, che resta a sinistra del viaggiatore; per modo che dato il polo di un circolo è determinato su questo il senso positivo del cammino. Quella faccia del piano del circolo massimo che guarda verso il polo si chiamerà *positiva*.

Spostandosi di un certo angolo il piano di un circolo massimo, il polo si sposta del medesimo angolo.

Dato un triangolo sferico $A\,B\,C$, cerchiamo i poli rispettivamente dei lati $B\,C$, $C\,A$, $A\,B$ (dove si intende che su questi lati il senso positivo debba essere rispett. quello delle direzioni $B\,C$, $C\,A$, ecc.)

Questi tre poli che indicheremo con $A'\,B'\,C'$ formano un altro triangolo sferico che si chiama *polare o reciproco del dato.*

Il triangolo $A'\,B'\,C'$ ha a sua volta per polare il triangolo $A\,B\,C$.

Gli angoli di un triangolo sono rispettivamente i supplementi dei lati del triangolo polare.

L'area di un triangolo e il perimetro del triangolo polare sommati insieme danno 360°.

Supponiamo il contorno di un triangolo sferico percorso in un certo senso, per es. nel senso $A\,B\,C$, e che questo sia il senso positivo rispettivamente su ciascuno dei circoli massimi $A\,B$, $B\,C$, $C\,A$; questi lati *percorsi in questo senso* abbiano rispettivamente i valori c, a, b.

Per angolo $B\,A\,C$ intendiamo l'angolo fatto dalle due direzioni $A\,B$, $A\,C$, di cui dunque una è positiva e l'altra è negativa; così per gli angoli $A\,C\,B$, $C\,B\,A$. Tali angoli sieno indicati rispettivamente con A, C, B.

Intendendo per *angolo di due piani del triedro* che corrisponde al triangolo sferico, l'angolo racchiuso dalle due facce, una positiva e l' altra negativa dei due piani, si ha:

Gli angoli di un triangolo sferico sono supplementari degli angoli racchiusi dai tre piani del triedro corrispondente al triangolo dato.

Se per *angolo dei due piani del triedro*, si intende *invece* l'angolo racchiuso dalle due *facce positive*, si ha allora che gli angoli racchiusi dalle tre facce del triedro fra loro sono rispettivamente eguali a quelli che abbiamo indicati con A, B, C, e che *non* sono gli angoli formati dalle direzioni *positive* dei circoli massimi.

Supposto $A = 90^\circ$, le formole principali per i triangoli sferici *rettangoli* sono le seguenti:

$$\cos a = \cos b \cos c$$

$$\begin{cases} \cos b = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} B \\ \cos c = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} C \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg} b = \operatorname{tg} a \cos C = \operatorname{sen} c \operatorname{tg} B \\ \operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a \cos B = \operatorname{sen} b \operatorname{tg} C \end{cases}$$

$$\cos a = \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C$$

$$\begin{cases} \cos B = \cos b \operatorname{sen} C \\ \cos C = \cos c \operatorname{sen} B. \end{cases}$$

Le formole fondamentali per i triangoli sferici *qualunque* possono ritenersi le seguenti:

$$\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} A} = \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} B} = \frac{\operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} C}$$

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A$$
$$\cos A = -\cos B \cos C + \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \cos a$$

e le altre che si ricavano da queste cogli scambii di lettere.

La prima di queste formole si trova sino nelle opere degli antichi geometri (MENELAO, *Spherica*, III); le altre si chiamano *le formole di* EULERO (*Mem. de Berlin*, 1753). Da esse possono ricavarsi tutte le formole della trigonometria sferica, il che fu fatto per la prima volta da LAGRANGE (*Journ. de l'Éc. polyt.*, 1799) e GAUSS (*Aggiunte alla Geometria di posizione di* CARNOT, *trad. da* SCHUMACHER).

Ponendo $a + b + c = 2s \quad A + B + C = 2S$

altre formole sono le seguenti:

$$\operatorname{ctg} a \operatorname{sen} b = \cos b \cos C + \operatorname{sen} C \operatorname{ctg} A$$

$$\operatorname{sen} A = \frac{2\sqrt{\operatorname{sen} s \operatorname{sen}(s-a) \operatorname{sen}(s-b) \operatorname{sen}(s-c)}}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}$$

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(s-b) \operatorname{sen}(s-c)}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}}$$

$$\cos \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\operatorname{sen} s \operatorname{sen}(s-a)}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}}$$

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{-\cos S \cos(S-A)}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}}$$

$$\cos \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{\cos(S-B) \cos(S-C)}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}}$$

dalle quali, colla divisione, si ottengono facilmente le formole per $\text{tg}^2 \frac{1}{2} A$, $\text{ctg}^2 \frac{1}{2} a$; formole che servono specialmente per il calcolo numerico di un angolo mediante i tre lati, o di un lato mediante i tre angoli.

Se tutti gli angoli e i lati di un triangolo sferico sono minori di 180° si hanno le formole (dette di GAUSS o di DELAMBRE)

$$\text{sen} \frac{1}{2} (A - B) \text{ sen } \frac{1}{2} c = \text{sen} \frac{1}{2} (a - b) \cos \frac{1}{2} C$$

$$\cos \frac{1}{2} (A - B) \text{ sen } \frac{1}{2} c = \text{sen} \frac{1}{2} (a + b) \text{ sen } \frac{1}{2} C$$

$$\text{sen} \frac{1}{2} (A + B) \cos \frac{1}{2} c = \cos \frac{1}{2} (a - b) \cos \frac{1}{2} C$$

$$\cos \frac{1}{2} (A + B) \cos \frac{1}{2} c = \cos \frac{1}{2} (a + b) \text{ sen } \frac{1}{2} C.$$

Queste formole furono pubblicate quasi contemporaneamente da GAUSS (*Th. motus*, etc.), da DELAMBRE (*Connaiss. des temps,* 1808) e da MOLLWEIDE (*Zach monatl. Corresp.*, 1808. Vol. XVIII).

Dividendo queste formole fra loro si hanno i valori di

$$\text{tg} \frac{1}{2} (A + B), \qquad \text{tg} \frac{1}{2} (A - B),$$

$$\text{tg} \frac{1}{2} (a + b), \qquad \text{tg} \frac{1}{2} (a - b);$$

le formole corrispondenti si chiamano *analogie di* NEPER perchè pubblicate da questo Autore nel 1614.

Altre formole adoperate da GAUSS sono le seguenti:

$$(\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B) \operatorname{sen} c = (\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b) \operatorname{sen} C$$
$$(\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B) \operatorname{sen} c = (\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b) \operatorname{sen} C$$
$$(\cos A + \cos B) \operatorname{sen} c = \operatorname{sen} (a + b)(1 - \cos C)$$
$$\operatorname{sen} (A + B)(1 + \cos c) = (\cos a + \cos b) \operatorname{sen} C.$$

Da ogni vertice del triangolo sferico conduciamo il circolo massimo perpendicolare al lato opposto; esso divide l'angolo e il lato opposto in due parti $M, N; m, n$ in modo che $M + N = A$, $m + n = a$ (se tale circolo perpendicolare è stato condotto dal vertice A). Si hanno allora le relazioni:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(M + N) \operatorname{tg} \frac{1}{2}(M - N) = \frac{\operatorname{sen}(b - c)}{\operatorname{sen}(b + c)}$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(m + n) \operatorname{tg} \frac{1}{2}(m - n) =$$
$$= \operatorname{tg} \frac{1}{2}(b + c) \operatorname{tg} \frac{1}{2}(b - c)$$

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(M - N)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(M + N)} = \operatorname{tg} \frac{1}{2}(B + C) \operatorname{tg} \frac{1}{2}(B - C)$$

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(m-n)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(m+n)}=\frac{\operatorname{sen}(B-C)}{\operatorname{sen}(B+C)}$$

$$\frac{\operatorname{tg} M}{\operatorname{tg} N}=\frac{\operatorname{tg} m}{\operatorname{tg} n}$$

$$\frac{\operatorname{sen}(M+N)}{\operatorname{sen}(M-N)}=\frac{\operatorname{sen}(m+n)}{\operatorname{sen}(m-n)}.$$

La quantità avanti designata con S (pag. 93) ha relazione (come abbiamo sopra detto, pag. 90) coll'area del triangolo sferico; si hanno per essa le seguenti formole importanti:

$$\operatorname{sen} S=\frac{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b+\operatorname{sen}\frac{1}{2}a\operatorname{sen}\frac{1}{2}b\cos C}{\cos\frac{1}{2}c}$$

$$=\frac{1+\cos a+\cos b+\cos c}{4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$$

$$=\frac{\cos^2\frac{1}{2}a+\cos^2\frac{1}{2}b+\cos^2\frac{1}{2}c-1}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$$

$$\operatorname{tg} S=-\frac{\operatorname{ctg}\frac{1}{2}a\operatorname{ctg}\frac{1}{2}b+\cos C}{\operatorname{sen} C}$$

$$\operatorname{ctg} S = -\frac{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \operatorname{sen} C}{1 + \cos a + \cos b + \cos c}$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}(S - 90^\circ) =$$

$$= \operatorname{tg}\frac{1}{2} s \operatorname{tg}\frac{1}{2}(s-a) \operatorname{tg}\frac{1}{2}(s-b) \operatorname{tg}\frac{1}{2}(s-c).$$

A queste formole corrispondono naturalmente quelle colle quali si calcola il perimetro $2s$ del triangolo sferico; basta sostituire al triangolo dato il suo triangolo polare e a questo applicare le formole precedenti.

Se in un triangolo sferico resta costante un angolo e il prodotto delle tangenti delle metà dei lati che comprendono l'angolo, resta costante l'area del triangolo.

Se in un triangolo sferico resta costante un lato e il prodotto delle tangenti dei semiangoli adiacenti al lato, resta costante il perimetro del triangolo.

Se i rapporti dei lati del triangolo sferico al raggio della sfera sono piccoli, gli angoli del triangolo sferico superano approssimativamente della terza parte dell' ECCESSO, *gli angoli corrispondenti di un triangolo piano che ha i lati ordinatamente uguali a quelli del triangolo sferico (teor. di* LEGENDRE, *Mem. de Paris*, 1787).

Gli studi di trigonometria sferica, che erano necessarii per le ricerche astronomiche, risalgono sino ai geometri greci. Fra i moderni se ne oc-

cupò nuovamente con nuove importanti ricerche, l'EULERO, *Mém. de Berlin*, 1753, e *Acta Petrop.*, 1779); indi se ne occuparono LEGENDRE (*Trigon.*), LEXELL (*Acta Petrop.*, 1782), LAGRANGE (*Journ. de l'Éc. polyt.*, cah. VI e GAUSS. Sono poi importanti le opere di MÖBIUS (*Analyt. Sphärik*, 1846) e GUDERMANN (*Nied. Sphärik*, 1835).

Fra le opere più moderne, oltre il notissimo trattato di SERRET (tradotto anche varie volte in italiano) citiamo l'eccellente piccolo trattato di BALTZER (tradotto in ital. da CREMONA, 3.ª ediz., Genova, 1881).

CAPITOLO III.

Teoria invariantiva delle forme algebriche.

Connessi.

§ 1. — GENERALITÀ SULLE FORME ALGEBRICHE.

Nel vol. I, Cap. XII abbiamo trattato delle forme algebriche binarie. Ora diremo qualcosa sulle forme algebriche ternarie. Lo studio di queste appartiene più propriamente alla Geometria, inquantochè è nella Geometria che si possono utilizzare i risultati ottenuti dallo studio delle formazioni invariantive appartenenti a quelle forme.

Si dirà *forma algebrica ternaria* una funzione, intera, omogenea di tre variabili $x_1 x_2 x_3$; i coefficienti di questa forma possono poi essere a loro volta funzioni intere omogenee di altre tre variabili $y_1 y_2 y_3$, e si ha allora la *forma a due serie di variabili*, ecc.; similmente si definirebbero le forme quaternarie, quinarie, ecc.

Con principi simili a quelli adoperati nel caso delle forme binarie, (che qui non ripeteremo), possiamo *simbolicamente* porre una forma ternaria di

ordine n, sotto la forma

$$f = (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)^n = a_x^n = b_x^n = c_x^n = \ldots$$

La teoria invariantiva delle forme algebriche studia quelle formazioni razionali intere omogenee dei coefficienti di una o più forme originarie, e delle variabili, le quali formazioni per una trasformazione lineare delle variabili (per un'omografia) restano inalterate a meno di un fattore, potenza del cosiddetto modulo della sostituzione. Siffatte formazioni si chiamano perciò *formazioni invariantive.*

È facile riconoscere che fra tali formazioni invariantive, devono includersi anche di quelle le quali non hanno le loro corrispondenti nel caso del campo binario.

Interpretiamo, infatti, le x come coordinate omogenee di punti del piano. Nella trasformazione lineare delle coordinate x di punti, conviene tener conto anche dell'elemento che nel piano è *duale* al punto, cioè della retta, e quindi conviene considerare insieme, anche la correlativa trasformazione delle coordinate di rette nel piano. Questo è un fatto nuovo che nel campo binario non si presentava.

Indicando perciò con $u_1 u_2 u_3$ le coordinate omogenee di rette nel piano, conviene più generalmente considerare formazioni le quali oltrecchè contenere coordinate-punti, contengano anche coordinate-rette.

Propriamente distingueremo quattro specie di formazioni invariantive :

1. *Invarianti;* non dipendono che dai coefficienti della forma originaria. Il grado in tali coefficienti si dice *grado dell'invariante.*

2. *Covarianti;* dipendono, oltrechè dai coefficienti, anche dalle coordinate-punti. Il grado in tali coordinate si dice *ordine.*

3. *Contravarianti* o *forme aggiunte;* dipendono, oltrecchè dai coefficienti, anche dalle coordinate-rette. Il grado in tali coordinate si dice *classe.*

4. *Forme miste;* dipendono, oltrecchè dai coefficienti, dalle coordinate-punti, e dalle coordinate-rette.

Da questo punto di vista allora possiamo *più generalmente* immaginare che la forma o le forme originarie fondamentali, contengano, oltrecchè coordinate-punti, anche coordinate-rette, e anche che contengano più serie delle une, e più serie delle altre.

Se una di esse contiene solo una serie di coordinate punti, la sua espressione simbolica sarà a_x^n, ed eguagliata a zero rappresenterà una *curva algebrica di ordine n* (v. *Cap. sulla teoria delle curve*).

Se contiene solo una serie di coordinate-rette, la sua espressione simbolica sarà u_α^n ed eguagliata a zero rappresenterà *una curva algebrica di classe n* (v. Idem).

Se contiene una serie di coordinate-punti, e una serie di coordinate-rette la sua espressione simbo-

lica sarà

$$a_x^m u_\alpha^n$$

ed eguagliata a zero rappresenterà *un connesso;* di questi tratteremo alla fine di questo capitolo.

I casi in cui le serie di coordinate delle due specie sono in numero maggiore di uno, si riducono ai soli casi sopra enunciati, mediante il seguente teorema fondamentale:

Un sistema di forme ternarie in numero qualunque, di cui ciascuna contiene più serie di coordinate-punti, e più serie di coordinate-rette, può sempre essere sostituito da un sistema EQUIVALENTE, *di cui ogni forma non contiene che solo una serie di coordinate-punti, e una serie di coordinate-rette, e di cui tutte le formazioni invariantive sono le stesse di quelle del sistema primitivo* (v. CLEBSCH, *Abh. Göttingen*, 1872, e CLEBSCH-LINDEMANN, *Geom.).*

Come pel campo binario, così anche per il ternario si ha il teorema, *che esiste sempre un* SISTEMA COMPLETO *di formazioni invariantive, nel senso che mediante esse e con funzione razionale intera può esprimersi ogni altra formazione invariantiva appartenente alle forme fondamentali date.*

Esaminiamo ora come si trasformano, colla sostituzione lineare, le coordinate-punti, le coordinate-rette, e i coefficienti simbolici della forma originaria.

Indicando con X_i le nuove coordinate-punti, si abbia:

$$X_i \equiv \alpha_{i1} x_1 + \alpha_{i2} x_2 + \alpha_{i3} x_3$$

e sia

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}$$

il modulo della trasformazione.

Indicando allora con A_{ij}; i complementi algebrici degli elementi α_{ij} in Δ, *si hanno le seguenti formole:*

$$x_i \equiv A_{1i} X_1 + A_{2i} X_2 + A_{3i} X_3$$
$$u_i = \alpha_{1i} U_1 + \alpha_{2i} U_2 + \alpha_{3i} U_3$$
$$U_i = A_{i1} u_1 + A_{i2} u_2 + A_{i3} u_3.$$

Sapendo, che se si indicano con $y_1 y_2 y_3$ le coordinate di un altro punto della retta u, le coordinate $u_1 u_2 u_3$ sono proporzionali ai minori della matrice

$$\begin{Vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{Vmatrix};$$

e correlativamente, indicando con $v_1 v_2 v_3$ le coordinate di un'altra retta passante per il punto x, le coordinate $x_1 x_2 x_3$ sono proporzionali ai minori della matrice

$$\begin{Vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{Vmatrix};$$

si ha: *che i minori di queste matrici si trasformano nella sostituzione lineare, colle stesse formole con cui si trasformano rispett.* u_i , *e* x_i .

La espressione u_x, colla trasformazione lineare, si riduce a U_X (a meno di un fattore Δ); *tale espressione è dunque una forma mista appartenente a qualunque forma originaria fondamentale (perchè è indipendente dai coefficienti della forma originaria).* Si chiama perciò *covariante identico.*

Sussiste il seguente teorema:

Se una forma invariantiva di un sistema di forme date, non contiene i coefficienti di queste, e contiene una sola serie di coordinate-punti, e una sola serie di coordinate-rette, essa è necessariamente una potenza del covariante identico u_x *(a meno di un coefficiente numerico).*

Passando ora alle formole di trasformazione dei coefficienti simbolici $a_1\, a_2\, a_3$ di una forma ternaria data, noi osserveremo quanto segue:

Se una forma originaria data contiene solo una serie di coordinate-punti ed è quindi esprimibile col simbolo a_x^n, *i coefficienti simbolici* $a_1\, a_2\, a_3$ *si trasformano colle medesime formole con cui si trasformano le coordinate di rette* $u_1\, u_2\, u_3$.

Se una forma originaria data contiene solo una serie di coordinate-rette ed è quindi esprimibile col simbolo u_α^m, *i coefficienti simbolici* $\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3$ *si trasformano colle medesime formole con cui si trasformano le coordinate di punti* $x_1\, x_2\, x_3$.

Se infine una forma originaria è simbolicamente del tipo $a_x^n\, u_\alpha^m$, *i coefficienti* a *si trasformano come le* u, *e i coefficienti* α *come le* x.

Se Π *è una formazione invariantiva che dipende dai coefficienti effettivi* a_{ij} *di una forma originaria, e se i coefficienti omologhi di un' altra forma simile a quest'ultima si indicano con* b_{ij}, *la espressione*

$$\Sigma\, b_{ij} \frac{\partial \Pi}{\partial a_{ij}}$$

contiene le a ad un grado di un'unità inferiore a quello con cui le contiene Π, *contiene linearmente i coefficienti b, e possiede ancora la proprietà invariantiva.* L'operazione

$$\Sigma\, b_{ij} \frac{\partial}{\partial a_{ij}}$$

si dice *operazione di* Aronhold.

In questo modo da una forma invariantiva di un qualunque grado nei coefficienti di una forma data, si può ricavare un'altra la quale contenga linearmente i coefficienti di tante forme omologhe alla data. Ciò è utile per trasformare in espressione simbolica la forma invariantiva data.

Mediante l'introduzione della notazione simbolica ogni forma invariantiva di un sistema di forme originarie, resta espresso come forma invariantiva di un sistema di forme lineari.

Date le forme lineari a_x, u_α, u_β, *l'operazione*

$$(\alpha_2\,\beta_3 - \alpha_3\,\beta_2)\frac{\partial}{\partial a_1} + (\alpha_3\,\beta_1 + \alpha_1\,\beta_3)\frac{\partial}{\partial a_2} + \\ + (\alpha_1\,\beta_2 - \alpha_2\,\beta_1)\frac{\partial}{\partial a_3}$$

applicata su di una forma invariantiva Π *che con-*

tenga i coefficienti $a_1\,a_2\,a_3$, *lascia inalterata la proprietà invariantiva.*

Ogni formazione invariantiva di un sistema di forme ternarie può simbolicamente essere rappresentata come l'assieme di prodotti simbolici di cui i fattori sono dei tipi:

$$u_x,\ a_x,\ u_\alpha,\ a_\alpha,\ (a\,b\,c),\ (a\,b\,u),\ (a\,u\,v),\ (u\,v\,w)$$
$$(\alpha\,\beta\,\gamma),\ (\alpha\,\beta\,x),\ (\alpha\,x\,y),\ (x\,y\,z)$$

dove a, b, c, ... *sono coefficienti di forme lineari in coordinate-punti;* α, β, γ, ... *sono coefficienti di forme lineari in coordinate-rette;* $x\,y\,z$ ... *sono coordinate-punti; e* u, v, w, ... *sono coordinate-rette.*

Per il calcolo simbolico delle forme ternarie e di specie superiore sono fondamentali certe *identità* analoghe a quelle che si adoperano per il calcolo simbolico delle forme binarie. Per il campo ternario tali identità sono:

$$(abc)\,(def)-(bcd\ \ (aef)+(cda\ \ (bef)-(dab)\,(cef)=0$$

$$(a\,b\,c)\,d_x-(b\,c\,d)\,a_x+(c\,d\,a)\,b_x-(d\,a\,b)\,c_x=0$$

$$(a\,b\,c)\,(x\,y\,z)-\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=0$$

$$(x\,y\,z)\,a_t-(y\,z\,t)\,a_x+(z\,t\,x)\,a_y-(t\,x\,y)\,a_z=0$$

$$(xyz)(trs)-(yzt)(xrs)+(ztx)(yrs)\quad(txy)(zrs)=0$$

dove $a\,b\,c\,d\,e\,f$ rappresentano coefficienti di forme lineari in coord. punti, ovvero anche coordinate-rette; $x\,y\,z\,t\,r\,s$ rappresentano coordinate-punti, ovvero anche coefficienti di forme lineari in coordinate-rette.

Per le forme di specie superiore, si hanno anche cinque tipi di identità analoghe a quelle di sopra. Queste identità sono *le uniche primitive che possano sussistere fra formazioni simboliche di tipo invariantivo; nel senso che ogni altra identità apparentemente diversa, deve necessariamente essere una combinazione delle identità soprascritte*. Questo teorema fu dimostrato per forme binarie e ternarie da Gordan e Study (*Math. Ann.* Ann. XXX, pag. 120) e per il caso generale da Pascal (*Lincei, Rend.* 1888; *Memorie V*, 1888).

Un problema interessante per la teoria delle forme ternarie e superiori, è quello riguardante una possibile estensione della formola di Clebsch-Gordan, che esprime una funzione con più serie di variabili mediante polari di funzioni con un numero minore di serie di variabili.

Di questo problema si occupò come abbiamo già detto sopra, il Clebsch nel 1872; esso fu poi ripreso e trattato da un altro punto di vista, senza cioè la introduzione di coordinate-rette, da Capelli (*Giorn. di Batt. XVIII*; *Lincei, Memorie XII*, 1882).

È evidente come molte delle considerazioni qui fatte per le forme ternarie si possano anche fare in generale per le forme di specie superiore, r. Si possono, come nel campo ternario, anche nel campo delle forme di specie qualunque, definire delle coordinate u, le quali per la trasformazione lineare, si comportino come i determinanti minori della matrice formata con $r-1$ serie di variabili

$$x, y, z, \ldots$$

cogredienti di specie r. Rappresentando le x come le coordinate dei punti di uno spazio ad $r-1$ dimensioni, le u sono le coordinate dell'elemento che in tale spazio è *duale* al punto.

In quanto ai sistemi completi per le speciali forme ternarie, ne riferiremo in capitoli appositi, e cioè per le forme ternarie quadratiche nel cap. sulle coniche, per le forme ternarie cubiche nel cap. sulla curva di 3.° ordine, ecc.

Trattati sulle forme ternarie, quaternarie, ecc. non ne esistono, e la teoria di tali forme non è così sviluppata come quella delle forme binarie. Fra le opere che ne trattano citeremo l'*Algebra der linearen Transf.* di Salmon-Fiedler, dove si tratta, oltrechè delle forme binarie, anche di quelle di specie superiore; il noto trattato di Geometria di Clebsch-Lindemann, e finalmente un libro di Study (*Methoden zur Theorie der ternären Formen*, Leipzig, 1889).

§ 2. — Principio di trasporto.

È interessante nella teoria delle forme ternarie il cosiddetto *principio di trasporto di* Clebsch *(Uebertragungsprincip)*, che serve a ricavare certe particolari forme invariantive ternarie, da noti invarianti o covarianti binari.

Consideriamo il caso in cui si abbia una forma fondamentale ternaria $a_x^n \equiv b_x^n \equiv \ldots$ in coordinate-punti.

Sieno $y_1 y_2 y_3$, $z_1 z_2 z_3$ due punti; le coordinate di un punto della retta che li congiunge sieno

$$x_1 = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 z_1$$
$$x_2 = \lambda_1 y_2 + \lambda_2 z_2$$
$$x_3 = \lambda_1 y_3 + \lambda_2 z_3.$$

Sostituendo questi valori in $a_x^n = 0$ e ponendo simbolicamente

$$a_y = \alpha_1 \quad , \quad a_z = \alpha_2$$

si ha $\alpha_\lambda^n = 0$, le cui radici λ corrisponderanno ai punti d'incontro della retta $(y\, z)$ colla curva

$$a_x^n = 0.$$

Si abbia ora un invariante o covariante della forma *binaria* α_λ^n e sia Π; esso sarà formato di termini ognuno dei quali ha per fattori, determinanti binari del tipo $(\alpha\,\beta)$, e fattori lineari del tipo $\alpha_\lambda\, \beta_\lambda \ldots$ dove con $\beta \ldots$ si indicano simboli equivalenti ad α.

Eguagliando Π a zero si ha la condizione perchè il gruppo di n punti nei quali la retta taglia la curva, abbia speciali proprietà proiettive; se dunque si trasforma Π in modo da contenere i coefficienti della ternaria data, e le coordinate u della retta *(y z)*, si ha una formazione invariantiva la quale eguagliata a zero, rappresenterà l'assieme

di tutte le rette u che segano la curva data in gruppi di punti aventi quelle determinate proprietà.

Ora è facile verificare che ogni determinante $(\alpha\beta$ equivale ad un determinante $(a\,b\,u)$, e ogni fattore $\alpha\lambda$ equivale ad a_x dove però le variabili x ed u non sono indipendenti ma legate dalla condizione $u_x = 0$, e perciò, chiamando $v_1\,v_2\,v_3$ le coordinate di un'altra retta che passa pel punto x, possiamo al fattore a_x sostituire il determinante $(a\,u\,v)$.

È evidente che se invece di una sola forma primitiva se ne hanno più, i calcoli e i ragionamenti precedenti sarebbero gli stessi.

Si ha dunque la seguente facile regola per trasportare dal campo binario al campo ternario, formazioni invariantive: *ogni determinante binario* $(\alpha\,\beta)$ *si sostituisca con un determinante ternario* $(a\,b\,u)$, *dove* a, b,... *sono i simboli di quelle forme ternarie, che corrispondono, secondo le formole soprascritte, ai simboli* α, β,...: *inoltre ogni fattore lineare come* $\alpha\lambda$ *si sostituisca con un determinante* $(a\,u\,v)$ *dove le* v *si considerano come delle quantità arbitrarie.*

Una siffatta formazione eguagliata a zero rappresenterà, nelle coordinate u, *una curva (o un sistema di curve se nella formazione entrano anche le* v*) le cui tangenti segano la curva o le curve date in punti godenti di speciali proprietà invariantive.*

Le applicazioni di questo principio sono svariatissime; una delle più importanti è la seguente:

Si voglia trovare l'equazione tangenziale di una curva data in coordinate-punti, $f = \alpha_x^n = 0$. *Baste-*

rà conoscere l'espressione simbolica del discriminante di una forma binaria di ordine n, α_λ^n, *e in essa mutare ogni determinante* $(\alpha\,\beta)$ *in un determinante* $(a\,b\,u)$.

Un principio di traslazione simile a questo qui sviluppato può applicarsi anche nel caso in cui la forma primitiva fondamentale sia più generalmente un *connesso* (v. § 1) cioè una forma contenente una serie di coordinate-punti e una serie di coordinate-rette.

Sia dato il connesso $a_x^n\,u_\alpha^m = 0$. Consideriamo la retta dei punti y e z, e il punto delle rette v e w, e poniamo la condizione che quella retta e questo punto appartengano al connesso. Ponendo allora, come sopra,

$$a_y = A_1 \quad , \qquad a_z = A_2$$
$$v_\alpha = \mathrm{A}_1 \quad , \qquad w_\alpha = \mathrm{A}_2$$

si ha

$$A_\lambda^n\,\mathrm{A}_\mu^m = 0$$

dove le λ e le μ sono variabili binarie.

Mediante questa relazione ad ogni retta u corrispondono m punti di una retta e ad ogni punto x corrispondono n raggi di un fascio.

Sia Π un invariante di questa forma binaria a due serie di variabili, invariante la cui forma simbolica non contenga alcun determinante del tipo $(A\,\mathrm{A})$; mutiamo, come sopra, in esso ogni determinante $(A\,B)$ in un determinante $(a\,b\,u)$, e ogni

determinante (A B) in un determinante $(\alpha\beta x)$; avremo un espressione composta di fattori simbolici $(a\,b\,u)$ e $(\alpha\beta x)$, che sarà una forma invariantiva del connesso dato, e che eguagliata a zero rappresenterà, per ogni punto x, una curva le cui tangenti segano la corrispondente curva del connesso dato in n punti aventi speciali proprietà proiettive; e per ogni retta u, una curva dai cui punti condotte le m tangenti alla corrispondente curva del connesso dato, il fascio di tali m rette ha altre speciali proprietà proiettive.

Il *principio di trasporto* fu enunciato da CLEBSCH (*Crelle*, LIX; *Geom.*); vedi anche GUNDELFINGER (*Math. Ann.*, VI), e STUDY (*Methoden*, etc. Leipzig, 1889).

§ 3. — I CONNESSI. LE COINCIDENZE.

Abbiamo già detto nei paragrafi precedenti che la figura rappresentata simbolicamente da

$$a_x^n \, u_\alpha^m = 0$$

si dice *connesso* di n^{mo} ordine, e m^{ma} classe.

Il connesso suole indicarsi col simbolo (n, m).

Ad ogni punto x corrisponde una curva in coordinate tangenziali, di m^{ma} classe; e ad ogni retta corrisponde una curva in coordinate-punti, di $n.^{mo}$ ordine.

Fra i connessi è notevole quello la cui equazione è $u_x = 0$. Esso si dice *connesso identico*.

Si dice *elemento del connesso* l'assieme di un punto e di una retta che nel connesso si corrispondono.

Se un *punto* è tale che ad esso corrispondono tutte le rette del piano, esso si dice *fondamentale*; e così *retta fondamentale* del connesso è quella cui corrispondono tutti i punti del piano.

L'insieme degli elementi, in numero doppiamente infinito, che sono comuni a due connessi, forma una *coincidenza*.

In una coincidenza a ciascuna retta corrisponde un numero finito ν di punti, e a ciascun punto un numero finito μ di rette; i numeri ν, μ si dicono *ordine e classe della coincidenza*.

La coincidenza che un connesso dato ha comune col connesso identico $u_x = 0$ si dice *coincidenza principale del connesso.*

Dati due connessi (n, m), (n', m'), l'ordine e la classe della corrispondente coincidenza sono dati da

$$\nu = n\,n' \;, \qquad \mu = m\,m'.$$

Dato un punto x, le μ rette della coincidenza si trovano cercando le tangenti comuni delle curve che nei due connessi corrispondono a quel punto; similmente per i ν punti corrispondenti ad una retta.

L'insieme degli elementi comuni a tre connessi forma *una coppia di curve.* Eliminando fra le equazioni dei tre connessi, le x, si ha l'equazione di una curva in coordinate-rette, e eliminando le u, si ha l'equazione di una curva in coordinate-punti. *La classe della prima curva è data da*

$$m\,n'\,n'' + m'\,n''\,n + m''\,n\,n'$$

e l'ordine della seconda da

$$n\,m'\,m'' + n'\,m''\,m + n''\,m\,m'$$

se $(n\,m)$ $(n'\,m')$ $(n''\,m'')$ sono i tre connessi.

Il numero degli elementi (punto e retta corrispondenti) comune a quattro connessi $(n\,m)$ $(n'\,m')$ $(n''\,m'')$ $(n'''\,m''')$ è

$$m\,m'\,n''\,n''' + m'\,m''\,n'''\,n + m''\,m'''\,n\,n' +$$
$$+ m\,m''\,n'\,n''' + m'\,m'''\,n''\,n + m\,m'''\,n''\,n'.$$

Si chiama *connesso coniugato* del dato un connesso che rispetto al dato ha la seguente relazione invariantiva: Ogni suo elemento (y, v) ha la proprietà che al punto y corrisponde nel connesso dato almeno una retta *doppia*, e alla retta v corrisponde nel connesso dato almeno un punto *doppio*.

La formazione dell'equazione del connesso coniugato si ottiene adoperando il principio di trasporto (v. § 2). Bisognerà formare il discriminante della equazione doppiamente binaria (adoperando le stesse notazioni del § 2.)

$$\varphi \equiv A_\lambda^n\ A_\mu^m, \qquad (n,\ m > 1)$$

cioè l'invariante che eguagliato a zero dà la condizione perchè tale forma abbia contemporaneamente una radice doppia in λ e una radice doppia in μ, * indi mutare col principio di trasporto ogni

* Cioè che esistano due valori λ_1 μ_1, di λ e μ, tali che λ_1 sia radice doppia di $\varphi(\lambda, \mu_1) = 0$, e μ_1 sia radice doppia di $\varphi(\lambda_1, \mu) = 0$.

determinante binario in uno ternario. *Tale invariante si ottiene eliminando* $\lambda_1 \lambda_2 \mu_1 \mu_2$ *fra le equazioni*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_1} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_2} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \mu_1} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \mu_2} = 0.$$

Il suo grado è $2[m n + 2(m-1)(n-1)]$.

Se uno dei numeri n, m, *p. es.* m *è eguale ad 1, allora*

$$\varphi = A_\lambda^n \, A_\mu = P_1 \mu_1 + P_2 \mu_2$$

e l'invariante richiesto è il risultante di P_1 *e* P_2.

Il connesso coniugato del connesso (1, 1), $a_x u_\alpha = 0$ *è:*

$$(a\, b\, u)(\alpha\, \beta\, x) = 0.$$

Il connesso coniugato del connesso (2, 1) $a^2_x u_\alpha = 0$ *è:*

$$(a\, b\, u)^2 (c\, d\, u)^2 (\beta\, \gamma\, x)(\alpha\, \delta\, x) = 0.$$

Il connesso coniugato del connesso (2, 2), $a^2_x u^2_\alpha = 0$ *è:*

$$(W + 3\, U^2)^3 - 27\,(U\, W - U^3 - V^2)^2 = 0$$

dove

$$U = -\frac{1}{12}(a\, b\, u)^2 (\alpha\, \beta\, x)^2$$

$$V = -\frac{1}{12}(a\, b\, u)(b\, c\, u)(c\, a\, u)(\alpha\, \beta\, x)(\beta\, \gamma\, x)(\gamma\, \alpha\, x)$$

$$W = \frac{1}{8}(a\, b\, u)^2 (c\, d\, u)^2 (\alpha\, \gamma\, x)^2 (\beta\, \delta\, x) - 9\, U^2,$$

Si può dire che in certo modo il connesso coniugato sta al connesso dato, come l'assieme delle tangenti ad una curva sta ai punti della curva stessa.

Il connesso coniugato del coniugato non è altro che il primitivo.

Gli elementi di due connessi, l'uno coniugato dell'altro si corrispondono biunivocamente.

Il numero

$$p = \frac{(n-1)\,(n-2)}{2}\,\frac{(m-1)\,(m-2}{2}$$

è caratteristico per un connesso generale e si chiama GENERE.

In un connesso (1, 2), $a_x\, u^2_\alpha = 0$ *i punti le cui coniche corrispondenti si scindono in due punti formano la curva di 3.° ordine*

$$a_x\, b_x\, c_x\, (\alpha\, \beta\, \gamma)^2 = 0,$$

e le rette che congiungono fra loro i due punti in cui ciascuna di tali coniche, si scinde, sono le tangenti della curva di 3.ª classe

$$(a\, b\, c)\, (\alpha\, \beta\, \gamma)\, u_\alpha\, u_\beta\, u_\gamma = 0,$$

mentre le stesse coppie di punti si trovano a loro volta sulla curva di 3.° ordine

$$(a\, b\, c)\, (\alpha\, \beta\, x\;\, (\beta\, \gamma\, x)\, (\gamma\, a\, x) = 0.$$

Nella coincidenza principale del connesso (1, 2), ad ogni punto x corrispondono due rette passanti per esso, e ad ogni retta corrisponde un punto su essa situate. I punti che in tale coincidenza prin-

cipale corrispondono a due rette coincidenti sono situati su di una curva di 4.° ordine la cui equazione è

$$a_x b_x (\alpha \beta x) = 0.$$

La teoria dei connessi si può dire fondata da CLEBSCH, (v. *le lezioni di Geom.* di CLEBSCH-LINDEMANN).

Il connesso (1, 1) fu studiato da CLEBSCH-GORDAN (*Math. Ann.*, I) e il connesso (1, 2 da GODT (*Diss. Göttingen*, 1873); indi molti risultati di GODT furono generalizzati al connesso (1, n), nelle citate lezioni di Geometria di CLEBSCH-LINDEMANN.

§ 4. — ALCUNE PROPRIETÀ GENERALI SULLE FORME ALGEBRICHE QUALUNQUE. JACOBIANI. HESSIANI. LEGGE D'INERZIA DELLE FORME QUADRATICHE. APOLARITÀ.

Vogliamo raccogliere in questo paragrafo alcune proprietà delle forme algebriche con un numero qualunque di variabili e con grado determinato, ovvero con grado qualunque, ma determinato numero di variabili.

Date r forme di grado qualunque con r variabili, (di specie r) rappresentiamole simbolicamente con

$$a_x^n, \quad b_x^{n'}, \quad c_x^{n''} \ldots$$

adoperando criteri di rappresentazione simbolica analoghi a quelli adoperati per le forme binarie e ternarie.

Fra le più semplici formazioni invariantive di tali forme sono da annoverarsi l'*Jacobiano* o *determinante funzionale delle r forme*, espresso simbolicamente da

$$(a\, b\, c \dots)\, a_x^{n-1}\, b_x^{n'-1}\, c_x^{n''-1} \dots$$

e l'*Hessiano di ciascuna forma*, espresso da

$$(a\, a'\, a'' \dots)^2\, a_x^{n-2}\, a'^{n-2}_x \dots$$

dove con $a'\, a'' \dots$ si intendono simboli equivalenti ad a.

Queste formazioni si possono esprimere facilmente mediante le derivate delle forme date (vedi *Repertorio*, I, pag. 68-71).

Un teorema importante sugli Jacobiani è il seguente di Clebsch:

I determinanti funzionali formati cogli r determinanti funzionali di $r+1$ *forme di r variabili sono proporzionali alle forme primitive* (Clebsch, *Crelle* LXIX, LXX; Rosanes, *Id.* LXXV, Pasch, *Id.* LXXX).

Una proprietà interessante degli *Hessiani* è quella che si riferisce al loro identico annullarsi.

Solo per le forme binarie, ternarie e quaternarie sussiste il teorema:

L'annullarsi dell'Hessiano è condizione necessaria e sufficiente perchè la forma data si possa con trasformazione lineare, ridurre ad un'altra

con una variabile di meno. Questo teorema era stato creduto vero in generale da HESSE (*Crelle*, XLII, LVI) e da altri (BALTZER, *1.ª ediz. del trattato sui determinanti*; SALMON-FIEDLER, *Alg. der lin. Transf.* 1863); fu poi dimostrato vero solo per $r = 2, 3, 4$ da GORDAN-NOETHER (*Math. Ann. X*) (v. anche per altri particolari il § 65 del mio trattato sui determinanti).

Un'altra proprietà degli Hessiani è la seguente:

L'Hessiano dell'Hessiano di una forma cubica a quantesivoglia variabili è una combinazione lineare della forma data e del proprio Hessiano.

Questo teorema fu dimostrato per il campo ternario in BAUER (*Münch. Akad.*, XIV, 1883), per il campo quaternario in ROHN (*Math. Ann.*, XXIII) e pel caso generale si trova in VOSS (*Math. Ann.*, XXVII).

L'Hessiano di una forma quadratica qualunque

$$f = \sum_{ij}^{1 \dots n} a_{ij} x_i x_j$$

è il suo discriminante, di cui la espressione mediante i coefficienti effettivi è

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

Il sistema completo di una sola forma quadratica, di specie qualunque, è formato oltrecchè di Δ,

del contravariante:

$$F = \begin{vmatrix} 0 & u_1 & u_2 & u_3 & \ldots \\ u_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots \\ u_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

dove le u sono le variabili contragredienti alle x, cioè che nella trasformazione lineare, si comportano come i determinanti minori della matrice formata con $r-1$ serie diverse di variabili di specie r.

Se $f=0$ si interpreta come la equazione di una varietà di 2.° ordine nello spazio a $r-1$ dimensioni, il contravariante $F=0$ darà la equazione della stessa varietà, espressa nell'elemento duale al punto in quello spazio.

Per gli invarianti simultanei di due quadratiche a r variabili si vegga Segre *(Math. Ann.* XXIV).

Una forma quadratica può in infiniti modi ridursi ad una combinazione lineare di quadrati (forma canonica):

$$A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 + \ldots + A_r x_r^2$$

Se tale riduzione la si vuol fare con sostituzione ortogonale, cioè in modo che resti inalterata la forma speciale

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_r^2,$$

allora i coefficienti $A_1 A_2 \ldots$ della forma ridotta,

sono, col segno contrario, le radici λ *dell'equazione*

$$\left| \begin{array}{llll} a_{11}+\lambda, & a_{12}, & a_{13}, & \ldots \\ a_{21}, & a_{22}+\lambda, & a_{23}, & \ldots \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}+\lambda, & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array} \right| = 0.$$

Se i coefficienti a_{ij} *sono tutti reali, le radici* λ *di tale equazione sono reali.*

Per la trasformazione delle forme quadratiche in un'espressione lineare di quadrati, è interessante il teorema conosciuto sotto il nome di *legge d'inerzia delle forme quadratiche.*

Se una forma quadratica di r variabili a coefficienti reali, si trasforma, con sostituzioni lineari reali, in due modi diversi in espressioni contenenti i soli quadrati delle variabili, il numero dei termini con segno positivo è sempre il medesimo.

Questo teorema fu enunciato da SYLVESTER (*Phil. Mag.*, 1852, II, pag. 138; *Phil. Trans.*, 1853, pag. 407); indi BORCHARDT fece sapere (*Crelle*, LIII, pag. 275) che una legge simile era già conosciuta da JACOBI fin dal 1847. Sullo stesso teorema si può vedere HERMITE (*Crelle*, LIII, pagina 271), GUNDELFINGER (*Crelle*, XCI), PRESLE (*Soc. math.*, XV, pag. 179) etc.

La teoria dell'*apolarità* da noi esposta per il caso delle forme binarie (v. Cap. II) si può estendese al caso delle forme qualunque.

Si abbiano due forme di r variabili, l'una in coordinate x, a_x^n di ordine n, l'altra in coordinate

contragredienti u, u_α^n della medesima classe n. Si dirà che le due forme sono *coniugate* (ROSANES, *Crelle* LXXV) ovvero *apolari* REYE, *Math. Ann.* IV) se è zero l'invariante bilineare a_α^n.

Della forma data si prenda la prima polare rispetto ad un polo y, poi di essa la polare rispetto ad un polo z, e così di seguito, sino ad ottenere la polare mista

$$a_y \, a_z \, a_t \ldots$$

lineare in ciascuna delle serie di variabili

$$y, \; z, \; t, \ldots$$

Se tale polare mista è zero, la forma data è apolare con quella che in coordinate u rappresenta l'assieme degli n poli y, z, t, ... Si ha così l'apolarità di una forma *con un'altra decomposta in n fattori.* L'ennagono formato cogli n punti

$$y, \; z, \; t, \ldots$$

si dice *ennagono polare* rispetto alla varietà geometrica rappresentata da $a_x^n = 0$.

Gli n vertici dell'ennagono polare possono indefinitamente variare; dati $n - 1$ di essi, l'ultimo non è neanche determinato in modo unico, perchè esso evidentemente si trova sulla varietà lineare la cui equazione (in x) è:

$$a_y \, a_z \, a_t \ldots a_x = 0;$$

per le forme binarie invece ciò non si verificava.

Si possono però trovare dei gruppi di $n+1$ punti tali che ogni gruppo di n punti in esso contenuto, costituisca i vèrtici di un ennagono polare. (Per $n=2$, e $r=3$, questo teorema corrisponde a quello dei triangoli autoconiugati rispetto ad una conica; vedi cap. IV.)

Limitandoci al solo campo ternario ($r=3$) si ha: *Una forma ternaria di ordine n si può esprimere mediante le n^{me} potenze di*

$$\frac{n(n+1)}{1.2}$$

forme lineari, che corrispondono alle rette che congiungono a due a due gli $n+1$ punti indicati.

Questo teorema serve a dare un'interessante applicazione alla teoria dell'apolarità di una forma rispetto ad altre decomponibili in fattori lineari.

Per due forme quadratiche a^2_x, u^2_α di r variabili, *non decomponibili in fattori lineari*, è notevole il seguente teorema di Hesse (*Crelle*, XLV): *L'apolarità delle due forme a^2_x, u^2_α è la condizione perchè con una trasformazione lineare, una delle forme si riduca a contenere solo i quadrati delle variabili, e l'altra solo i prodotti.*

Per la teoria dell'*apolarità,* rimandiamo oltre che alle opere già citate qui e nel cap. II, anche ai lavori di Franz Meyer (*Apolarität.* ecc. Tübingen, 1883; e *Bericht über Invariantenth.*, Jahresb. der deutsch. Math. Vereinigung, I, 256).

CAPITOLO IV.

Le coniche.

§ 1. — Generazione proiettiva delle coniche. Proprietà che ne dipendono immediatamente.

La teoria delle coniche può essere trattata con metodo sintetico proiettivo, e con metodo analitico.

Con metodo proiettivo le coniche possono essere definite nel seguente modo:

S'immaginino due piani omologici (v. Cap. I) sovrapposti o no, col centro S e coll'asse s d'omologia. Ai punti di un cerchio situati in un piano, corrispondono nell'altro piano i punti di una curva che si chiama *conica* e che ha le due proprietà fondamentali cioè:

1 *Ogni retta del suo piano la sega in due punti, o in un punto solo o in nessuno;*

2) *Da ogni punto del piano si possono condurre ad essa due tangenti, o una, o nessuna.*

Da questa definizione risulta quest' altra, che è quella che si poneva a fondamento di tutta la teoria, dagli antichi geometri greci: la conica è la

curva generata dalla intersezione di un piano con un cono circolare; il cerchio e la conica sono così collocati in posizione prospettiva.

Le tangenti al cerchio corrispondono alle tangenti alla conica.

Se nel primo dei due piani omologici la retta limite (retta che corrisponde alla retta all'infinito del secondo piano) sega il cerchio in due punti, la conica corrispondente avrà due punti reali all'infinito e si chiama IPERBOLE; *se la retta limite è tangente al cerchio, la conica ha un sol punto reale all'infinito e si chiama* PARABOLA, *e se infine la retta limite non taglia il cerchio, la conica non ha punti reali all'infinito e si chiama* ELLISSE.

Definendo le coniche come le curve intersezioni di un piano con un cono a base circolare, cioè come la figura prospettiva di un cerchio, le tre distinzioni di coniche corrispondono alle tre diverse posizioni che può assumere, rispetto al cono, il piano segante; questo cioè può o tagliare tutte le generatrici *(ellisse)*, o essere parallelo ad *una* generatrice *(parabola)*, o essere parallelo a *due* generatrici *(iperbole)*.

Un'altra definizione proiettiva delle coniche è la seguente:

Si abbiano in un piano due fasci di raggi proiettivi, a centri distinti O, O'. Le intersezioni dei raggi corrispondenti formano una CONICA *che passa per i due centri dei fasci, e che ha per tangente in questi punti la retta corrispondente alla congiungente O O'.*

Correlativamente;

Si abbiano in un piano due punteggiate proiettive, a sostegni distinti. Le rette che congiungono i punti corrispondenti sono le tangenti di una CONICA *che tocca le due rette date nei punti che corrispondono alla loro comune intersezione.*

Un'altra definizione delle coniche è anche la seguente, per la quale occorrono le considerazioni del Cap. I, § 3:

Una conica è il luogo dei punti uniti di una dualità involutoria o polarità.

Ovvero anche:

Una conica è l'inviluppo delle rette unite di una polarità.

La parabola ha per tangente la retta all'infinito del piano.

Vi sono due rette del piano, le quali si incontrano a distanza finita, e che sono tangenti all'iperbole nei suoi due punti all'infinito. Tali rette si chiamano *assintoti* dell'iperbole.

Se il centro O' è all'infinito in una data direzione il raggio del fascio (O') che corrisponde al raggio di (O) parallelo alla data direzione, potrà essere al finito o all'infinito; nel primo caso si ha un'iperbole, nel secondo una parabola.

Se ambedue i centri O, O' sono all'infinito in due diverse direzioni, la conica è una iperbole.

Le rette congiungenti le coppie di punti corrispondenti in due punteggiate simili, inviluppano una parabola.

Da queste definizioni risulta subito:

Il rapporto anarmonico delle quattro rette che da quattro punti della conica vanno ad un punto variabile della stessa è costante (tal rapporto suol

chiamarsi RAPPORTO ANARMONICO DEI QUATTRO PUNTI DELLA CONICA).

Il rapporto anarmonico dei quattro punti in cui quattro tangenti di una conica sono segate da una tangente variabile è costante al variare di questa (RAPPORTO ANARMONICO DELLE QUATTRO TANGENTI DELLA CONICA).

Il rapporto anarmonico di quattro tangenti di una conica è eguale a quello dei quattro punti di contatto.

Le tangenti di una parabola segano due tangenti fisse della stessa, in punti costituenti due punteggiate simili.

Due tangenti fisse di una parabola sono segate da tutte le altre tangenti in parti proporzionali.

Le rette che congiungono i punti corrispondenti di due punteggiate simili situate in un piano, inviluppano una parabola tangente alle due rette che sono sostegni delle punteggiate.

In una conica, il prodotto dei segmenti che una tangente variabile determina in due tangenti parallele fisse, a partire dai loro punti di contatto, è costante.

§ 2. — PROPRIETÀ FONDAMENTALI PROIETTIVE DELLE CONICHE. TEOREMI DI PASCAL, BRIANCHON, DESARGUES.

Se un esagono è iscritto in una conica, le tre coppie di lati opposti si segano in tre punti di una stessa retta (teor. di PASCAL (1640)).

Se un esagono è circoscritto ad una conica, le rette che congiungono le tre coppie di vertici opposti concorrono in uno stesso punto (teor. di Brianchon (1806)).

Se due triangoli sono omologici, i punti nei quali i lati dell'uno segano i lati non corrispondenti dell'altro, appartengono ad una conica, e le rette che dai vertici dell'uno vanno ai vertici non corrispondenti dell'altro toccano un'altra conica (teor. di Steiner).

Se un triangolo si deforma in modo che i suoi lati ruotino intorno a punti fissi, mentre due vertici scorrano su due rette fisse, il terzo vertice descrive una conica (teor. di Maclaurin (1721)).

Se un triangolo si deforma in modo che i suoi vertici scorrano su rette fisse, mentre due lati rotino intorno a punti fissi, il terzo lato inviluppa una conica.

Se un pentagono è iscritto in una conica, il punto d' incontro di due lati non consecutivi, quello d'incontro di altri due lati non consecutivi, e il punto d' incontro del quinto lato colla tangente nel vertice opposto sono in linea retta e correlativamente.

Se un quadrangolo è iscritto in una conica il punto comune alle tangenti in due vertici opposti è in linea retta coi due punti d'incontro delle coppie di lati opposti.

Il quadrilatero completo formato da quattro tangenti di una conica, e il quadrangolo completo formato dai quattro punti di contatto, hanno il medesimo triangolo diagonale (v. Cap. II).

Se un quadrilatero è circoscritto ad una conica,

le rette che uniscono i punti di contatto di due lati opposti, passano pel punto comune alle diagonali. Per questo punto passano anche le diagonali del quadrilatero iscritto e avente per vertici i quattro punti di contatto dei quattro lati del primo, e le quattro diagonali formano un gruppo armonico. Infine i punti d'incontro delle coppie di lati opposti dei due quadrilateri, stanno in linea retta, e formano anche un gruppo armonico.

Se un triangolo è iscritto in una conica, le tangenti nei vertici incontrano i lati opposti in punti in linea retta.

Se un triangolo è circoscritto ad una conica le rette che dai vertici vanno ai punti di contatto dei lati opposti concorrono in un punto.

Una trasversale incontra una conica e i lati opposti di un quadrangolo iscritto in tre coppie di punti coniugati in involuzione (teor. di Desargues) *e correlativamente.*

Se un quadrangolo, restando sempre iscritto in una conica, si deforma in modo che tre dei suoi lati ruotino intorno a tre punti fissi in linea retta, anche il quarto roterà intorno ad un altro fisso della stessa retta.

In un triangolo circoscritto, ogni lato è diviso armonicamente dal suo punto di contatto e dalla retta che unisce i punti di contatto degli altri due, e correlativamente per un triangolo iscritto.

Se la corda di contatto di due tangenti passa pel punto di concorso di due altre tangenti, le prime sono separate armonicamente dalle altre due, e reciprocamente.

Se due tangenti di una conica concorrono in un punto della corda di contatto di due altre, viceversa il punto d' incontro di queste, sarà sulla corda di contatto delle due prime.

Il punto d' incontro S di due tangenti, e la corda di contatto s si chiamano rispettivamente *polo e polare*, cioè S si dice *polo* di s e s *polare* di S.

Il polo e la polare rispetto ad una conica coincidono col polo e la polare in una polarità di cui la conica è il luogo dei punti uniti.

La polare s di un punto S può anche definirsi come il luogo del punto d'incontro delle coppie di lati opposti d'un quadrangolo iscritto, le cui diagonali passino per S, ovvero il luogo di un punto separato armonicamente da S e dalla conica.

La polare di un punto della conica è la tangente in esso.

Se un punto si muove su di una retta, la sua polare rota intorno ad un punto.

Due punti di cui ciascuno stia sulla polare dell'altro si dicono *coniugati o reciproci rispetto alla conica*, e così due rette di cui ciascuna passi pel polo dell'altra si dicono *coniugate o reciproche.*

Se due punti sono reciproci anche le loro polari sono reciproche.

Un triangolo di cui ciascun vertice è il polo del lato opposto si dice un *triangolo autoconiugato rispetto alla conica.*

I punti diagonali del quadrangolo completo formato da quattro punti di una conica, formano un triangolo coniugato; e correlativamente, le rette diagonali del quadrilatero completo formato da

quattro tangenti di una conica, formano un triangolo coniugato.

Se un triangolo è iscritto in una conica, una retta reciproca (rispetto alla conica) ad un lato, taglia gli altri due lati in due punti reciproci (Staudt).

Se due coppie di vertici opposti di un quadrilatero completo si compongono di punti reciproci in una polarità (v. Cap. I, § 3) *rispetto ad una conica reale o immaginaria, anche i rimanenti due vertici opposti saranno reciproci in quella polarità* (Hesse).

Se due triangoli sono polari l'uno dell'altro in una polarità, essi sono omologici, e viceversa due triangoli omologici sono polari l'uno dell'altro in una polarità.

Per due triangoli ognuna delle tre proprietà seguenti ha per conseguenza le altre due:

1.° *Che sieno coniugati a sè stessi (autoconiugati) in una stessa polarità;*

2.° *Che sieno iscritti in una stessa conica;*

3.° *Che sieno circoscritti ad una stessa conica.*

§ 3. — Formole principali di geometria analitica delle coniche.

La definizione analitica delle coniche è la seguente:

Sieno $x_1\, x_2\, x_3$ le coordinate omogonee di un punto del piano.

La *conica* è il luogo geometrico rappresentato analiticamente da una relazione di 2.° grado fra

le x del tipo

$$f(x) = \sum_{1}^{3} a_{ij}\, x_i\, x_j = 0 \qquad (a_{ij} = a_{ji})$$

dove $a_{11}, a_{22}, \ldots$ sono coefficienti costanti *(equazione della conica)*.

Perciò le coniche si sogliono anche chiamare *luoghi di 2.° ordine.*

Se il triangolo fondamentale delle coordinate è un triangolo autoconiugato l'equazione della conica si riduce alla forma canonica $\sum a_i \,.\, x^2_i = 0$.

Supponiamo ora invece che u_1, u_2, u_3 sieno le coordinate omogenee di una retta del piano; una simile relazione di 2.° grado fra le u rappresenterà un *inviluppo* (cioè una curva che ha per tangenti tutte le rette le cui coordinate soddisfanno a quella relazione, v. Cap. I, pag. 41) che è anche una *conica;* perciò si dice che questa è anche *un inviluppo di 2.ª classe.*

La equazione in coordinate di *punti* si suol chiamare *equazione puntuale*, e quella in coordinate di rette, *equazione tangenziale.*

Dall'equazione della conica risulta che essa è determinata fissando i valori dei rapporti di *cinque* coefficienti dell'equazione, all'ultimo.

Una conica è determinata in un numero finito di modi se sono dati r punti per cui deve passare e s rette che deve toccare, dove $r + s = 5$.

Propriamente:

Per 5 punti passa una sola conica.

Per 4 punti passano due coniche tangenti ad una retta data.

Per 3 punti passano quattro coniche tangenti a due rette date.

Per 2 punti passano quattro coniche tangenti a tre rette date.

Per un punto passano due coniche tangenti a quattro rette date.

Vi è una sola conica tangente a cinque rette date.

Poniamo

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \textit{(Discriminante)}$$

e chiamiamo A_{ij} i complementi algebrici degli elementi di questo determinante; chiamiamo poi B il complemento A_{33}.

L'equazione della conica in coordinate cartesiane x, y, si ottiene dall'equazione generale della pag. 132, ponendo $x_3 = 1$, $x_1 = x$, $x_2 = y$. Sia ω l'angolo dei due assi cartesiani obliqui, e poniamo inoltre:

$$C = a_{11} + a_{22} - 2\, a_{12} \cos \omega.$$

Si ha allora il seguente risultato importante:

Per qualunque trasformazione di coordinate cartesiane le espressioni

$$\frac{A}{\operatorname{sen}^2 \omega}, \quad \frac{B}{\operatorname{sen}^2 \omega}, \quad \frac{C}{\operatorname{sen}^2 \omega}$$

restano inalterate (sono invarianti).

Di qui si ha:

Per qualunque trasformazione di coordinate cartesiane le quantità A, B, C conservano sempre il loro segno.

Per il caso di coordinate ortogonali la quantità C diventa $a_{11} + a_{22}$; dunque:

Passando da assi ortogonali ad altri anche ortogonali, la quantità $a_{11} + a_{22}$ resta inalterata.

Secondo i valori dei coefficienti (che si suppongono *reali*) il luogo rappresentato dall'equazione di 2.° grado, avrà forme diverse. Mantenendo le definizioni di poc'anzi cioè quelle di *ellisse*, *parabola*, *iperbole* (vedi sopra) si hanno i seguenti risultati:

Supposto A diverso da zero, se è $B > 0$, si ha un'ellisse, se è $B > 0$ si ha un'iperbole, se è $B = 0$ si ha una parabola.

Nel caso $B > 0$ l'ellisse è formata di punti reali solo quando è $A a_{11} < 0$ e $A a_{22} < 0$ (queste due disuguaglianze sono, essendo $B > 0$, l'una conseguenza dell'altra); in altro caso si ha un'ellisse i cui punti sono immaginari (ellisse immaginaria); nei casi poi $B < 0$ ovvero $B = 0$ si ha sempre una iperbole o una parabola reale, purchè A sia diverso da zero.

Finalmente se $A = 0$ si ha in ogni caso una coppia di rette, e non più una conica propria; questa coppia è di rette immaginarie incontrantisi in un punto reale a distanza finita se è $B > 0$; è di rette reali incontrantisi in un punto reale a distanza finita, se è $B < 0$, ed è infine di due rette parallele reali o immaginarie, ovvero di due rette coincidenti in un' unica retta reale, se $B = 0$.

Se la conica è ellisse reale, la sua equazione (in coord. non omog.) potrà con spostamento degli assi

coordinati, porsi sotto la forma

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;$$

e se è ellisse immaginaria la sua equazione può ridursi a

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1.$$

Se la conica è iperbole, la sua equazione potrà ridursi, con spostamento di assi, alla forma

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Se la conica è parabola, la sua equazione potrà ridursi alla forma semplice

$$y^2=p\,x.$$

Un'equazione generale di 2.° grado (del solito tipo) in cui i termini a secondo grado formano un quadrato perfetto, rappresenta una parabola (se A è diverso da zero).

Un'equazione omogenea, razionale, intera, di 2.° grado fra x e y rappresenta una coppia di rette passanti per l'origine.

Perchè l'equazione di 2.° grado rappresenti una coppia di rette è necessario che il suo primo membro si scinda in due fattori razionali interi di 1.° grado in x e y.

L'equazione generale di 2.° grado rappresenta un cerchio quando, essendo A diverso da zero, è

$a_{22} = a_{11}$ *e* $a_{12} = a_{11} \cos \omega$ *essendo* ω *l'angolo degli assi. Il cerchio sarà reale o immaginario secondochè è* $A a_{11} < 0$ *ovvero* $A a_{11} > 0$.

Per assi ortogonali, deve quindi essere

$$a_{11} = a_{22} \quad a_{12} = 0.$$

L'equazione del cerchio per assi ortogonali, può porsi sotto la forma

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2,$$

dove α, β *sono le due coordinate del centro, e* r *è il raggio; per assi obliqui l'equazione del cerchio può invece ridursi alla forma*

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + 2(x - \alpha)(y - \beta)\cos\omega = r^2$$

essendo ω *l'angolo degli assi.*

Data l'equazione generale del cerchio

$$a_{11}(x^2 + \cos\omega\, xy + y^2) + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

le coordinate del centro sono

$$\alpha = \frac{-a_{13} + a_{23}\cos\omega}{a_{11}\operatorname{sen}^2\omega}$$

$$\beta = \frac{a_{13}\cos\omega - a_{23}}{a_{11}\operatorname{sen}^2\omega}$$

e il raggio è dato da

$$r^2 = \frac{a_{13}^2 + a_{23}^2 - 2a_{13}a_{23}\cos\omega - a_{11}a_{33}\operatorname{sen}^2\omega}{a_{11}^2\operatorname{sen}^2\omega}.$$

Un'iperbole in cui gli assintoti sono ortogonali si dice *iperbole equilatera.*

Per l'iperbole equilatera deve essere

$$a_{11} + a_{22} - 2\, a_{12} \cos \omega = 0.$$

Tutti i cerchi del piano sono segati dalla retta all'infinito nei due medesimi punti immaginari, che si dicono PUNTI CICLICI *del piano.*

Una conica è cerchio se passa per i due punti ciclici.

L'equazione tangenziale dei due punti ciclici è

$$u^2 + v^2 = 0.$$

I coefficienti angolari delle tangenti al cerchio in tali punti sono $\mathrm{tg}\, \alpha = \pm\, i = \pm \sqrt{-1}$; perciò: *le tangenti di tutti i cerchi nei punti ciclici sono da considerarsi tutte parallele.*

L'angolo α *è da considerarsi infinitamente grande.*

L'equazione della tangente alla conica in un punto di coordinate $x'\, y'$ *è*

$$(a_{11}\, x' + a_{12}\, y' + a_{13})\, x + (a_{21}\, x' + a_{22}\, y' + a_{23})\, y + \\ + (a_{31}\, x' + a_{32}\, y' + a_{33}) = 0.$$

La normale, cioè la perpendicolare alla tangente nel punto di contatto, ha per equazione

$$\frac{x - x'}{a_{11}\, x' + a_{12}\, y' + a_{13}} = \frac{y - y'}{a_{21}\, x' + a_{22}\, y' + a_{23}}.$$

Indicando con $f(x\, y)$ il primo membro della equazione della conica, *le tangenti che da un punto*

$x' y'$ possono condursi alla conica sono reali e distinte, reali e coincidenti, o immaginarie, secondochè il prodotto

$$A f(x' y')$$

è negativo, nullo, o positivo.

La condizione perchè la retta di equazione

$$u x + v y + 1 = 0$$

sia tangente alla conica data dalla solita equazione, è

$$A_{11} u^2 + 2 A_{12} uv + A_{22} v^2 + 2 A_{13} u + 2 A_{23} v + A_{33} = 0$$

dove A_{11}, A_{22}, ... sono i complementi algebrici degli elementi omonimi nel determinante A.

Se $u\ v$ si interpretano come coordinate di rette, la precedente relazione è la *equazione tangenziale della conica.*

La equazione

$$(a_{11} x' + a_{12} y' + a_{13}) x + (a_{21} x' + a_{22} y' + a_{23}) y + \\ + (a_{31} x' + a_{32} y' + a_{33}) = 0$$

dove $x' y'$ non siano più le coordinate di un punto della curva, ma in generale di un qualunque punto del piano, rappresenta la *polare* (v. § 2) del punto $x' y'$ *(polo)* rispetto alla curva.

Perchè due punti $(x' y')$ $(x'' y'')$ sieno coniugati (v. § 2) *deve verificarsi la condizione*

$$a_{11} x' x'' + a_{12} (x' y'' + x'' y') + a_{22} y' y'' + \\ + a_{13} (x' + x'') + a_{23} (y' + y'') + a_{33} = 0.$$

Il polo della retta

$$\lambda x + \mu y + \nu = 0$$

ha per coordinate

$$x' = \frac{A_{11}\lambda + A_{12}\mu + A_{13}\nu}{A_{13}\lambda + A_{23}\mu + A_{33}\nu}, \quad y' = \frac{A_{12}\lambda + A_{22}\mu + A_{32}\nu}{A_{13}\lambda + A_{23}\mu + A_{33}\nu}.$$

La condizione perchè due rette

$$\lambda' x + \mu' y + \nu' = 0$$
$$\lambda'' x + \mu'' y + \nu'' = 0$$

sieno coniugate è

$$\begin{vmatrix} 0 & \lambda' & \mu' & \nu' \\ \lambda'' & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \mu'' & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \nu'' & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Il luogo dei punti medii di un sistema di corde parallele a una stessa direzione è una retta, che si chiama DIAMETRO *della conica.*

Il diametro è la polare del punto all'infinito nella direzione delle corde bisecate da esso.

Tutti i diametri passano per un punto che si chiama CENTRO *della conica. Ogni retta passante pel centro è un diametro.*

Il centro è il polo della retta all'infinito del piano.

Le tangenti nei punti ove un diametro seca la curva sono parallele alle corde da esso bisecate.

Se l'origine delle coordinate è il centro della conica, l'equazione di questa mancherà dei termini a primo grado nelle coordinate.

L'equazione del diametro che biseca le corde parallele alla retta $\frac{x}{y} = \frac{m}{n}$ *è*

$$(a_{11}m + a_{12}n)x + (a_{21}m + a_{22}n)y + (a_{31}m + a_{32}n) = 0.$$

In particolare, *i diametri che bisecano le corde parallele agli assi sono:*

$$a_{11}\,x + a_{12}\,y + a_{13} = 0$$
$$a_{21}\,x + a_{22}\,y + a_{23} = 0.$$

Nella parabola il centro è all'infinito, e quindi tutti i diametri sono paralleli.

Le coordinate $x_0\,y_0$ *del centro di una conica sono*

$$x_0 = \frac{a_{23}\,a_{21} - a_{22}\,a_{13}}{a_{11}\,a_{22} - a_{12}^2}$$

$$y_0 = \frac{-a_{13}\,a_{11} + a_{12}\,a_{13}}{a_{11}\,a_{22} - a_{12}^2}\,.$$

Nell'ellisse e nell'iperbole due *diametri* si dicono *coniugati* se l'uno biseca le corde parallele all'altro.

Le infinite coppie di diametri coniugati formano una involuzione, di cui i raggi doppi sono gli assintoti (reali nell'iperbole, immaginarii nell'ellisse).

*Fra i coefficienti angolari** $\frac{m}{n}, \frac{m'}{n'}$ *di due diametri coniugati sussiste la relazione*

$$a_{11}\,m\,m' + a_{12}\,(m\,n' + m'\,n) + a_{22}\,n\,n' = 0.$$

---

* Propriamente si suol chiamare coefficiente angolare di una retta, il rapporto (col segno contrario) fra i coefficienti

Il coefficiente angolare dei diametri della parabola è

$$-\frac{a_{12}}{a_{11}} \quad \text{ovvero} \quad -\frac{a_{22}}{a_{12}}.$$

I coefficienti angolari $\frac{m}{n}$ *dei due assintoti dell'iperbole sono dati dall'equazione*

$$a_{11}\, m^2 + 2\, a_{12}\, m\, n + a_{22}\, n^2 = 0.$$

L'equazione complessiva delle parallele agli assintoti condotte per l'origine è:

$$a_{11}\, x^2 + 2\, a_{12}\, x\, y + a_{22}\, y^2 = 0.$$

È costante l'area del triangolo formato dalla tangente e dai due assintoti nell'iperbole.

Nell'ellisse e nell'iperbole, fra le infinite coppie di diametri coniugati, ve n'è una formata di diametri fra loro ortogonali: questi due diametri si chiamano ASSI, e VERTICI sono i punti in cui essi incontrano la curva.

Nella parabola vi è un solo diametro perpendicolare alle corde da esso bisecate, e si chiama anche ASSE.

Gli assi sono sempre reali, e sono assi di simmetria per la curva.

Nell'iperbole gli assi sono le bisettrici degli angoli degli assintoti. Uno di essi taglia la curva in

---

di x e y nell'equazione della retta in coordinate cartesiane *ortogonali*. Noi però quì continuiamo ad adoperare la stessa denominazione anche per coordinate *oblique*.

due punti reali e si dice ASSE REALE *o* FOCALE *o* TRASVERSO*;* l'altro si dice ASSE IMMAGINARIO.

L'equazione complessiva degli assi della conica è

$$(a_{11} \cos \omega - a_{12})(x - x_0)^2 + (a_{11} - a_{22})(x - x_0)(y - y_0) - \\ - (a_{22} \cos \omega - a_{12})(y - y_0)^2 = 0$$

dove ω *è l'angolo degli assi coordinati, e* $x_0\, y_0$ *sono le coordinate del centro.*

L'equazione dell'asse della parabola è

$$a_{11} x + a_{12} y + a_{13} + \\ + \frac{(a_{12} a_{23} - a_{22} a_{23}) + (a_{13} a_{12} - a_{11} a_{23}) \cos \omega}{a_{11} + a_{22} - 2 a_{12} \cos \omega} = 0.$$

Se gli assi coordinati sono due diametri coniugati della conica (in particolare coincidono cogli assi stessi della conica) l'equazione di questa avrà la forma

$$\frac{x^2}{a_1^2} \pm \frac{y^2}{b_1^2} = 1;$$

le quantità a_1, b_1 *si chiamano le lunghezze dei semidiametri coniugati.*

Se gli assi coordinati sono gli assi della conica, le quantità $a_1\, b_1$ si chiamano *semiassi. Se l'asse incontra la conica, i semiassi sono le distanze del centro dai punti d'incontro.*

Le lunghezze dei semiassi si trovano colle formole

$$\sqrt{-\frac{A}{B\, \rho_1}}, \quad \sqrt{-\frac{A}{B\, \rho_2}}$$

dove $\rho_1\, \rho_2$ *sono le due radici dell'equazione*

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \rho & a_{12} - \rho \cos \omega \\ a_{12} - \rho \cos \omega & a_{22} - \rho \end{vmatrix} = 0$$

ovvero

$$\operatorname{sen}^2 \omega \,.\, \rho^2 - C \,.\, \rho + B = 0 \quad \textit{(v. sopra.)}$$

L'equazione dell' iperbole riferita agli assintoti è della forma $x\, y + p = 0$.

L' equazione di un'ellisse o iperbole riferita ad un diametro (asse di x) e alla tangente in un suo estremo (asse di y) è del tipo:

$$a_1\, x^2 + b_1\, y^2 + c_1\, x = 0.$$

L'equazione della parabola in questo ultimo caso è

$$y^2 = p\, x.$$

Il numero p si chiama *parametro* corrispondente al diametro scelto. Se questo è l'*asse*, p si chiamerà *parametro principale.*

L' equazione polare dell' ellisse o iperbole scegliendo per polo il centro è

$$\rho^2 = \frac{a_{22}{}^2}{\pm\, (1 - e^2 \cos^2 \theta_1)}$$

il segno + per l'ellisse e il segno — per l' iperbole, dove e è la cosiddetta *eccentricità* (v. § 5).

§ 4. — Principali proprietà metriche delle coniche.

Se una conica sega i lati BC, CA, AB di un triangolo nei punti D, D'; E, E'; F, F' si ha la relazione

$$\frac{BD.BD'}{CD.CD'}\cdot\frac{CE.CE'}{AE.AE'}\cdot\frac{AF.AF'}{BF.BF'}=1$$

(*teor. di* Carnot, *Geom. de posit.* p. 437); *e reciprocamente se i punti D, D', E, E', F, F' sui lati di un triangolo soddisfanno ad una siffatta relazione, essi sono situati su di una conica.*

Nell'ellisse è costante la somma dei quadrati di due semidiametri coniugati, e nell'iperbole è invece costante la differenza dei quadrati di due semidiametri coniugati.

Nell'ellisse o iperbole è costante l'area del parallelogrammo costruito su due semidiametri coniugati.

Il rettangolo dei segmenti che due diametri coniugati determinano sopra una tangente fissa, a partire dal punto di contatto, è costantemente eguale al quadrato del semidiametro parallelo alla tangente fissa.

Se si costruisce un parallelogrammo su due semidiametri coniugati dell'iperbole, una delle diagonali è un assintoto e l'altra diagonale è parallela al secondo assintoto.

Il rettangolo dei segmenti che una tangente variabile fa su due tangenti fisse parallele, a par-

tire dai loro punti di contatto, è costantemente eguale al quadrato del semidiametro parallelo alle tangenti fisse.

Il rettangolo dei segmenti che due tangenti parallele variabili fanno su di una tangente fissa, è eguale al quadrato del semidiametro parallelo a questa.

Il parallelogrammo costruito sui due semidiametri è equivalente a quello costruito sui due semidiametri rispett. coniugati.

Le due tangenti condotte da un punto alla conica (ellisse o iperbole) sono proporzionali ai semidiametri ad esse paralleli.

Il prodotto dei due segmenti di una secante passante per un punto fisso, è proporzionale al quadrato del semidiametro parallelo ad essa.

I quadrati di un sistema di corde parallele sono proporzionali ai prodotti dei segmenti da esse determinati sul diametro coniugato alla loro direzione.

I prodotti dei segmenti che una retta parallela a un assintoto nell' iperbole, ovvero che un diametro della parabola, taglia sopra un sistema di corde parallele, sono proporzionali ai segmenti che queste corde staccano da quella retta.

Il prodotto dei segmenti tagliati da una tangente qualunque di un' iperbole sui due assintoti, contati a partire dall' intersezione di questi, ha un valore costante.

L'area del triangolo formata da una tangente all' iperbole e dagli assintoti è costante.

La porzione di una tangente all' iperbole inter-

cetta fra gli assintoti, è divisa per metà dal punto di contatto.

I due segmenti che una iperbole e i suoi assintoti intercettano su di una trasversale, hanno lo stesso punto medio.

Se un quadrangolo è iscritto in una conica, il prodotto delle distanze di un punto qualunque della curva dai due lati opposti, ha un rapporto costante col prodotto delle distanze dello stesso punto dagli altri due lati opposti (teor. di Pappo*).*

Se un quadrilatero è circoscritto ad una conica, il prodotto delle distanze d'una tangente qualunque da due vertici opposti ha un rapporto costante col prodotto delle distanze della tangente medesima dagli altri due vertici.

Se intorno a due punti fissi d'una iperbole si fanno girare due raggi che si intersechino costantemente sulla curva, il segmento intercetto da questi raggi sopra un assintoto è di grandezza costante.

Ogni parallelogrammo che abbia due vertici opposti sull' iperbole e i lati paralleli agli assintoti, ha una diagonale diretta al centro.

Nella parabola la sunnormale (distanza fra il piede della perpendicolare abbassata dal punto della parabola sull'asse e il punto d' incontro della normale coll'asse) è costante ed eguale alla metà del parametro principale.

L'area del triangolo formato da tre tangenti alla parabola è la metà di quella del triangolo formato dai loro punti di contatto.

In ogni triangolo iscritto in un' iperbole equilatera il punto d' incontro delle altezze sta sulla curva.

In ogni triangolo rettangolo iscritto in una iperbole equilatera, la tangente al vertice dell'angolo retto è perpendicolare all'ipotenusa.

Il circolo iscritto ad un triangolo coniugato rispetto ad un'iperbole equilatera, passa pel centro della curva.

§ 5. — Proprietà focali delle coniche.

Esistono in generale quattro punti (reali o immaginarii) tali che tutte le coppie di rette coniugate passanti per ciascuno di essi, sono coppie di rette fra loro ortogonali; tali punti si chiamano FUOCHI.

Per l'ellisse e l'iperbole, di questi fuochi ne esistono due reali, a distanza finita, situati su di un asse, simmetricamente rispetto al centro, e interni alla curva, cioè tali che le tangenti da essi condotte alla curva sono immaginarie.

Per la parabola esiste un sol fuoco reale a distanza finita, situato sull'asse e interno alla curva.

L'asse su cui sono i fuochi reali si chiama *asse focale.*

Chiamando α, β i semiassi dell'ellisse o dell'iperbole *i fuochi reali dell'ellisse stanno sul suo asse maggiore alla distanza* $\pm\sqrt{\alpha^2-\beta^2}$ *dal centro e quelli dell'iperbole stanno alla distanza* $\pm\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ *dal centro e situati su quello dei due assi che incontra in punti reali la curva.*

Si chiama *direttrice* la polare di un fuoco.

Nell'ellisse e iperbole ve ne sono due reali e perpendicolari all'asse focale. Nella parabola ve n'è

una sola reale, e anche perpendicolare all' asse focale.

La equazione di una direttrice si otterrebbe sostituendo nella equazione della polare le coordinate di un fuoco.

È costante il rapporto fra le distanze di un punto della curva dal fuoco, e dalla direttrice corrispondente. Esso si chiama ECCENTRICITÀ.

Per l'ellisse l'eccentricità è minore di 1; per la parabola è eguale ad 1; per l'iperbole è maggiore di 1. I punti della parabola sono equidistanti dal fuoco e dalla direttrice.

Nell'ellisse la somma dei raggi che da un punto della curva vanno ai due fuochi reali è costante; nell'iperbole è costante invece la differenza degli stessi raggi.

È costante il prodotto delle distanze dei due fuochi da una tangente alla curva.

La tangente e la normale in un punto della curva bisecano gli angoli dei due raggi focali.

Nella parabola la tangente e la normale in un punto bisecano gli angoli del raggio focale e del diametro passante pel punto considerato della curva.

I due fochi reali dell'ellisse sono sull'asse maggiore; e la distanza di uno di essi dal centro è il secondo cateto d'un triangolo rettangolo di cui la ipotenusa è il semiasse maggiore e il primo cateto è l'altro semiasse.

Nell' iperbole la distanza di un fuoco dal centro è l'ipotenusa di quel triangolo rettangolo di cui i cateti sono i semiassi.

Se un'ellisse e un'iperbole passano per lo stesso punto e hanno gli stessi fuochi, esse si tagliano ad angolo retto.

La normale alla conica divide la distanza fra i fuochi in parti proporzionali ai raggi focali.

L'angolo sotteso nel fuoco da una corda è bisecato dalla retta che congiunge il fuoco col polo della corda.

Se si congiunge il fuoco col polo di una corda che passa per il fuoco, questa congiungente è perpendicolare alla corda.

È costante l'angolo sotteso nel fuoco dalla porzione di una tangente variabile compresa fra due tangenti fisse.

Il rettangolo dei segmenti di una corda focale serba un rapporto costante coll'intera corda.

La somma di due corde focali parallele a due diametri coniugati è costante.

La somma delle reciproche di due corde focali ortogonali è costante.

La distanza di un punto di un' iperbole dal fuoco, è eguale alla retta condotta da quel punto parallelamente all'assintoto ed arrestata alla direttrice.

Nella parabola il punto d' incontro d' una tangente coll' asse focale, e il punto di contatto sono equidistanti dal fuoco.

Nella parabola l' angolo di due tangenti è eguale alla metà dell' angolo dei raggi focali corrispondenti ai punti di contatto.

Nella parabola il circolo circoscritto al triangolo formato da tre tangenti passa pel fuoco.

Nella parabola le tre altezze del triangolo for-

mato da tre tangenti si incontrano sulla direttrice.

Nella parabola le due tangenti condotte da un punto della direttrice alla curva, sono ad angolo retto.

Nella parabola il parametro di un diametro qualunque (v. § 3) *è eguale a quattro volte la distanza della sua estremità dal fuoco.*

L'equazione polare dell'ellisse o iperbole scegliendo per polo uno dei fuochi è

$$\rho = \frac{b^2}{a} \frac{1}{1 + e \cos \theta}$$

essendo a, b i semiassi ed e l'eccentricità.

L'equazione polare della parabola prendendo per polo il fuoco è

$$\rho = \frac{\frac{1}{2} p}{1 - \cos \theta}$$

essendo p il parametro principale della parabola.

Se $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$ *è una conica (ellisse o iperbole), l'equazione di una conica omofocale (avente i medesimi due fuochi reali) è*

$$\frac{x^2}{a^2 + \rho} \pm \frac{y^2}{b^2 + \rho} = 1.$$

Le coniche, considerate come intersezioni di un cono circolare con un piano, furono studiate fin dagli antichi geometri greci, Apollonio, Pappo,

ecc., i quali trovarono quasi tutte le principali proprietà riguardanti i fochi, gli assintoti, i diametri coniugati, ecc.

A Desargues, Pascal, Delahire, Newton, Maclaurin e altri matematici del XVII e XVIII secolo si devono ulteriori studi sulle coniche; a Desargues e a Delahire si deve p. es. l'introduzione sistematica della teoria dei poli e polari e a Biagio Pascal la scoperta di quel famoso teorema (v. § 2), che ha così grande importanza nella geometria proiettiva delle coniche.

L'introduzione del metodo delle coordinate, fatta da Cartesio, servì a studiare queste curve da un punto di vista nuovo e a dimostrare con formole analitiche le proprietà già dimostrate per via sintetica.

Trattati sulle coniche coll'uno o coll'altro metodo sono quelli stessi da noi già citati alla fine del capitolo primo, cui aggiungeremo ora anche il primo volume della *Geometria* di Clebsch-Lindemann, e le lezioni di Steiner (*Vorl. über synthet. Geom.; Theorie der Kegelschnitte*, pubblicate da Geiser (1.ª parte) e da Schroeter (2.ª parte), Leipzig). Per dettagliati ragguagli storici rimandiamo all'*Aperçu hist.* di Chasles.

§ 6. — Fasci di coniche.

Due coniche si tagliano in quattro punti (reali o immaginari), e hanno quattro tangenti comuni.

Se $f = 0$, $f' = 0$ *sono le equazioni delle due co-*

niche in coordinate di punti (o di rette) la equazione

$$f + \lambda f' = 0,$$

dove λ *è un parametro costante qualunque, rappresenta una conica che passa per i quattro punti d'incontro delle due date, (o rispett. che è tangente alle quattro tangenti comuni alle due date).*

Si dice che tutte le coniche rappresentate dalla equazione $f + \lambda f' = 0$ formano *un fascio* (se $f = 0$, $f' = 0$ sono equazioni in coordinate puntuali) ovvero formano *una schiera* (se $f = 0$, $f' = 0$ sono in coordinate tangenziali).

I quattro punti d'intersezione delle due coniche si chiamano *punti-base del fascio.*

Fra le coniche del fascio ve ne sono tre che si spezzano in due rette; fra le coniche della schiera ve ne sono tre che si riducono a una coppia di punti.

Il triangolo diagonale del quadrangolo completo avente per vertici i quattro punti-base del fascio è un triangolo autoconiugato rispetto a tutte le coniche del fascio.

Per ogni punto del piano passa una conica del fascio, e ad ogni retta del piano è tangente una conica della schiera.

Ogni retta del piano è toccata da due coniche del fascio; e per ogni punto del piano passano due coniche della schiera.

I punti d'incontro delle coniche d'un fascio con una retta, formano su questa un'involuzione, i cui punti doppi sono i punti di contatto di quelle due coniche del fascio che toccano la retta. E correlativamente.

Se si ha

$$f = \Sigma\, a_{ik}\, x_i\, x_k\,, \qquad (a_{ik} = a_{ki})$$
$$f' = \Sigma\, b_{ik}\, x_i\, x_k\,, \qquad (b_{ik} = b_{ki})$$

il discriminante di una conica del fascio è

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda\, b_{11} & a_{12} - \lambda\, b_{12} & a_{13} - \lambda\, b_{13} \\ a_{21} - \lambda\, b_{21} & a_{22} - \lambda\, b_{22} & a_{23} - \lambda\, b_{23} \\ a_{31} - \lambda\, b_{31} & a_{32} - \lambda\, b_{32} & a_{33} - \lambda\, b_{33} \end{vmatrix}$$

Se l'equazione di 3.° grado $\Delta(\lambda) = 0$ *ha una radice doppia, due dei punti-base del fascio coincidono; e il fascio quindi risulta di coniche fra loro tangenti in un punto.*

Se $\Delta(\lambda) = 0$ *ha una radice doppia, e per tal valore di* λ, *tutti i minori di 2.° ordine del determinante* Δ *si annullano, tutte le coniche del fascio (e quindi anche le due date) si toccano in due punti; e la congiungente questi due punti si chiama la retta doppia del fascio.*

In tal caso esistono infiniti triangoli autoconiugati rispetto a tutte le coniche del fascio; tutti questi triangoli hanno di comune un lato cioè la retta doppia.

Se le radici di $\Delta(\lambda) = 0$ *sono tutte tre eguali, senza che per tale radice si annullino i determinanti di 2.° ordine di* Δ, *tutte le coniche del fascio hanno fra loro in un punto un contatto di 2.° ordine (cioè tre punti infinitamente vicini, comuni) e hanno poi comune un altro punto. In tal caso non esiste più triangolo autoconiugato comune, propriamente detto.*

Se finalmente tutte le radici di $\Delta(\lambda) = 0$ *sono eguali e contemporaneamente, per tal valore di* λ, *si annullano i minori di 2.° ordine di* Δ, *allora le due coniche e quindi anche tutte quelle del fascio, hanno in un punto un contatto di 3.° ordine, cioè le quattro intersezioni si riuniscono in una sola.*

§ 7. — Le formazioni invariantive del sistema di una o due forme ternarie quadratiche.

Riferiamo ora i risultati riguardanti la teoria invariantiva delle forme ternarie quadratiche (si vegga il Cap. III).

Il sistema di una sola conica non ha invarianti assoluti, il che, geometricamente, corrisponde a dire che colla trasformazione ogni conica può trasformarsi in ogni altra.*

Se $a^2{}_x$ *è la ternaria quadratica, il sistema completo risulta (oltre del covariante identico) di:*

$$f = a^2{}_x\,, \quad F = (a\,b\,u)^2, \quad A = (a\,b\,c)^2$$

dove $F = 0$ *è la equazione della stessa conica in*

* Non si trovi contraddizione fra questa asserzione e quella del § 3, perchè gli invarianti considerati nel § 3 non dipendono solo dai coefficienti della conica, ma anche dagli assi coordinati, i quali devono restare sempre *assi cartesiani;* quindi le trasformazioni compatibili colle considerazioni del § 3 non sono *tutte* le possibili, ma solo quelle che lasciano fissa la retta all'infinito del piano.

coordinate di rette, e A *rappresenta il discriminante.*

Il sistema completo di due coniche, cioe di due forme a^2_x, a'^2_x *è composto (oltre del covariante identico) di 20 formazioni.*

Ponendo, per semplicità,

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

e

$$\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3 = \begin{vmatrix} b'_2 & c'_2 \\ b'_3 & c'_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b'_3 & c'_3 \\ b'_1 & c'_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b'_1 & c'_1 \\ b'_2 & c'_2 \end{vmatrix}$$

queste formazioni possono scriversi simbolicamente nel seguente modo:

1) Quattro invarianti:

$$A_{111} = (a\,b\,c)^2$$
$$A_{112} = (a\,b\,a')^2$$
$$A_{122} = (a\,a'\,b')^2$$
$$A_{222} = (a'\,b'\,c')^2.$$

2) Quattro covarianti:

$$f = a_x{}^2, \qquad f' = a'_x{}^2$$
$$\Delta = (\alpha\,\alpha'\,x)\, a_{\alpha'}\, a'_\alpha\, a_x\, a'_x$$
$$\Phi_{12} = (\alpha\,\alpha'\,x)^2.$$

3) Quattro contravarianti:

$$F = (a\,b\,u)^2, \qquad F' = (a'\,b'\,u)^2$$
$$D = (a\,a'\,u)\,(a\,b'\,c')\,(a'\,b\,c)\,(u\,b'\,c')\,(u\,b\,c)$$
$$F_{12} = (a\,a'\,u)^2.$$

4) Otto forme miste:

$$B_1 = (a' b c) a'_x (u b c)$$
$$B_2 = (a b' c') a_x (u b' c')$$
$$N = (a a' u) a_x a'_x$$
$$N' = (\alpha \alpha' x) u_\alpha u_{\alpha'}$$
$$C_1 = (a a' u) a'_\alpha a_x u_\alpha$$
$$\Gamma_1 = (\alpha \alpha' x) a_{\alpha'} u_\alpha a_x$$
$$C_2 = (a a' u) a_{\alpha'} a'_x u_{\alpha'}$$
$$\Gamma_2 = (\alpha \alpha' x) a'_\alpha u_\alpha a'_x .$$

Questo sistema completo fu trovato da GORDAN e si trova riportato nel 1.° volume della *Geom.* di CLEBSCH-LINDEMANN (ediz. franc., pag. 362). Vedi anche GORDAN, *Math. Ann.*, XIX.

Il prodotto dei quattro punti d' intersezione di f e f' è dato dalla forma

$$F F' - F_{12}^2 = 0$$

e correlativamente, il prodotto delle quattro tangenti comuni alle due coniche è dato da

$$f \cdot f' - \Phi_{12}^2 = 0.$$

La forma $\Phi_{12} = 0$ rappresenta il luogo dei punti pei quali passano due coppie di tangenti ad f e f' formanti un sistema armonico, e dualisticamente, $F_{12} = 0$ è l' inviluppo delle rette che segano le due coniche in quattro punti armonici.

Se $A_{122} = 0$ esiste un numero semplicemente infinito di triangoli polari (autoconiugati) rispetto ad f, e che sieno circoscritti alla conica f' e iscritti in f.

Proprietà analoga per $A_{112} = 0$.

La equazione $N = 0$ *considerata nelle coordinate u rappresenta il punto d'intersezione delle polari del punto* (x) *rispetto alle due coniche.*

La equazione $B_1 = 0$, *considerata nelle coordinate x, è quella di una retta luogo di punti le cui polari rispetto alla conica* f' *sono coniugate armoniche della retta u rispetto alla conica f.*

L'equazione $D = 0$ *rappresenta i tre lati del triangolo polare comune a f e f', e* $\Delta = 0$ *rappresenta i tre vertici dello stesso triangolo.*

Tutte le coniche covarianti di f e f' (per es. $\Phi_{12} = 0$) *hanno un medesimo triangolo polare comune* $D = 0$, *o* $\Delta = 0$.

Se gli invarianti A_{112} *e* A_{122} *sono contemporaneamente zero, il rapporto anarmonico dei quattro punti d'intersezione delle due coniche è equianarmonico su ciascuna di esse.*

La condizione perchè le due coniche abbiano un contatto semplice è

$$4\,(A_{111}\,A_{122} - A_{112}^2)\,(A_{112}\,A_{222} - A_{122}^2) - \\ - (A_{111}\,A_{222} - A_{112}\,A_{122})^2 = 0.$$

Le condizioni perchè le due coniche abbiano in un punto un contatto di 2.° ordine (tre punti d'intersezione riuniti) sono:

$$\frac{A_{111}}{A_{112}} = \frac{A_{112}}{A_{122}} = \frac{A_{122}}{A_{222}}.$$

Il sistema di due coniche ha due invarianti assoluti.

Per questi possono scegliersi, come più semplici, i seguenti:

$$A_1 = \frac{A_{112}^2}{A_{111}\, A_{122}}$$

$$A_2 = \frac{A_{122}^2}{A_{112}\, A_{222}}.$$

È importante il teorema:

Il rapporto anarmonico α *delle linee che congiungono un punto di* f *ai quattro punti d'intersezione di* f *e* f' *è dato dalla formola*

$$\frac{(1-\alpha+\alpha^2)^3}{(1+\alpha)^2\,(2-\alpha)^2\,(1-2\,\alpha)^2} = \frac{(A_1-1)^3\, A_1\, A_2^2}{(3\, A_1\, A_2 - 2\, A_1^2\, A_2 - 1)^2},$$

e da formola simile è dato il rapporto anarmonico dei quattro raggi che congiungono un punto di f' *coi quattro punti d'intersezione.*

Per il sistema di due coniche, oltre i citati lavori di Gordan, vedi anche Perrin (*Soc. math. de France*, XVIII), Rosanes (*Math. Ann.*, VI), Gerbaldi (*Annali di mat.*, XVII).

Per il sistema di tre coniche si vegga un lavoro di Ciamberlini (*Giorn. di Batt.*, XXIV); *il sistema contiene 127 formazioni; gli invarianti sono undici.* Si veggano poi i lavori di Gundelfinger (*Crelle*, LXXX), di Mertens (*Sitz. ber. Akad. Wien*, XCIII), Gerbaldi (*Accad. Torino*, XXV, 1890), Fischer und Mumelter (*Monatshefte f. Math.*, VIII, 1897).

CAPITOLO V.

Le quadriche.

§ 1. - Generazione proiettiva delle quadriche. Polarità.

Immaginiamo due stelle a sostegni distinti S, S' e *correlative* (v. Cap. I, § 3); ad ogni raggio dell'una corrisponde un piano dell'altra e viceversa e se il primo raggio si muove in un piano, il piano corrispondente gira intorno ad una retta. I punti d'incontro dei raggi di ciascuna stella coi piani corrispondenti dell'altra formano *un medesimo luogo* che è una superficie detta *quadrica*.

Sieno dati due sistemi piani correlativi, non sovrapposti. I piani che congiungono i punti dell'uno colle rette corrispondenti dell'altro, *inviluppano una stessa superficie* che è anche una *quadrica*.

Questa generazione proiettiva delle quadriche si trova in Seydewitz (*Grunert's Arch.*, IX, 1847) e Steiner (*Opere*, I, pag. 325). Per essa si può vedere anche Salmon-Fiedler (*Anal. Geom. d. Raum.*, I, pag. 333).

Un' altra definizione delle quadriche è la seguente:

Una quadrica è il luogo dei punti uniti di una dualità spaziale involutoria cioè di una polarità spaziale.

O anche:

Una quadrica è l'inviluppo dei piani uniti di una polarità spaziale.

Due punti qualsivogliano della quadrica sono centri di due stelle reciproche, mediante cui si può generare la quadrica stessa, e due piani tangenti qualisivogliano della quadrica sono sostegni di due sistemi piani reciproci atti a generare la quadrica stessa.

Una retta arbitraria dello spazio, se non è tutta situata sulla quadrica, incontra questa al più in due punti; e per una retta dello spazio, non situata sulla superficie, passano al più due piani tangenti della superficie. Perciò si dice che la quadrica è di 2.° ordine e 2.ª classe.

Se per un punto della quadrica passano due rette di essa, distinte o coincidenti, o nessuna, lo stesso avviene per ogni altro punto della quadrica.

Se in un piano tangente della quadrica vi sono due rette, o una retta o nessuna, appartenenti alla superficie stessa, lo stesso avviene per ogni altro piano tangente.

Ogni piano taglia la quadrica secondo una conica. Un piano che la tocca la taglierà secondo due rette reali, distinte, coincidenti o immaginarie.

Secondochè per ciascun punto della quadrica passano *due* rette reali appartenenti alla quadrica stessa, ovvero una sola retta reale ovvero due rette immaginarie, la quadrica sarà una *quadrica rigata o gobba (o a punti iperbolici)*, un *cono qua-*

drico, (o anche detta *quadrica a punti parabolici)* ovvero una *quadrica a punti ellittici.*

Se la quadrica rigata è tagliata dal punto all'infinito nel sistema di due rette (toccata dal piano all'infinito) si ha il *Paraboloide iperbolico;* se è tagliata secondo una conica propria, si ha l'*Iperboloide ad una falda.*

Le quadriche rigate contengono due sistemi di rette reali; le rette di un sistema sono segate da quelle dell'altro in punteggiate proiettive. Di qui deriva la generazione di quelle quadriche mediante due punteggiate proiettive non situate nello stesso piano.

Il paraboloide iperbolico è il luogo delle rette che congiungono le coppie di punti corrispondenti in due punteggiate simili, non situate nello stesso piano.

Il paraboloide iperbolico è IN DUE MODI DIVERSI *il luogo di una retta che si muove appoggiandosi a due rette fisse, che non sono in uno stesso piano, e mantenendosi parallela ad un piano fisso,* che si chiama *piano direttore.*

Vi sono due piani direttori.

L'iperboloide a una falda è il luogo di una retta che si muove appoggiandosi a tre rette fisse che non si incontrano e che non sono parallele ad uno stesso piano.

Similmente le quadriche a punti ellittici si distinguono secondo il modo con cui sono tagliate dal piano all'infinito dello spazio: possono essere tagliate dal piano all'infinito in una conica reale e allora si ha l'*Iperboloide a due falde;* possono essere tagliate secondo una conica immaginaria e

si ha l'*Ellissoide;* e possono finalmente essere *toccate* dal piano all'infinito, cioè essere segate secondo una conica degenerata in due rette, e si ha allora il *Paraboloide ellittico.*

Le rette di un cono quadrico si dicono *generatrici; esse passano tutte per un punto chiamato vertice.* Meno che per questo punto, per il quale passano dunque infinite rette della superficie, per tutti gli altri punti di questa passa sempre una *sola* retta della superficie stessa. Se il vertice è all'infinito si ha il *cilindro;* la sezione di un cilindro con un piano perpendicolare alle generatrici si dice *base del cilindro.*

I piani tangenti ad una quadrica condotti per un punto P, sono i piani tangenti di un cono quadrico avente il vertice in P, e le cui generatrici sono le rette che congiungono P coi punti di contatto dei piani tangenti; questo cono si dice *cono tangente alla quadrica, ed esso tocca la quadrica secondo una curva piana che è quindi una conica.* Il piano di questa conica si dice *piano polare* di *P*, e *P* si dice a sua volta *polo* di quel piano.

La corrispondenza fra poli e polari rispetto ad una quadrica è una dualità involutoria (v. Capitolo I, § 4).

Il piano polare contiene le rette polari di P rispetto a tutte le coniche in cui i piani condotti per P segano la quadrica.

Ogni retta condotta per P sega la quadrica in Q, Q' e il piano polare in P', in modo che il gruppo P P' Q Q' è armonico.

Se P si muove su di una retta, il piano polare

rota intorno ad un' altra retta, e se P si muove in un piano, il piano polare rota intorno un punto che è il polo di quel piano.

Due rette si dicono *polari reciproche* se i piani polari di tutti i punti di una di esse, passano per l'altra.

Se due rette polari reciproche si tagliano, il loro punto comune apparterrà alla superficie, e il loro piano sarà piano tangente alla superficie.

Le coppie di rette polari reciproche giacenti in un piano tangente, sono rette coniugate in una involuzione di cui le rette doppie sono le rette lungo le quali il piano tangente taglia la superficie.

Se due rette si tagliano, anche le loro polari reciproche si tagliano.

Due punti si dicono *coniugati* se uno di essi sta nel piano polare dell'altro.

Un punto e una retta si dicono *coniugati* se questa sta nel piano polare del punto.

Un piano e una retta si dicono *coniugati* se questa passa pel polo del piano.

Due rette si dicono *coniugate* se una di esse sta nel piano polare di un punto dell'altra.

Due piani si dicono *coniugati* se uno di essi passa pel polo dell'altro.

Triangolo coniugato rispetto alla quadrica è un triangolo in cui ogni vertice ha per coniugati gli altri due, e quindi per retta coniugata il lato opposto.

Tetraedro coniugato (o anche *autoconiugato, autoreciproco*) rispetto alla quadrica è un tetraedro in cui ogni vertice ha per coniugato gli altri tre, e quindi ha per piano polare la faccia opposta.

Ogni triangolo del tetraedro coniugato è un triangolo coniugato.

Due spigoli opposti del tetraedro coniugato sono polari reciproci rispetto alla quadrica.

Se due rette sono coniugate, la polare reciproca dell'una sega l'altra, e viceversa.

Se una retta è coniugata a due che si tagliano, è coniugata al loro piano e al loro punto comune.

Il polo del piano all'infinito si dice *centro* della quadrica; ogni retta passante pel centro si dice *diametro*, e ogni piano passante pel centro si dice *piano diametrale.*

Il centro è a distanza finita se il piano all'infinito non tocca la quadrica, quindi nell'iperboloide ad una falda, nell'iperboloide a due falde, nell'ellissoide, e nel cono quadrico; perciò queste superficie si dicono *quadriche a centro.*

Il paraboloide iperbolico e l'ellittico sono quadriche senza centro a distanza finita.

Un piano diametrale sega la quadrica in una conica il cui centro coincide con quello della quadrica stessa.

I diametri si dividono per metà nel centro.

Se tre corde si bisecano in un punto e non sono nello stesso piano, quel punto è il centro della superficie.

Un piano diametrale è il luogo dei punti medii di tutte le corde (parallele) coniugate ad esso.

I punti di contatto dei piani tangenti condotti dal centro alla quadrica sono all'infinito (reali o immaginari); il cono tangente che ha per vertice il centro si chiama perciò *cono assintotico.*

Esistono tre diametri, a due a due perpendicolari, tali che il piano di due di essi ha per rette coniugate le corde parallele al terzo (e quindi ad esso perpendicolare); tali diametri si dicono *principali*, e i loro piani si dicono *piani principali.*

I piani principali sono di simmetria per la quadrica.

Nell'ellissoide ogni piano diametrale taglia la superficie secondo un'ellisse; nell'iperboloide a una falda due piani principali tagliano la superficie secondo due iperboli aventi in comune l'asse immaginario, e il terzo piano principale la taglia secondo un'ellisse; nell'iperboloide a due falde due piani principali tagliano la superficie secondo due iperboli aventi in comune l'asse reale, e il terzo piano la taglia secondo un'ellisse immaginaria.

In un paraboloide si dice DIAMETRO ogni retta che passa per il punto di contatto della superficie col piano all'infinito.

Tutti i diametri di un paraboloide sono fra loro paralleli.

Fra tutti i diametri, in un paraboloide, ve n'è uno tale che il piano tangente nel punto in cui esso incontra la superficie è ad esso perpendicolare; questo diametro si chiama ASSE, e il punto in cui esso incontra la superficie si dice VERTICE.

Le sezioni del paraboloide (ellittico o iperbolico) fatte con piani paralleli all'asse, sono parabole.

Le sezioni del paraboloide fatte con piani perpendicolari all'asse, sono iperboli per il paraboloide iperbolico (o gobbo o rigato), e ellissi per il paraboloide ellittico.

La *sfera* è un ellissoide in cui ogni piano diametrale è perpendicolare al diametro che va al suo polo.

Inoltre le sfere dello spazio hanno in comune un circolo immaginario all'infinito. Questo circolo si dice *assoluto o limite dello spazio. Esso contiene tutti i punti ciclici di ogni piano dello spazio* (v. cap. IV, § 3).

Chasles e P. Serret fecero tentativi per estendere alle quadriche i teoremi di Pascal e Brianchon; per ciò si può vedere Salmon-Fiedler (*Anal. Geom. des Raum.*, I, art. 144), Klein (*Math. Ann.*, XXII, pag. 246, (1883)).

§ 2. Principali formole di geometria analitica delle quadriche.

La *quadrica* è il luogo di punti rappresentato da un'equazione razionale intera di 2.° grado fra le tre coordinate cartesiane di un punto dello spazio. Una siffatta equazione generale contiene 10 coefficienti, cioè i tre coefficienti dei quadrati delle tre coordinate, i tre coefficienti dei termini nel prodotto delle tre coordinate a due a due, i tre coefficienti dei termini di 1.° grado, e il termine indipendente dalle coordinate. Il luogo dipenderà solo dai nove rapporti di nove di tali coefficienti all'ultimo; perciò si dice che il luogo di 2.° grado è determinato da soli *nove* coefficienti, non omogenei.

L'equazione della quadrica la porremo sotto la forma (chiamando $x_1 x_2 x_3 x_4$ le coordinate *omogenee* di un punto dello spazio).

$$f(x) = \sum_{i,j}^{1...4} a_{ij} x_i x_j = 0 \qquad (a_{ij} = a_{ji}).$$

dove il sommatorio si intende esteso a tutte le possibili combinazioni $i, j = 1, 2, 3, 4$ colla condizione $a_{ij} = a_{ji}$. Ponendo $x_4 = 1$ si passa all'equazione della quadrica *in coordinate non omogenee.*

Se il tetraedro fondamentale delle coordinate è un tetraedro autoconiugato, l'equazione della quadrica si riduce alla forma canonica

$$\sum_1^4 a_i x_i^2 = 0.$$

Chiamiamo A il determinante

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{14} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{41} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{44} \end{vmatrix} \qquad \textit{(Discriminante)}$$

e A_{ij} il complemento algebrico di a_{ij} in A.

Chiamando u_1, u_2, u_3, u_4 le coordinate omogenee di un piano, cioè, posto l'equazione del piano sotto la forma

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0,$$

l'equazione della medesima quadrica, in coordinate di piani, è

$$F(u_1 u_2 u_3 u_4) = \sum_{i,j}^{1...4} A_{ij} u_i u_j = 0 \qquad (A_{ij} = A_{ji}).$$

Questa equazione rappresenta dunque la quadrica, non più come luogo di punti, ma come inviluppo di piani tangenti. Essa può anche considerarsi come equazione di condizione cui devono soddisfare i coefficienti dell'equazione di un piano perchè questo sia tangente alla quadrica data dalla primitiva equazione.

Una quadrica è determinata se sono dati 9 punti per cui deve passare, o nove piani che deve toccare.

Nel paragrafo precedente abbiamo stabilite le proprietà geometriche delle varie specie di quadriche; vediamo ora come dall'equazione generale (che si suppone a coefficienti reali) si possano distinguere fra loro le varie quadriche.

Poniamo

$$B = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

e chiamiamo B_{ij} i complementi algebrici degli elementi a_{ij} nel determinante B.

Se B non è zero si hanno le quadriche a centro; se $B = 0$ si hanno i paraboloidi.

Se A è eguale a zero, e solo allora, si hanno i coni. Se contemporaneamente $A = 0$, $B = 0$ si hanno i cilindri.

Indichiamo con (12) (13) ... gli angoli degli assi coordinati $x_1 x_2$, $x_1 x_3$, ..., poniamo

$$\Omega = \begin{vmatrix} 1 & \cos(12) & \cos(13) \\ \cos(12) & 1 & \cos(23) \\ \cos(13) & \cos(23) & 1 \end{vmatrix}$$

(quantità positiva compresa fra 0 e 1) e indichiamo con $\Omega_{11}\,\Omega_{12}\ldots$ i complementi algebrici degli elementi di Ω.

Poniamo inoltre

$$C = B_{11} + B_{22} + B_{33} + 2\,B_{12}\cos(12) + \\ + 2\,B_{13}\cos(13) + 2\,B_{23}\cos(23)$$

$$D = a_{11}\,\Omega_{11} + a_{22}\,\Omega_{22} + a_{33}\,\Omega_{33} + 2\,a_{12}\,\Omega_{12} + \\ + 2\,a_{13}\,\Omega_{13} + 2\,a_{23}\,\Omega_{23}.$$

Abbiamo allora i seguenti risultati:

I rapporti $\frac{A}{\Omega}, \frac{B}{\Omega}, \frac{C}{\Omega}, \frac{D}{\Omega}$ *non si alterano per trasformazione di coordinate cartesiane (sono invarianti).*

Il segno delle quantità A, B, C, D è indipendente dal sistema di coordinate cartesiane che si sceglie.

Per il caso di assi ortogonali le quantità C, D diventano rispettivamente

$$B_{11} + B_{22} + B_{33}$$
$$a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

e Ω diventa 1 e perciò:

Le quantità $a_{11} + a_{22} + a_{33}$, $B_{11} + B_{12} + B_{33}$ restano inalterate in valore passando da coordinate ortogonali ad altre coordinate anche ortogonali.

L'equazione

$$\Delta(\rho) = \Omega\,\rho^3 + D\,\rho^2 + C\,\rho + B = 0$$

ha tutte le radici reali, e in generale distinte.

La equazione precedente può scriversi anche:

$$\Delta(\rho) = \begin{vmatrix} a_{11} + \rho & a_{12} + \rho\cos(12) & a_{13} + \rho\cos(13) \\ a_{21} + \rho\cos(12) & a_{22} + \rho & a_{23} + \rho\cos(23) \\ a_{31} + \rho\cos(13) & a_{32} + \rho\cos(23) & a_{33} + \rho \end{vmatrix} = 0.$$

La classificazione delle quadriche dipende dallo studio dei segni delle quantità A, B, C, D.

I) B è diverso da zero. Si hanno le quadriche a centro, cioè:

1. *Ellissoide reale, se* $C>0, BD>0, A<0$

2. *Ellissoide immaginario, se* $C>0, BD>0, A>0$

3. *Cono immaginario, se* $C>0, BD>0, A=0$

4. *Cono reale, se* $\left.\begin{matrix} C \gtreqqless 0, BD<0 \\ C<0, BD\geqq 0 \end{matrix}\right\} A=0$

5. *Iperboloide a una falda, se* $\left.\begin{matrix} C \gtreqqless 0, BD<0 \\ C<0, BD\geqq 0 \end{matrix}\right\} A>0$

6. *Iperboloide a due falde, se* $\left.\begin{matrix} C \gtreqqless 0, BD<0 \\ C<0, BD\geqq 0 \end{matrix}\right\} A<0.$

II) B è eguale a zero. Si hanno i paraboloidi o i cilindri o le coppie di piani, cioè:

7. *Paraboloide ellittico, se* $C>0, D \gtrless 0, A<0$

8. *Paraboloide iperbolico*, *se* $C<0, D\gtreqless 0, A>0$

9. *Cilindro a base ellittica*, *se* $C>0, D\gtrless 0, A=0$

10. *Cilindro a base iperbolica*, *se* $C<0, D\gtreqless 0, A=0$

11. *Cilindro a base parabolica*, *se* $C=0, D\gtrless 0, A=0$

12. *Due piani immaginari con una retta reale a distanza finita*, *se* $C>0, D\gtrless 0, A=0, A_{ii}=0$ $(i=1, 2, 3)$

13. *Due piani reali che si incontrano in una retta a distanza finita*, *se* $C<0, D\gtreqless 0, A=0, A_{ii}=0$

14. *Due piani paralleli, reali distinti, immaginari, o coincidenti*, *se* $C=0, D\gtrless 0, A=0, A_{ii}=0.$

Con trasformazioni di coordinate cartesiane, le equazioni delle varie specie di quadriche, possono ridursi alle seguenti forme ridotte (in coordinate

non omogenee):

1. *Ellissoide reale:* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

2. *Ellissoide immaginario:* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$

3. *Cono immaginario:* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$

4. *Cono reale:* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$

5. *Iperboloide ad una falda:* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

6. *Iperboloide a due falde:* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$

7. *Paraboloide ellittico:* $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - x = 0$

8. *Paraboloide iperbolico:* $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - x = 0$

9. *Cilindro ellittico:* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

10. *Cilindro iperbolico:* $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

11. *Cilindro parabolico:* $y^2 \pm 2\,p\,x = 0$

12. *Due piani immaginari:* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$

13. *Due piani reali:* $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$

14. *Due piani paralleli:* $\frac{x^2}{a^2} \mp 1 = 0.$

Nell'equazione di ogni paraboloide i termini a secondo grado in $x_1\, x_2\, x_3$ *o* $x\, y\, z$ *formano il prodotto di due fattori lineari, e questa proprietà è caratteristica per il paraboloide.*

Nell'equazione del cilindro parabolico i termini a secondo grado in $x_1\, x_2\, x_3$ *o* $x\, y\, z$ *formano un quadrato perfetto.*

Indicando con $(x_1\, x_2\, x_3\, x_4)$ $(y_1\, y_2\, y_3\, y_4)$ le coordinate di due punti dello spazio, *la condizione perchè la retta che li congiunge, sia tangente alla quadrica* $f = 0$, *è*

$$f(x)\, f(y) - f^2 \binom{x}{y} = 0,$$

ponendo

$$f\binom{x}{y} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} y_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} y_3 + \frac{\partial f}{\partial x_4} y_4\right)$$
$$= a_{11}\, x_1\, y_1 + \ldots + a_{12}\,(x_1\, y_2 + x_2\, y_1) + \ldots$$

Se si immagina che y *sia un punto fisso, e le* x *sieno coordinate correnti, questa equazione rappresenta il cono circoscritto alla quadrica e avente per vertice il punto* y.

Se $F(u) = 0$ *è l'equazione della quadrica in coordinate di piani, la condizione perchè la retta intersezione dei piani* $(u_1\, u_2\, u_3\, u_4)$ $(v_1\, v_2\, v_3\, v_4)$ *sia*

tangente alla quadrica è similmente

$$F(u)\,F(v) - F^2\binom{u}{v} = 0.$$

Questa condizione equivale alla seguente:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & u_1 & v_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & u_2 & v_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & u_3 & v_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & u_4 & v_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & 0 & 0 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Mutando in questa formola le a *in* A, *e le* u, v, *in* x, y *si ha un' altra forma della condizione perchè la retta* $(x)(y)$ *tocchi la quadrica.*

Il piano polare di un punto (y) *ha per equazione*

$$f\binom{x}{y} = 0,$$

e le coordinate del polo di un piano

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + \ldots = 0$$

sono:

$$\begin{aligned} x_1 &\equiv A_{11} u_1 + A_{12} u_2 + A_{13} u_3 + A_{14} u_4 \\ x_2 &\equiv A_{21} u_1 + A_{22} u_2 + A_{23} u_3 + A_{24} u_4 \\ x_3 &\equiv A_{31} u_1 + A_{32} u_2 + A_{33} u_3 + A_{34} u_4 \\ x_4 &\equiv A_{41} u_1 + A_{42} u_2 + A_{43} u_3 + A_{44} u_4. \end{aligned}$$

Se il punto (y) appartiene alla quadrica, la equazione

$$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=0$$

rappresenta il piano tangente.

La condizione perchè due punti (x) (y) sieno coniugati è naturalmente anche $f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=0$, *e la condizione perchè due piani (u) (v) sieno coniugati è* $F\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=0$.

Queste due condizioni possono anche esprimersi sotto le forme:

$$\begin{vmatrix} A_{11} & \ldots & A_{14} & x_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{41} & \ldots & A_{44} & x_4 \\ y_1 & \ldots & y_4 & 0 \end{vmatrix}=0$$

e

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{14} & u_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{41} & \ldots & a_{44} & u_4 \\ v_1 & \ldots & v_4 & 0 \end{vmatrix}=0.$$

Le condizioni perchè due rette (u v) (u′ v′) sieno coniugate sono quattro, cioè

$$F\begin{pmatrix}u\\v'\end{pmatrix}=0,\ F\begin{pmatrix}u\\v'\end{pmatrix}=0,\ F\begin{pmatrix}u'\\v\end{pmatrix}=0,\ F\begin{pmatrix}u'\\v'\end{pmatrix}=0$$

L'equazione complessiva dei due piani tangenti condotti da una retta $(u\, v)$ *alla quadrica, è*

$$F(u)\,(v_1 x_1 + v_2 x_2 + \ldots)^2 -$$
$$-\,2\,F\binom{u}{v}(v_1 x_1 + \ldots)(u_1 x_1 + \ldots) + F(v)\,(u_1 x_1 + \ldots)^2 = 0.$$

Mutando F in f e scambiando x con u, e y con v, si ha, correlativamente, l'equazione (in coord. di piani) dei due punti d'incontro della retta $(x\, y)$ *colla quadrica.*

Le coordinate di questi medesimi punti d'incontro della retta $(x\, y)$ *colla quadrica sono della forma*

$$\frac{m\, x_i + n\, y_i}{m + n}$$

dove $\frac{m}{n}$ *ha per valore ciascuna delle due radici dell'equazione*

$$f(x)\left(\frac{m}{n}\right)^2 + 2\,f\binom{x}{y}\frac{m}{n} + f(y) = 0.$$

L'equazione di un piano diametrale qualunque è della forma

$$\alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \alpha_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0$$

dove $\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3$ *sono tre costanti arbitrarie. La retta che va al punto all'infinito di coordinate* $(\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3\, 0)$ *corrisponde alla direzione coniugata al soprascritto piano diametrale.*

I piani diametrali coniugati alle direzioni di ciascuno dei tre assi coordinati x_1, x_2, x_3 sono dati dalle equazioni

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3}=0.$$

Le coordinate del centro della quadrica sono

$$\frac{A_{14}}{B}, \quad \frac{A_{24}}{B}, \quad \frac{A_{34}}{B}.$$

L'equazione del cono assintotico è

$$f(x)-\frac{A}{B}x_4^2=0$$

che si ricava da $f(x)=0$ mutando solo a_{44} in $a_{44}-\frac{A}{B}$.

I *piani principali* sono quelli diametrali e perpendicolari alla direzione ad essi coniugata; le rette secondo cui si intersecano sono i *diametri principali o assi.*

Per ottenere i tre piani principali basta porre per α_1 α_2 α_3, nell'equazione:

$$\alpha_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+\alpha_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+\alpha_3\frac{\partial f}{\partial x_3}=0$$

valori proporzionali alle radici quadrate dei tre minori principali nel determinante $\Delta(\rho)$ *(v. sopra) quando per* ρ *si ponga ciascuna delle tre radici (reali) dell'equazione* $\Delta(\rho)=0$.

Le formole riescono naturalmente molto più semplici nel caso in cui gli assi coordinati sieno ortogonali.

Una *quadrica di rotazione o rotonda* è quella, un asse della quale è tale che tutti i piani per esso passante sono principali. La *sfera* è una quadrica in cui ogni piano diametrale è principale.

Condizione necessaria e sufficiente perchè una quadrica sia rotonda è che $\Delta(\rho)=0$ *abbia due radici eguali.*

Condizione necessaria e sufficiente perchè una quadrica sia sfera è che $\Delta(\rho)=0$ *abbia una radice tripla.*

In coordinate ortogonali le condizioni per la quadrica rotonda sono espresse da due delle relazioni

$$\frac{B_{23}}{a_{23}}=\frac{B_{31}}{a_{31}}=\frac{B_{12}}{a_{12}}=\frac{B_{22}-B_{33}}{a_{22}-a_{33}}=\frac{B_{33}-B_{11}}{a_{33}-a_{11}}=\frac{B_{11}-B_{22}}{a_{11}-a_{22}}.$$

In coordinate ortogonali le condizioni per la sfera sono

$$a_{11}=a_{22}=a_{33}, \qquad a_{23}=a_{31}=a_{12}=0.$$

In un paraboloide vi sono solo DUE *piani principali a distanza finita, che segano la quadrica secondo due parabole.*

In coordinate ortogonali, le equazioni dell'asse del paraboloide (intersezione dei due piani prin-

cipali) sono:

$$\frac{\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}}{\sqrt{B_{11}}} = \frac{\frac{\partial f(x)}{\partial x_2}}{\sqrt{B_{22}}} = \frac{\frac{\partial f(x)}{\partial x_3}}{\sqrt{B_{33}}}.$$

L'equazione di una quadrica a centro riferita al centro è (in coordinate x y z non omogenee) del tipo:

$$a'_{11} x^2 + a'_{22} y^2 + a'_{33} z^2 + 2 a'_{12} x y + 2 a'_{13} x z + \\ + 2 a'_{23} y z + \frac{A}{B} = 0.$$

L'equazione di una quadrica a centro riferita ad una terna di diametri coniugati è

$$a''_{11} x^2 + a''_{22} y^2 + a''_{33} z^2 + \frac{A}{B} = 0.$$

Se questi diametri coniugati sono i tre assi, le quantità

$$\sqrt{-\frac{A}{B a''_{11}}}, \quad \sqrt{-\frac{A}{B a''_{22}}}, \quad \sqrt{-\frac{A}{B a''_{33}}}$$

si dicono *lunghezze dei semiassi della quadrica.*

Esse si trovano ponendo per

$$-a''_{11}, \ -a''_{22}, \ -a''_{33}$$

le tre radici (reali) di $\Delta(\rho) = 0$ *(v. sopra).*

Nell'ellissoide reale tutti tre gli assi segano in punti reali la superficie, e le distanze del centro

da tali punti d'incontro sono proprio i semiassi dell'ellissoide. In un ellissoide qualunque i tre semiassi sono disuguali; in un ellissoide rotondo (di rotazione) due semiassi sono eguali; in una sfera tutti tre i semiassi sono eguali.

In un iperboloide a una falda due soli degli assi segano in punti reali la superficie, e le distanze del centro dal punto d'incontro coincidono colle lunghezze di due semiassi.

In un iperboloide a due falde uno solo degli assi sega in punti reali la superficie, e la distanza del centro da tal punto d'incontro coincide colla lunghezza di un semiasse.

Questi assi che segano gli iperboloidi in punti reali si dicono *trasversi*

Il piano

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0$$

taglia la quadrica in un'ellisse, iperbole, o parabola secondochè la quantità

$$G = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix}$$

è negativa, positiva, o zero.

Due piani paralleli segano la quadrica secondo coniche della stessa specie.

Per ciascun asse della quadrica passano due piani (reali o immaginarii) tali che essi e i loro paralleli segano la quadrica secondo circoli; que-

sti piani si dicono *piani ciclici;* essi danno le cosiddette *sezioni circolari* della quadrica.

I due piani ciclici per ciascun asse sono in posizione simmetrica rispetto a ciascun piano principale.

Dei sei sistemi di piani ciclici, due soli sono reali.

In ciascun sistema di piani ciclici vi sono sempre due piani tangenti, i cui punti di contatto si dicono *ombelichi.*

Dei dodici ombelichi quattro al più sono reali.

I dodici ombelichi si trovano allineati a tre a tre su otto rette immaginarie della quadrica.

I dodici ombelichi di una quadrica a centro stanno a quattro a quattro sui tre piani principali.

Due sezioni circolari appartenenti a ciascuno dei due sistemi di piani ciclici che corrispondono ad uno stesso asse della quadrica, stanno sempre su di una medesima sfera.

Nelle quadriche rotonde i due sistemi di piani ciclici reali si riducono al sistema dei paralleli.

La condizione analitica perchè un piano sia ciclico per una quadrica è data da due delle equazioni

$$\frac{G_{11}}{H_{11}} = \frac{G_{22}}{H_{22}} = \frac{G_{33}}{H_{33}} = \frac{G_{23}}{H_{23}} = \frac{G_{31}}{H_{31}} = \frac{G_{12}}{H_{12}}$$

dove le G_{ij} sono i complementi algebrici degli elementi nel determinante G, e H_{ij} sono gli analoghi complementi algebrici degli elementi nel deter-

minante

$$H = \begin{vmatrix} 1 & \cos(12) & \cos(13) & u_1 \\ \cos(21) & 1 & \cos(23) & u_2 \\ \cos(31) & \cos(32) & 1 & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix},$$

essendo $\cos(12)$, $\cos(13)$, ... *i coseni degli angoli degli assi coordinati.*

Per un ellissoide reale a tre assi disuguali

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (a > b > c)$$

i piani ciclici reali sono quelli che passano per l'asse di media lunghezza (b).

Le coordinate dei quattro ombelichi reali sono

$$\pm a\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}, \qquad 0, \qquad \pm c\sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}$$

Nell'iperboloide ad una falda i due sistemi di piani ciclici reali sono paralleli al maggiore dei due assi trasversi, e gli ombelichi sono tutti immaginari.

Nell'iperboloide a due falde i due sistemi di piani ciclici reali sono paralleli all'asse non trasverso più lungo, e i quattro ombelichi sono reali.

Se $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ *è l'equazione dell'iperboloide a due falde e* $b > c$, *le coordinate dei quat-*

tro ombelichi reali sono

$$\pm\, a \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2+c^2}}, \qquad 0, \qquad \pm\, c \sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}.$$

Il cono ha due sistemi di piani ciclici reali, che sono gli stessi di quelli degli iperboloidi a una o due falde cui esso è assintotico.

In un paraboloide ellittico esistono due sistemi di piani ciclici reali; essi sono paralleli agli assi maggiori delle sezioni perpendicolari all'asse; due ombelichi sono reali e sono i punti

$$\frac{1}{4}(b^2 \quad c^2), \qquad 0, \qquad \pm \frac{1}{2} \sqrt{c^2 (b^2 - c^2)},$$

se

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - x = 0 \qquad\qquad b > c)$$

è l'equazione del paraboloide.

In un paraboloide iperbolico i due sistemi di piani ciclici reali sono quelli paralleli ai due piani direttori (v. § 1); *i circoli degenerano in una retta al finito e in una retta all'infinito.*

Se $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - x = 0$ *è l'equazione del paraboloide, i due sistemi di piani ciclici sono quelli di piani paralleli ai due piani*

$$\frac{y}{b} - \frac{z}{c} = 0, \qquad \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0.$$

§ 3. — Proprietà focali delle quadriche.

Il luogo dei punti tali che i coni da essi circoscritti a una quadrica dotata di centro, sieno coni di rotazione (coni rotondi), si compone di tre coniche situate nei tre piani principali della quadrica; ciascuna conica ha gli stessi fuochi della sezione prodotta nella quadrica dal piano principale. Queste *coniche* si dicono *focali*, e i loro punti sono i *fuochi* della quadrica a centro.

Le coniche focali passano per i quattro ombelichi contenuti nel proprio piano.

Un ellissoide o iperboloide ammette, in generale, un'ellisse focale (reale) e un'iperbole focale situate nei due piani che passano per l'asse trasverso più lungo.

I due fuochi di una conica focale sono vertici di un'altra conica focale.

Le coniche focali per i coni quadrici si riducono a tre coppie di rette; due sole di queste rette sono reali.

Per ogni cono quadrico esistono due rette reali (rette focali) per ciascuna delle quali passano infinite coppie di piani coniugati ortogonali. Se il cono è rotondo, le due rette focali si confondono coll' asse di rotazione.

La conica prodotta nel cono da un piano perpendicolare ad una retta focale, ha per fuoco questo punto.

Le rette focali del cono assintotico di una quadrica a centro sono gli assintoti delle coniche focali della quadrica.

In un paraboloide il luogo dei punti tali che il cono circoscritto condotto per esso sia rotondo (di rotazione) è formato di due parabole (focali) situate nei due piani principali, aventi lo stesso asse del paraboloide, le aperture rivolte in sensi opposti e gli stessi fuochi delle due parabole prodotte nel paraboloide dai due piani principali.

Le parabole focali nel paraboloide sono situate in modo che il fuoco dell'una è vertice dell'altra.

I parametri delle due parabole focali sono eguali fra loro, ed eguali alla differenza dei parametri delle due parabole prodotte dai piani principali.

1. *Per l'ellissoide reale*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

di semiassi $a > b > c$ *le tre coniche focali sono:*

$$x = 0, \quad \frac{y^2}{a^2 - b^2} + \frac{z^2}{a^2 - c^2} = -1 \text{ (ellisse immag.)}$$

$$y = 0, \quad \frac{x^2}{a^2 - b^2} - \frac{z^2}{b^2 - c^2} = 1 \qquad \text{(iperbole)}$$

$$z = 0, \quad \frac{x^2}{a^2 - c^2} + \frac{y^2}{b^2 - c^2} = 1 \qquad \text{(ellisse reale).}$$

2. *Per l'ellissoide immaginario*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1, \quad (a > b > c)$$

le coniche focali sono:

$$x = 0, \quad \frac{y^2}{a^2 - b^2} + \frac{z^2}{a^2 - c^2} = 1 \qquad \text{(ellisse reale)}$$

$$y = 0, \quad \frac{z^2}{b^2 - c^2} - \frac{x^2}{a^2 - b^2} = 1 \qquad \text{(iperbole)}$$

$$z = 0, \quad \frac{x^2}{a^2 - c^2} + \frac{y^2}{b^2 - c^2} = -1 \qquad \text{(ellisse immag.)}.$$

3. *Per l'iperboloide ad una falda*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad (a > b)$$

le coniche focali sono:

$$x = 0, \quad \frac{y^2}{a^2 - b^2} + \frac{z^2}{a^2 + c^2} = -1 \qquad \text{(ellisse immag.)}$$

$$y = 0, \quad \frac{x^2}{a^2 - b^2} - \frac{z^2}{b^2 + c^2} = 1 \qquad \text{(iperbole)}$$

$$z = 0, \quad \frac{x^2}{a^2 + c^2} + \frac{y^2}{b^2 + c^2} = 1 \qquad \text{(ellisse reale)}.$$

4. *Per l'iperboloide a due falde*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad (b > c)$$

le coniche focali sono:

$$x = 0, \quad \frac{y^2}{a^2 + b^2} + \frac{z^2}{a^2 + c^2} = -1 \qquad \text{(ellisse immag.)}$$

$$y=0, \quad \frac{x^2}{a^2+b^2}+\frac{z^2}{b^2-c^2}=1 \qquad \textit{(ellisse reale)}$$

$$z=0, \quad \frac{x^2}{a^2+c^2}-\frac{y^2}{b^2-c^2}=1 \qquad \textit{(iperbole)}.$$

5. *Per il cono reale*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0, \qquad (a>b)$$

le due rette focali reali sono:

$$y=0, \quad \frac{x^2}{a^2-b^2}-\frac{z^2}{b^2+c^2}=0.$$

6. *Per un paraboloide (ellitt. o iperb.) di equazione*

$$p\,y^2+q\,z^2-x=0, \qquad \left(p \lesseqgtr q\right)$$

(dove $p\,q$ hanno lo stesso segno per il parab. ellitt., e segni contrarii per il parab. iperb.), le due parabole focali sono:

$$y=0, \quad z^2=\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)\left(x-\frac{1}{4\,p}\right)$$

$$z=0, \quad y^2=\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\left(x-\frac{1}{4\,q}\right).$$

Gli assi di rotazione dei coni circoscritti alla quadrica dai fochi, sono le tangenti alle coniche focali.

Le tangenti alle coniche focali sono le rette per le quali passano infinite coppie di piani coniugati rispetto alla quadrica e fra loro ortogonali.

Il piano perpendicolare a una tangente di una conica focale nel punto di contatto sega la quadrica lungo una conica, che ha per fuoco questo punto e per direttrice una retta perpendicolare al piano della conica focale.

Se da un punto qualunque si conduce la retta perpendicolare al proprio piano polare rispetto alla quadrica, le intersezioni della retta e del piano con un piano principale sono polo e polare rispetto alla conica focale ivi contenuta.

Le intersezioni con un piano principale di un piano tangente alla quadrica e della normale, sono polare e polo rispetto alla conica focale.

È costante il prodotto delle distanze di un piano tangente alla quadrica da quei due punti di una conica focale, in cui le tangenti sono parallele al piano.

Dato l'ellissoide

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (a>b>c)$$

l'equazione

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}+\frac{z^2}{c^2-\lambda}=1,$$

dove λ *è un parametro arbitrario, rappresenta una quadrica confocale al dato ellissoide, cioè avente le stesse coniche focali.*

Potendo variare λ in infiniti modi, si ha una semplice infinità di quadriche confocali alla data.

Per ogni punto dello spazio passano tre di tali quadriche, cioè un ellissoide, un iperboloide ad una falda, e un iperboloide a due falde, le quali si segano ortogonalmente nel punto comune.

I tre valori di λ corrispondenti alle tre quadriche confocali passanti per un punto dato, possono prendersi come coordinate del punto, e si dicono *coordinate ellittiche.*

§ 4. — Proprietà metriche delle quadriche. Quadriche equilatere.

In un ellissoide è costante il prodotto del segmento di normale compreso fra l'ellissoide e un piano principale, per la distanza fra il centro e il piano tangente; e tal prodotto è eguale al quadrato del semiasse perpendicolare al piano tangente.

In un ellissoide è costante la somma dei quadrati di tre semidiametri coniugati.

È costante il volume del parallelepipedo costruito su tre semidiametri coniugati.

È costante le somma dei quadrati delle proiezioni di tre semidiametri coniugati su di una retta o piano.

In un paraboloide ellittico è costante la somma dei parametri principali di due qualunque sezioni coniugate e diametrali. Nel paraboloide iperbolico è costante invece la differenza dei medesimi.

In un paraboloide ellittico il luogo dei vertici dei triedri trirettangoli circoscritti, è un piano

perpendicolare all'asse e distante dal vertice della quantità

$$\frac{b^2 + c^2}{4}$$

se $$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - x = 0$$

è al solito l'equazione del paraboloide.

Per l'ellissoide lo stesso luogo è una sfera concentrica all'ellissoide e il cui raggio è

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

se a, b, c *sono i semiassi dell' ellissoide. Per una qualunque altra quadrica a centro lo stesso luogo è sempre una sfera* (MONGE).

In un iperboloide ad una falda se un piano perpendicolare ad una retta dell' iperboloide, sega questo secondo un' iperbole equilatera, tutti gli altri simili piani lo segheranno secondo iperboli equilatere.

Siffatto iperboloide si dice EQUILATERO.

Se in un iperboloide a una falda, ad una retta ad esso appartenente ne corrispondono due altre perpendicolari fra loro e alla prima, anche ad esso appartenente, e dello stesso sistema, lo stesso accadrà per tutte, e l' iperboloide sarà un iperboloide equilatero.

Un iperboloide a una falda è equilatero quando è $D = 0$ (v. § 2).

Quindi se la sua equazione è, al solito,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

la condizione perchè esso sia equilatero è

$$D = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} = 0.$$

Se in un cono quadrico una sezione perpendicolare alle generatrici è iperbole equilatera, lo stesso avverrà per tutte le sezioni perpendicolari alle generatrici; il cono si dice allora *equilatero.*

In un cono equilatero, ad ogni generatrice ne corrispondono altre due perpendicolari fra loro e colla prima.

Un cono è equilatero quando è $D = 0$.

Se in un iperboloide a due falde una sezione perpendicolare ad un assintoto (generatrice del cono assintotico) è iperbole equilatera, lo stesso avverrà per tutte le simili sezioni.

L'iperboloide si dice allora *equilatero.*

In ogni iperboloide a due falde equilatero, ad ogni assintoto ne corrispondono due altri fra loro perpendicolari e perpendicolari al primo.

L'iperboloide a due falde è equilatero quando è $D = 0$

In un paraboloide ellittico non può essere $D = 0$.

Un paraboloide iperbolico è *equilatero* quando sono fra loro perpendicolari i due piani direttori.

Perchè un paraboloide iperbolico sia equilatero deve essere $D = 0$.

In un paraboloide iperbolico equilatero ogni sezione perpendicolare all'asse è iperbole equilatera.

§ 5. — Fasci e reti di quadriche.

Date due quadriche $f=0$, $f'=0$ (in coord. di punti o di piani) il sistema di quadriche rappresentate da

$$f+\lambda f'=0$$

si dice rispett. *fascio o schiera* di quadriche.

Tutte le superficie del fascio si intersecano in una curva storta di quart'ordine (curva base).

Tutte le superficie di un fascio di quadriche sono segate da un piano in un fascio di coniche, e da una retta in un fascio di gruppi di due punti cioè in coppie di punti coniugati in involuzione.

Per un punto dello spazio passa in generale una sola superficie del fascio; esistono due quadriche del fascio tangenti ad una retta data; esistono tre quadriche del fascio tangenti ad un piano dato.

I piani polari di un punto P rispetto a tutte le quadriche di un fascio, passano per una retta fissa p, e formano quindi un fascio di piani. La retta p si dice *coniugata* di P.

I fasci di piani polari relativi a due punti $P\,P'$ sono fra loro proiettivi.

Le rette reciproche di una retta rispetto a tutte le quadriche di un fascio sono le generatrici di un iperboloide, di cui l'altro sistema di generatrici è costituito dalle rette coniugate di tutti i punti della retta data.

I poli di un piano rispetto a tutte le quadriche di un fascio stanno su di una cubica storta; quindi anche:

I centri di tutte le quadriche di un fascio stanno su di una cubica storta; in un fascio esistono in generale tre paraboloidi di cui almeno uno è reale.

In un fascio di quadriche esistono in generale quattro coni.

Tutte le quadriche di un fascio hanno di comune un tetraedro polare, di cui i vertici sono quelli dei quattro coni appartenenti al fascio.

Date tre quadriche $f=0$, $f'=0$, $f''=0$ le quali non appartengono ad un fascio, tutte le superficie rappresentate da

$$f+\lambda f'+\mu f''=0$$

formano ciò che si chiama una *rete di quadriche.*

Tutte le quadriche di una rete hanno otto punti comuni (punti base della rete).

Fra le quadriche di una rete ve ne sono infinite tangenti ad un piano; i punti di contatto stanno su di una curva generale di 3.° ordine.

Tutte le quadriche che passano per sette punti dello spazio, passano tutte ancora per un altro medesimo punto.

Gli otto punti base di una rete di quadriche hanno la proprietà che la cubica storta determinata da sei di essi ha per secante la congiungente gli altri due.

I piani polari di un punto P rispetto a tutte le quadriche di una rete passano per un medesimo punto (punto coniugato di P).

Il luogo del polo di un piano rispetto a tutte le quadriche di una rete è una superficie generale di 3.° ordine, su cui esistono anche i punti coniugati; rispetto alla rete, di tutti i punti del piano.

Fra le superficie della rete ve ne sono infinite che si riducono a coni; il luogo del vertice è una curva di 6.° ordine; su questa curva vi sono anche tutti gli infiniti punti i cui piani polari rispetto alle superficie della rete passano tutti per una retta.

Gli antichi geometri non aveano fatta una classificazione sistematica delle varie quadriche; la prima classificazione si deve ad Eulero (*Introductio in Anal. infin.*, 1748). La teoria delle quadriche progredì moltissimo nella prima metà di questo secolo per opera dei geometri della scuola francese, Monge, Hachette, Lacroix, Binet, Leroy, Poncelet, Chasles. Le coniche focali furono trovate da Dupin (*Corr. Éc. polyt.*, II) e studiate poi da Steiner (*Crelle*, I) e Chasles (*Aperçu hist.*, nota 31).

Dal punto di vista della geometria proiettiva furono fondamentali per la teoria delle quadriche le memorie speciali di Hesse (*Crelle*, XVIII, XX, XXVI, etc.), di Seidewitz (*Grunert's Arch.*, VII, VIII, IX, X), Sturm (*Crelle*, LXX, IC, etc.), oltre quelle di Staudt e Reye (v. *Geom. der Lage*) e di altri.

Una lista estesa di lavori sulle quadriche si trova nell'opera di Loria (*Il passato e il presente delle teorie geometriche.* Torino, 1896, pagina 91-99) a cui rimandiamo per ulteriori ragguagli bibliografici.

Trattati sulle quadriche dal punto di vista della geometria analitica sono quelli di SALMON-FIEDLER, di HESSE, di BALTZER, di D'OVIDIO, e il 2.° volume della *Geometria* di CLEBSCH-LINDEMANN, Leipzig, 1891, dal punto di vista sintetico ricordiamo quello assai esteso di SCHRÖTER, Leipzig, 1880.

La geometria descrittiva delle superficie di 2.° grado si trova nella *Darst. Geom.* di FIEDLER.

In fine del trattato del D'OVIDIO si trovano poi parecchie accurate indicazioni sugli scopritori di alcuni fra i principali teoremi sulle quadriche.

Per le proprietà focali delle quadriche citiamo il recente libro di STAUDT (*Die Focaleigenschaften der Fläch. 2ter Ord.* Leipzig, 1896).

Dal punto di vista della teoria delle forme quaternarie quadratiche le ricerche sono pochissime. Citeremo un lavoro di MERTENS (*Wien. Bericht.*, XCVIII) in cui si dà il sistema completo di forme invariantive di una quadrica, ridotto a 20 formazioni, e si dà qualche indicazione sul sistema completo di due quadriche.

CAPITOLO VI.

Teoria generale delle curve piane algebriche.

§ 1. — Generalità. Punti singolari. Formole di Plücker. Discriminante.

Il luogo di punti, rappresentato analiticamente da un'equazione algebrica di grado n fra le due coordinate cartesiane, o fra le tre coordinate omogenee, di un punto del piano, è *una curva-luogo* piana o semplicemente *una curva piana di ordine n. Il luogo di primo ordine è la retta.*

La *tangente* di una curva-luogo è il limite della posizione della congiungente due suoi punti indefinitamente vicini.

Correlativamente: l'inviluppo delle rette rappresentate da un'equazione algebrica di grado n, fra le coordinate della retta del piano è *una curva-inviluppo di classe n. L'inviluppo di prima classe è il punto.*

Il *punto* di una curva inviluppo è la posizione limite dell'intersezione di due tangenti infinitamente vicine.

Le curve o inviluppi le cui equazioni non si spezzino in fattori interi, si dicono *semplici* o *indecomponibili.*

Una curva piana di ordine n è segata da qualunque retta del piano sempre in n punti (reali o immaginari).

Per ogni punto del piano passano sempre n rette (reali o immag.) tangenti ad una curva inviluppo di classe n.

Due curve di ordini n_1, n_2, hanno in generale $n_1 n_2$ punti comuni (reali o immag.); e due inviluppi di classi n_1, n_2 hanno $n_1 n_2$ tangenti comuni.

Dati ad arbitrio nel piano $\frac{n(n+3)}{2}$ punti, vi è una e una sola curva di ordine n che passa per essi e correlativamente.

Un punto di una curva si dirà r^{plo} *o multiplo di ordine r*, se per esso la curva passa r volte, e però in quel punto la curva ha r tangenti; se queste sono tutte distinte, il punto r^{plo} si dirà *ordinario. Una tangente* si dirà r^{pla} quando tocchi la curva-inviluppo r volte, e quindi ammetta r punti di contatto; se questi sono distinti si avrà la tangente r^{pla} ordinaria.

Se una curva di ordine n ha un punto n^{plo}, essa non è altro che l'assieme di n rette che partono da quel punto.

Una curva semplice di ordine n non può avere oltre un punto $n-1^{plo}$ anche un punto doppio.

Una curva semplice di ordine n non può avere più di $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ punti doppi.

Se una curva semplice d'ordine n ha punti multipli ordinari i cui ordini sieno $r_1\, r_2 \ldots r_\nu$ sarà

$$\sum_{i=1}^{i=\nu} \frac{r_i (r_i - 1)}{2} \leqq \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Per tutti questi teoremi possono enunciarsi i loro correlativi.

Tutte le infinite curve di ordine n che passano per

$$\frac{1}{3} n(n+3) - 1$$

dati punti, passano anche per altri

$$\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

altri punti determinati dai primi.

Se degli n^2 punti comuni di due curve di ordine n, $n\,m$ $(m < n)$ di essi stanno su di una curva di ordine m, gli altri $n(n-m)$ punti stanno su di una curva di ordine $n-m$.

Il massimo numero di punti che si possono prendere AD ARBITRIO *su di una curva di ordine m nell'intento di far passare per essi una curva semplice di ordine $n > m$, è*

$$n\,m - \frac{1}{2}(m-1)(m-2) \qquad \left(\begin{matrix}\textit{teor. di } \text{Jacobi,} \\ \textit{Crelle, XV}\end{matrix}\right).$$

Tutte le curve d'ordine n descritte per $n\,m - h$ punti di una curva di ordine m, e per

$$n(n-m) - h'$$

punti di una curva di ordine $n - m$, segano la prima curva in altri h punti FISSI *e la seconda in altri h' punti* FISSI *(teor. di* PLÜCKER, *Alg. Curven*, p. 11).

Ogni curva di ordine n che passa per

$$n\,m - \frac{1}{2}(m-1)(m-2)$$

punti di un'altra curva di ordine $m < n$, la taglia ancora in altri $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ punti FISSI.

Qualunque curva d'ordine n descritta per

$$m\,m' - \frac{1}{2}(m+m'-n-1)(m+m'-n-2)$$

intersezioni di due curve, d'ordine m, m' (m, m' non maggiori di n) passa anche per tutti gli altri punti comuni a queste curve (teor. di CAYLEY, *Camb. Math. Journ.* III, 1843).

Se nei punti in cui una curva d'ordine n è segata da una retta, si conducono le tangenti alla curva, esse incontrano la curva medesima in altri $n(n-2)$ punti situati sopra una curva d'ordine $n-2$ (PONCELET).

Un teorema importante massime per la cosiddetta Geometria su di una curva algebrica (v. § 4) è il seguente di NOETHER:

Si abbiano due curve $\varphi = 0$, $\psi = 0$; uno dei loro punti d'incontro P_i sia multiplo secondo q_i per φ e secondo r_i per ψ e sia $q_i \leqq r_i$; sia $f = 0$ una curva la quale passi per ciascuno dei punti d'in-

contro di φ *e* ψ *e abbia in* P_i *un punto multiplo d'ordine* $q_i + r_i - 1$; *la sua equazione potrà allora sempre esprimersi colla forma*

$$f = A\varphi + B\psi = 0$$

dove $A = 0$, $B = 0$ *rappresentano due altre curve di ordine conveniente.*

Perchè f possa rappresentarsi sotto questa forma non è però necessario che essa abbia in P_i *un punto multiplo d'ordine* $q_i + r_i - 1$, *ma è però necessario che lo abbia almeno d'ordine* q_i *(il minore dei due ordini): in quest'ultimo caso devono però sussistere fra i coefficienti dell'equazione di f, delle relazioni lineari.*

Per questo teorema vedi NOETHER (*Math. Ann.* VI, 352), HALPHEN (*Bull. de la Soc. math.* V), BACHARACH (*Math. Ann.* XXVI), VOSS (*Idem* XXVII), CAYLEY (*Id.* XXX), STICKELBERGER (*Id. Id.*), NOETHER (*Id. Id.*), ZEUTHEN (*Id.* XXXI), GUCCIA (*Compt. Rend.* 1888) e altri. Si può poi anche vedere la *Geom.* di CLEBSCH-LINDEMANN.

Un punto multiplo d'ordine k può considerarsi come la riunione di $\frac{k(k-1)}{2}$ *punti doppi, e una tangente multipla d'ordine k può considerarsi come la riunione di* $\frac{k(k-1)}{2}$ *tangenti doppie.*

Una tangente ad una curva di ordine n, ha colla curva ancora altri $n - 2$ *punti comuni, oltre quello di contatto; e da un punto di una curva di classe n, possono condursi alla curva ancora altre* $n - 2$ *tangenti, oltre quella nel punto.*

In un punto doppio le due tangenti possono essere reali e distinte, immaginarie, e coincidenti; nel secondo caso si ha il cosiddetto *punto doppio isolato*, e nel terzo caso si ha la *cuspide* o *punto di regresso* o *punto stazionario*.

La tangente nella cuspide (tangente cuspidale) conta come tre delle tangenti che dalla cuspide si possono condurre alla curva.

Correlativamente alla cuspide è da considerarsi la cosiddetta *tangente d'inflessione o stazionaria*, una tangente alla curva i cui rimanenti punti di intersezione colla curva sono $n - 3$, il cui punto di contatto, cioè, è da considerarsi come la riunione di tre punti infinitamente vicini. Tal punto di contatto si chiama *flesso della curva*. La tangente di inflessione è da considerarsi come una tangente doppia i cui punti di contatto coincidono; tale considerazione però bisogna farla immaginando la curva come inviluppo di tangenti.

I punti multipli e le tangenti multiple si chiamano generalmente *punti e tangenti singolari*.

È però da notare che un punto doppio o una cuspide non è da considerarsi come *singolarità* che solo quando la curva è considerata come un luogo di punti, e non quando è considerata come inviluppo di tangenti, perchè in tale ultimo caso ogni inviluppo possiede sempre un certo numero di punti doppi. Similmente una tangente doppia o una tangente d'inflessione è da considerarsi come *singolarità* solo quando la curva è considerata come inviluppo e non come luogo.

Di una curva sia n l'ordine, ν la classe, d il numero dei punti doppi, r il numero dei punti di

regresso o cuspidi, τ il numero delle tangenti doppie e ι il numero delle tangenti di flesso.

Fra questi numeri sussistono allora quattro relazioni rimarchevoli che si chiamano le formole di Plücker *(Crelle, XII).*

$$\nu = n(n-1) - 2d - 3r$$

$$n = \nu(\nu-1) - 2\tau - 3\iota$$

$$\iota = 3n(n-2) - 6d - 8r$$

$$r = 3\nu(\nu-2) - 6\tau - 8\iota.$$

Da queste formole, di cui una è conseguenza delle altre tre, risultano le altre relazioni:

$$3(\nu - n) = \iota - r$$

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} - d - r = \frac{(\nu-1)(\nu-2)}{2} - \tau - \iota.$$

Una curva-luogo generale, cioè senza punti doppi e cuspidi ha la classe, il numero delle tangenti doppie, e il numero dei flessi, determinati dalle relazioni

$$\nu = n(n-1)$$

$$\iota = 3n(n-2)$$

$$\tau = \frac{1}{2} n(n-2)(n^2-9),$$

e correlativamente.

Per la presenza di d punti doppi e r cuspidi, il numero delle tangenti doppie diventa

$$\tau = \frac{1}{2} n (n-2)(n^2-9) - (2d+3r)[n(n-1)-6] +$$
$$+ 2d(d-1) + \frac{9}{2} r (r-1) + 6dr.$$

Introducendo il cosiddetto *genere* (RIEMANN, *Crelle*, LIV; CLEBSCH, *Id.*, LXIII, LXIV) *di una curva* le formole di PLÜCKER acquistano altra forma.

Poniamo

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d - r$$

$$= \frac{(\nu-1)(\nu-2)}{2} - \tau - \iota\,;$$

il numero p si chiama *genere* della curva-luogo e della curva-inviluppo. *Esso rappresenta la differenza fra il numero massimo di punti doppi e cuspidi che può avere la curva-luogo senza spezzarsi, e il numero di quelli che effettivamente ha.*

Ovvero: *la differenza fra il numero massimo di tangenti doppi e flessi che può avere la curva inviluppo e il numero di quelli che effettivamente possiede.*

Le formole di Plücker diventano allora:

$$\begin{aligned} 2p \quad 2 &= \nu + r - 2n \\ &= n + \iota - 2\nu \\ &= n(n-3) - 2(d+r) \\ &= \nu(\nu-3) \quad 2(\tau+\iota). \end{aligned}$$

Nelle formole di Plücker non si fa distinzione fra punti e tangenti singolari, reali o immaginarie. Esiste però una relazione fra le sole singolarità reali (v. su questo KLEIN, *Math. Ann.* X; PERRIN, *Bull. de la Soc. math.* VI).

Il genere p per una curva semplice non può essere che o zero o positivo.

Una curva di genere zero si dice *razionale* o *unicursale* (CAYLEY) e *le coordinate dei suoi punti si possono esprimere come funzioni razionali di un parametro. Essa ha* $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ *punti doppi e cuspidi.*

Fra gli $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ *punti doppi e cuspidi di una curva di genere zero, non vi possono essere al massimo che* $\frac{3(n-2)}{2}$ *cuspidi.*

Il concetto di genere fu introdotto da RIEMANN (cit.), e indi applicato da CLEBSCH alla geometria (cit.). Il CAYLEY adoperò invece di *genere* (detto *Geschlecht* dei tedeschi) la parola *defect* (*London math. soc.* 1865).

In quanto alla forma di una curva cioè alla figura formata da tutti i punti reali di essa ecco alcune fondamentali nozioni: Una curva può risultare di diversi rami, intendendo per ramo di una curva l'assieme di tutti quei punti reali della curva stessa, tale che si possa con continuità passare da un punto ad un altro, incluso anche il caso che si debba passare per l'infinito; così p. es. le due parti di un' iperbole formano, secondo il nostro punto di vista, un ramo solo.

Un ramo di una curva può essere pari o dispari secondochè è tagliata da una retta in un numero pari o dispari di punti reali. *Un ramo dispari può generarsi colla deformazione di una retta, e un ramo pari colla deformazione di una conica.*

Due rami dispari si incontreranno sempre, quindi:

Una curva senza punti doppi non può contenere che un solo ramo dispari, al più. Propriamente:

Una curva senza punti doppi e di ordine dispari conterrà sempre un ramo dispari, e se è di ordine pari non ne conterrà alcuno.

Queste distinzioni vengono da STAUDT (*Geom. der Lage*, Nürnberg, 1847); vedi anche KLEIN (*Math. Ann.* VI); ZEUTHEN (*Id.*, VII), etc., etc.

Una curva di genere p *non può avere più di* $p+1$ *rami, se* $(n-1)(n-2)$ *è eguale o maggiore di* p, *esistono sempre curve di ordine* n *aventi* $p+1$ *rami* (HARNACK, *Math. Ann.*, X).

Stabiliamo ora alcune formole fondamentali per la geometria analitica delle curve piane algebriche.

Supponiamo scritta l'equazione della curva in coordinate cartesiane ovvero in coordinate omogenee proiettive.

Nel primo caso supponiamo raccolti tutti i termini di grado zero, uno, due,... nelle coordinate, e messa quindi l'equazione sotto la forma

$$f = u_0 + u_1 + u_2 + \dots u_n = 0$$

dove in generale u_r è una espressione intera omogenea nelle due coordinate x e y.

Nel secondo caso, chiamando $x_1\,x_2\,x_3$ le tre coordinate omogenee, possiamo porre l'equazione sotto la forma

$$f = u_0\,x_3{}^n + u_1\,x_3{}^{n-1} + \ldots + u_n = 0$$

ovvero adoperando i principi del calcolo simbolico delle forme ternarie (vedi vol. I, Cap. XII; e vol. II, Cap. III) sotto la forma simbolica

$$f = a_x{}^n = b_x{}^n = c_x{}^n = \ldots = 0.$$

Se $u_0 = 0$ allora la curva passa per l'origine delle coordinate (nel primo caso), ovvero passa per il vertice ($x_1 = 0, x_2 = 0$) del triangolo fondamentale delle coordinate (nel secondo caso).

In tal caso l'equazione $u_1 = 0$, rappresenta la tangente nel medesimo punto.

Se è $u_0 = 0$, $u_1 = 0$, quel punto è un punto doppio per la curva f; le due tangenti in tal punto doppio sono date da $u_2 = 0$. Se u_2 è un quadrato perfetto, senza che la base di esso cioè $\sqrt{u_2}$ sia fattore razionale di u_3, allora quel punto è una cuspide; se invece $\sqrt{u_2}$ è fattore razionale di u_3, allora il punto non è propriamente una cuspide, ma un punto in cui la curva tocca sè stessa (Selbstberührungspunkt), il quale è da considerarsi come la riunione di due punti doppi; in tal caso la tangente ha quattro intersezioni, infinitamente vicine, colla curva, e non solo tre come nel caso della cuspide.

Se in generale $u_0 = u_1 = \ldots = u_{r-1} = 0$ *allora il punto origine è un punto* r^{plo} *della* $f = 0$, *e le* r *tangenti in esso sono determinate da* $u_r = 0$.

Per un punto doppio le tre derivate di f rispetto ad $x_1\, x_2\, x_3$ devono essere zero, cioè deve essere

$$a_x^{n-1}\, a_1 = a_x^{n-1}\, a_2 = a_x^{n-1}\, a_3 = 0.$$

Eliminando x *fra queste tre equazioin si ha un'equazione*

$$R = 0$$

dove R *è una formazione invariantiva dei coefficienti dell'equazione della curva.*

Tale invariante si chiama *discriminante della curva.*

Il suo annullarsi è condizione necessaria e sufficiente perchè f *abbia un punto doppio.*

Tacendo di altri lavori speciali più antichi, le prime ricerche sistematiche sulla teoria generale delle curve sono contenute nella *Introductio in anal. infin.* di EULERO (1748) e nella *Introduction à l'anal. des lignes courbes algeb.* (1750) di CRAMER. Appartiene anche ad EULERO (*Sur une contradiction apparente dans la doctrine des courbes.* Acc. di Berl. 1748) la spiegazione del paradosso che due curve di n^{mo} ordine si tagliano in un numero di punti maggiore di quanti ne occorrono per determinarne una.

Dopo questi, tralasciando altri lavori di LAMÈ, di GERGONNE, etc. furono importantissimi il *System der analyt. Geom.* (1835) di PLÜCKER, la

Theorie der alg. Curven (1839) del medesimo Autore, e altri lavori dello stesso (*Journ. de Liouville*, 1834, 1837) nei quali il Plücker dette le famose formole, che prendono il nome da lui.

Sui punti singolari lavori notevoli furono quelli di Puiseaux (*Journ. de Liouville*, 1850), di Cayley (*Quart. Journ.* VII, XI, *Crelle*, LXIV, etc.), di Halphen (*Mém. des sav. étrang.* XXVI, *Compt. Rend.* LXXVIII, LXXX), Stolz (*Math. Ann.* VIII), etc.

Un lavoro fondamentale sulla teoria generale delle curve fu l'*Introduzione a una teoria geometrica delle curve piane* di Cremona (Bologna, 1862; tradotta anche in tedesco nel 1865) e i libri in cui sono sistematicamente raccolti, e con metodi analitici, tutti i principali risultati, sono quelli molto conosciuti di Salmon *(Sulle curve piane di grado elevato)* tradotto in varie lingue, e quello di Clebsch-Lindemann *(Lezioni di Geometria)*. Nei seguenti paragrafi daremo altre indicazioni storiche e bibliografiche, relative ai soggetti che vi si tratteranno.

§ 2. — Teoria della polarità. Curve covarianti.

Data la curva rappresentata simbolicamente con

$$f = a_x^n = b_x^n = \ldots = 0 \qquad \text{(v. Cap. III)}$$

le curve rappresentate da

$$a_x^{n-1} a_y = 0$$

$$a_x^{n-2} a_y^2 = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$a_x a_y^{n-1} = 0$$

si chiamano rispettivamente *curve polari* di 1.°, 2.°,... ordine del polo y rispetto alla curva data. I primi membri di queste equazioni si ottengono applicando su f, una, due,... volte l'operazione cosiddetta di polare, che è, a meno di un fattore numerico, nel nostro caso *(campo ternario)* rappresentata dal simbolo:

$$\Delta = y_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + y_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \qquad \text{(v. I, 282).}$$

Se dal punto y si conduce una retta che tagli la curva in n punti, questa taglierà le curve polari di 1.°, 2.°... ordine, di y, nei centri armonici di $n-1^{mo}$, $n-2^{mo}$... ordine di y rispetto al gruppo degli n punti.

Questa proprietà potrebbe servire come fondamento alla definizione delle curve polari.

Se il punto y è sulla r^{ma} polare di z, z è situato sulla $n-r^{ma}$ polare di y.

Se il polo y è situato sulla curva data, tutte le sue curve polari passeranno per esso e in esso saranno tangenti alla curva data.

La $n-1^{ma}$ polare (retta polare) di un punto, che appartiene alla curva fondamentale, è la tangente in quel punto.

Gli $n(n-1)$ punti, nei quali la prima polare di un punto (y) taglia la curva data, sono i punti di contatto delle tangenti condotte da (y) alla curva data.

Un punto r^{plo} della curva fondamentale è multiplo di grado $r-s$ per la polare s^{ma} di qualunque polo.

Se una curva si spezza in una retta e in un'altra curva di ordine $n-1$, la prima polare di un punto della retta è composta di essa retta e della prima polare rispetto alla curva di ordine $n-1$.

La polare r^{ma} di un punto O_r rispetto alla polare s^{ma} di un punto O_s coincide colla polare s^{ma} di O_s rispetto alla polare r^{ma} di O_r.

Se la curva fondamentale ha un punto doppio D, la prima polare di un qualsivoglia polo O passa per D ed ivi ha per tangente la retta coniugata armonica di DO rispetto alle due tangenti nel punto doppio. Se il punto doppio è una cuspide, la tangente alla prima polare è la stessa tangente cuspidale.

Le prime polari di tutti i punti di una retta formano un fascio di curve cogli stessi $(n-1)^2$ punti base.

La conica polare d'un punto doppio si decompone in due rette che sono le due tangenti nel punto doppio.

La conica polare d' un flesso si decompone in due rette, una delle quali è la tangente d'inflessione.

Se un punto della curva fondamentale ha per conica polare il sistema di due rette, esso è o un punto doppio o un flesso per la curva fondamentale.

Se il polo percorre una curva d'ordine m, la retta polare inviluppa una curva di classe $m(n-1)$.

Sopra ogni retta esistono $2(n-2)$ punti di cui le prime polari sono toccate dalla retta; le coniche polari dei punti di contatto sono tangenti a questa stessa retta.

Un polo che sta in linea retta con n punti di una curva di ordine n, ha la stessa retta polare rispetto alla curva, e rispetto al sistema delle n tangenti negli n punti.

La retta polare di un punto all'infinito in una determinata direzione si dice *diametro della curva di ordine n.*

Il diametro è il luogo dei centri delle medie distanze (v. Cap. II, § 2) *di tutti i sistemi di n punti tagliati sulla curva da un sistema di corde parallele.*

Considerando la curva come inviluppo di classe ν, il polo della retta all'infinito si dirà *centro.*

Il centro è l'inviluppo (punto) di una retta parallela ad un sistema di ν tangenti alla curva fra loro parallele, e passanti per il centro delle medie distanze dei ν punti che le ν tangenti determinano su di una retta ad esse perpendicolare.

Se da un punto O si conducono due rette che tagliano la curva nei punti

$$R_1 R_2 \dots R_n\,,\ S_1 S_2 \dots S_n\,;$$

il rapporto

$$\frac{O R_1 \ldots O R_n}{O S_1 \ldots O S_n}$$

è costante qualunque sia il punto O purchè la direzione delle trasversali resti costante (teor. di NEWTON, *Enum. lin. tertii ordinis).*

Si abbia un poligono $A\,B\,C \ldots$ i cui lati taglino una curva di n^{mo} ordine in n punti; si indichino con $(B)_1$ $(B)_2$ i prodotti dei segmenti (contati da B sino agli n punti) segnati rispett. sui lati $B\,C$, $B\,A$; con (C_1), (C_2) i prodotti analoghi, ecc.; *si avrà la relazione*

$$(A)_1 (B)_1 (C)_1 \ldots = (A)_2 (B)_2 (C)_2 \ldots$$

(teor. di CARNOT, *Géom. de position*, pag. 437).

Se su ogni retta condotta per un punto O, e segante la curva in $R_1\,R_2 \ldots R_n$ si determina un punto R in modo che

$$\frac{n}{O\,R} = \frac{1}{O\,R_1} + \frac{1}{O\,R_2} + \ldots$$

ovvero

$$\sum_1^n \left(\frac{1}{O\,R} - \frac{1}{OR_i} \right) = 0,$$

il luogo di R è una retta (teor. di COTES, *Harmonia mensurarum*, 1722) *la quale è propriamente la retta polare di O.*

Similmente: *la conica polare del punto O è il luogo di un punto R che soddisfa alla relazione*

$$\sum_{ij} \left(\frac{1}{O\,R} - \frac{1}{OR_i} \right) \left(\frac{1}{O\,R} - \frac{1}{OR_j} \right) = 0, \quad \text{ecc., ecc.}$$

Per un punto O si conduca una retta che tagli la curva in n punti, e in questi si conducano le tangenti alla curva; *per O si conduca poi una qualunque altra trasversale che tagli la curva in $R_1 \dots R_n$, e le tangenti in $r_1 \dots r_n$; si ha allora*

$$\sum_1^n \frac{1}{OR_i} = \sum_1^n \frac{1}{O r_i} \qquad \textit{(teor. di } \text{MACLAURIN).}$$

Introduciamo ora tre importanti curve covarianti, la *Hessiana*, la *Steineriana* e la *Cayleyana.*

Il luogo dei punti doppi delle prime polari dei punti del piano è la *Hessiana;* il luogo dei punti le cui prime polari hanno un punto doppio è la *Steineriana; i punti di queste due curve si corrispondono biunivocamente;* l'inviluppo delle rette che congiungono un punto della *Steineriana* col punto corrispondente della *Hessiana* è infine la *Cayleyana.*

Se $f = a_x^n = b_x^n = c_x^n = \dots = 0$ (in notaz. simbolica, v. Cap. III) è la equazione della curva data, *quella della Hessiana è*

$$(a\,b\,c)^2\, a_x^{n-2}\, b_x^{n-2}\, c_x^{n-2} = 0$$

ovvero $\left(\textit{ponendo } f_{ij} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}\right)$

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

La equazione della Steineriana si ottiene poi eliminando x fra le tre equazioni

$$a_x^{n-2} a_y a_1 = 0$$

$$a_x^{n-2} a_y a_2 = 0$$

$$a_x^{n-2} a_y a_3 = 0.$$

Il seguente quadro dà i valori per i numeri plückeriani (ordine, classe, ecc. ecc.) relativi alle tre curve ora introdotte.

Si suppone che la curva data sia generale, cioè non ammetta punti doppi e cuspidi, e sia di ordine n.

I. *Hessiana.*

genere $= \frac{1}{2}(3n-7)(3n-8)$

ordine $= 3(n-2)$

classe $= 3(n-2)(3n-7)$

punti doppi $= 0$

cuspidi $= 0$

tang. doppie $= \frac{27}{2}(n-1)(n-2)(n-3)(3n-8)$

flessi $= 9(n-2)(3n-8)$.

II. *Steineriana.*

genere $= \frac{1}{2}(3n-7)(3n-8)$

ordine $= 3(n-2)^2$

classe $= 3(n-1)(n-2)$

punti doppi $= \frac{3}{2}(n-2)(n-3)(3n^2-9n-5)$

cuspidi $= 12(n-2)(n-3)$

tang. doppie $= \frac{3}{2}(n-2)(n-3)(3n^2-3n-8)$

flessi $= 3(n-2)(4n-9)$.

III. *Cayleyana.*

genere $= \frac{1}{2}(3n-7)(3n-8)$

ordine $= 3(n-2)(5n-11)$

classe $= 3(n-1)(n-2)$

punti doppi $= \frac{9}{2}(n-2)(5n-13)(5n^2-19n+16)$

cuspidi $= 18(n-2)(2n-5)$

tang. doppie $= \frac{9}{2}(n-2)^2(n^2-2n-1)$

flessi $= 0$.

Se la curva data ammette dei punti doppi e cuspidi, allora a questa tabella devono farsi delle modificazioni.

Per $n = 3$ le formole relative alla Cayleyana cadono in difetto; in questo caso la Hessiana e la Steineriana sono una sola e medesima curva di 3.° ordine, e la Cayleyana anzichè di 6.ª classe è solo di 3.ª classe; anzichè di 12.° ordine è solo di 6.° ordine, e anzichè 18 cuspidi ne ha solo 9.

Della Hessiana, Steineriana e Cayleyana si possono dare varie definizioni che corrispondono ad altrettante loro proprietà specifiche.

L'Hessiana di una curva è:

a) il luogo di un punto nel quale si toccano due (epperò infinite) prime polari;

b) il luogo dei punti doppi delle prime polari;

c) il luogo di un polo la cui conica polare si scinde in due rette;

d) il luogo di un polo le cui rette polari rispetto alle prime polari della curva, concorrono in un punto.

La Steineriana di una curva è:

a) il luogo dei poli delle prime polari dotate di punti doppi;

b) il luogo dei punti d'intersezione delle coppie di rette che rappresentano coniche polari;

c) l'inviluppo delle rette polari dei punti dell'Hessiana;

d) il luogo dei punti le cui prime polari toccano l'Hessiana;

e) il luogo di un punto nel quale concorrono le rette polari di uno stesso polo rispetto alle prime polari della curva fondamentale.

La Cayleyana di una curva è:

a) l'inviluppo delle rette che uniscono i punti corrispondenti della Hessiana e della Steineriana;

b) l'inviluppo delle tangenti comuni nei punti di contatto fra le prime polari.

In un punto doppio della curva fondamentale, la Hessiana ha anche un punto doppio colle stesse tangenti.

In una cuspide della curva fondamentale, la Hessiana ha un punto triplo, e due dei suoi rami toccano la tangente cuspidale; in tal punto sono da considerarsi riunite otto delle intersezioni della curva colla Hessiana.

L'Hessiana passa per i flessi della curva fondamentale.

La Steineriana e Cayleyana toccano ambedue le tangenti di flesso della curva fondamentale.

L'Hessiana in un suo punto qualunque è tangente alla seconda polare del corrispondente punto della Steineriana.

La tangente in un punto O dell'Hessiana è la coniugata armonica della retta che congiunge esso col punto corrispondente O' della Steineriana, rispetto alle due rette che toccano la prima polare di O' nel punto doppio; e la tangente in O' alla Steineriana è la coniugata armonica di O' O rispetto alle due rette nelle quali degenera la conica polare di O.

La teoria delle polari trova i suoi inizi nei lavori di Cramer, Newton e altri, sui diametri rettilinei o curvilinei delle curve. È a Bobillier

che si devono concetti più generali (*Ann. de Gergonne*, XVIII, XIX, 1828). Indi se ne occuparono PLÜCKER (*Crelle*, V), GRASSMANN (*Crelle*, XXIV), DE JONQUIERES (*Journ. de Liouville*, 1857), CAYLEY (*Phil. Trans.* CXLVIII). Indi il CREMONA pose la teoria delle polari a fondamento di tutta la teoria delle curve, nella sua citata *Introduzione.*

La Hessiana fu introdotta da HESSE (*Crelle*, XXVIII, XLI) e cosi chiamata da SYLVESTER (*Phil. Trans.*, CXLIII); la *Steineriana* fu introdotta da STEINER (*Crelle*, XLVII) e così chiamata da CREMONA *(Intr.)* mentre da STEINER era stata chiamata *curva nodo (Kerncurve)*; la *Cayleyana* fu introdotta da CAYLEY per le curve di 3.° ordine (*Phil. Trans.*, CXLVII, 1857) e indi studiata da STEINER (*Crelle*, XLVII). È importante il lavoro di CLEBSCH (*Crelle*, LXIV) sulla *Steineriana.*

Sono stati parecchi i lavori che hanno cercato di dimostrare la proposizione della mancanza di punti singolari nella Hessiana corrispondente ad una curva generale. Questa proposizione era stata ammessa come postulato dal CREMONA, e per le curve di 4.° ordine fu dimostrata da GEISER (*Ann. di mat.*, IX). Altri lavori sulla Hessiana sono quelli di DEL PEZZO (*Rend.* Napoli, 1883), BRILL (*Math. Ann.*, XIII), SEGRE (*Rend. Lincei*, 1895), etc.

§ 3. — Sistemi lineari di curve piane.

Se $a_x^n = 0$, $b_x^n = 0, \ldots$ sono le equazioni di $k+1$ curve piane di ordine n, il sistema rappresentato da

$$\lambda_1 a_x{}^n + \lambda_2 b_x{}^n + \ldots = 0$$

dove $\lambda_1 \lambda_2 \ldots$ sono $k+1$ parametri arbitrari, costituisce ciò che si chiama *un sistema lineare di specie k*. Per $k=1$ si ha *il fascio*, per $k=2$ si ha *la rete*.

Un sistema lineare di specie k è determinata da $k+1$ curve di ordine n, le quali non appartengano ad un medesimo sistema lineare di specie inferiore.

Se $k > 1$ le curve del sistema non avranno in generale alcun punto comune (punti base); però se tutte le $k+1$ curve che individuano il sistema, hanno un punto comune, questo punto apparterrà anche a tutte le altre curve del sistema.

Se $k=1$ vi saranno sempre n^2 punti base del fascio, cioè punti pei quali passano tutte le curve del sistema.

Un sistema lineare di curve di ordine n e di specie k determina su di una trasversale un'involuzione di punti di ordine n e specie k (v. Capitolo II, § 1).

Fra le curve di un sistema lineare ve ne sono $(k+1)(n-k)$ le quali hanno un contatto di k^{mo}

ordine con una retta data (cioè $k+1$ punti infinitamente vicini comuni).

Fra le curve di un sistema lineare ve ne sono

$$\frac{2^k(n-k)(n-k-1)\dots(n-2k+1)}{k!}$$

ciascuna delle quali tocca k volte una retta data.

Fra le curve di un fascio ve ne sono $2(n-1)$ che toccano una data retta; e ve ne sono $m(2n+m-3)$ che toccano una data curva di ordine m, senza punti doppi e cuspidi. Nel caso che questa avesse d punti doppi e r cuspidi, bisognerebbe da quel numero ancora sottrarre $2d+3r$.

Fra le curve d'una rete ve ne sono $3(n-2)$ per ciascuna delle quali una data retta è tangente di flesso.

Se si considerano i due fasci di raggi che hanno per centri due degli n^2 punti base di un fascio di curve di ordine n, e si considerano come corrispondenti i due raggi che sono le tangenti condotte nei due punti base ad una medesima curva del fascio, *i due fasci di raggi sono proiettivi*; quindi *il rapporto anarmonico delle quattro tangenti a quattro curve del fascio in un medesimo punto base, è lo stesso di quello delle quattro tangenti in un altro qualunque punto base;* questo rapporto anarmonico lo possiamo perciò chiamare *rapporto anarmonico delle quattro curve del fascio.*

Fra le curve di un fascio che si toccano tutte in un punto base P, ve n'è una per cui P è flesso, e un'altra per la quale P è punto doppio.

Fra le curve di un fascio di cui un punto base P è punto doppio per tutte le curve (a tangenti

distinte e variabili da curva a curva) ve ne sono due per cui P è cuspide; se una delle due tangenti è comune a tutte le curve, allora ve n' è una sola di queste per cui P è cuspide; e se ambedue le tangenti sono fisse, vi è una curva del fascio per cui A è punto triplo.

In un fascio esistono in generale $3(n-1)^2$ *curve a punti doppi.*

Questo teorema subisce modificazioni quando le curve del fascio hanno dei punti multipli di varia natura. Su ciò vedi Cremona (*Introduzione*, *ecc.* e *Annali di Mat.* VII, 1864).

Date tre curve di cui le equazioni sieno

$$a_x^n = 0$$

$$b_x^n = 0$$

$$c_x^n = 0$$

la condizione perchè appartengano allo stesso fascio è che il loro jacobiano

$$(a\,b\,c)\,a_x^{n-1}\;b_x^{n-1}\;c_x^{n-1}$$

sia identicamente zero (v. Gordan-Noether, *Math. Ann.* X).

Se da un punto O si conducono le tangenti a tutte le curve di un fascio, i punti di contatto giacciono in una curva d'ordine $2n-1$ *che passa per O e per gli* n^2 *punti base del fascio.*

I punti doppi delle curve di un fascio hanno la medesima retta polare rispetto a tutte le curve del fascio stesso.

Il luogo di un punto in cui si tocchino due (e quindi infinite) curve di una rete è una curva di ordine $3(n-1)$ *che si chiama* HESSIANA *della rete o anche* JACOBIANA *della rete. Colle solite notazioni del calcolo simbolico, la sua equazione è*

$$(a\,b\,c)\,a_x^{n-1}\,b_x^{n-1}\,c_x^{n-1} = 0.$$

Essa è un combinante del sistema delle tre curve fondamentali della rete; cioè il primo membro della sua equazione si moltiplica solo per un fattore costante se ad una delle tre curve si sostituisce una combinazione lineare di esse.

L'Hessiana di una rete è il luogo dei punti doppi delle curve della rete; ovvero, è il luogo dei punti le cui rette polari rispetto alle curve della rete concorrono in un punto.

Il luogo dei punti in cui concorrono le rette polari, rispetto alle curve della rete, di tutti i punti dell'Hessiana è la curva detta *Steineriana;* e l'inviluppo delle rette congiungenti i punti corrispondenti dell'Hessiana e della Steineriana è una curva detta *Cayleyana.*

La Steineriana è di ordine $3(n-1)^2$, *e la Cayleyana è di classe* $3\,n\,(n-1)$.

Considerando la rete delle prime polari rispetto ad una curva data, la Hessiana, la Steineriana e la Cayleyana della rete, diventano le omonime curve relative alla curva fondamentale data (vedi § 2).

La Hessiana o Jacobiana della rete è una curva

d'ordine: $3(n-1)$
di classe: $3(n-1)(3n-4)$
di genere: $\frac{1}{2}(3n-4)(3n-5)$
con punti doppi: 0
con cuspidi: 0
con tang. doppie: $\frac{27}{2}n(n-1)(n-2)(3n-5)$
con flessi: $9(n-1)(3n-5)$.

La Steineriana della rete è una curva

d'ordine: $3(n-1)^2$
di classe: $3n(n-1)$
di genere: $\frac{1}{2}(3n-4)(3n-5)$
con punti doppi: $\frac{3}{2}(n-1)(n-2)(3n^2-3n-11)$
con cuspidi: $12(n-1)(n-2)$
con tang. doppie: $\frac{3}{2}(n-1)(n-2)(3n^2+3n-8)$
con flessi: $3(n-1)(4n-5)$.

La Cayleyana della rete è una curva

d'ordine: $3(n-1)(5n-6)$
di classe: $3n(n-1)$

di genere: $\frac{1}{2}(3n-4)(3n-5)$

con punti doppi: $\frac{9}{2}(n-1)(5n-8)(5n^2-9n+2)$

con cuspidi: $18(n-1)(2n-3)$

con tang. doppie: $\frac{9}{2}(n-1)(n^2-2)$

con flessi: 0.

Allorchè tutte le curve di una rete hanno un punto comune, una di esse ha ivi un punto doppio; e quelle che in quel punto toccano una data retta, formano un fascio. La Hessiana passa per lo stesso punto ed ha ivi anche un punto doppio colle tangenti coincidenti con quelle della curva che ha ivi il punto doppio.

Se poi tutte le curve della rete hanno un punto comune, e ivi la stessa tangente, ve n'è un fascio di curve aventi ivi un punto doppio, e due aventi ivi una cuspide. La Hessiana ha ivi un punto triplo; due delle tangenti nel punto triplo coincidono colla tangente comune.

Se tutte le curve di una rete hanno in un punto fisso un punto multiplo d'ordine r, la Hessiana ha ivi un punto multiplo d'ordine $3(r-1)$.

Ad ogni curva della rete dotata di due punti doppi corrisponde un punto doppio nella Steineriana, quindi nella rete generale vi sono

$$\frac{3}{2}(n-1)(n-2)(3n^2-3n-11)$$

curve con due punti doppi.

Similmente nella rete generale vi sono

$$12\,(n-1)\,(n-2)$$

curve dotate di una cuspide;

$$\frac{3}{2}\,(n-1)\,(n-2)\,(3\,n^2+3\,n-8)$$

fasci di curve che hanno fra loro due contatti;

$$3\,(n-1)\,(4\,n-5)$$

fasci di curve che hanno fra loro un contatto di 2.° ordine (contatto d'osculazione) cioè che hanno di comune tre punti infinitamente vicini.

Tutti i numeri precedenti subiscono modificazioni quando la rete ha dei punti-base, semplici o multipli, cioè dei punti pei quali passino tutte le curve della rete.

Una rete di cui tutte le curve si incontrino a due a due *in un solo punto mobile* si dice *rete omaloidica.*

Tutte le curve di una rete omaloidica sono di genere zero.

Se $\rho_1\,\rho_2 \ldots \rho_s$ sono le molteplicità, per ciascuna curva di una rete omaloidica, dei punti-base, si hanno le relazioni:

$$\sum_1^s \rho^2{}_i = n^2 - 1$$

$$\sum_1^s \frac{\rho_i\,(\rho_i - 1)}{2} = \frac{(n-1)\,(n-2)}{2}$$

$$\sum_1^s \frac{\rho_i(\rho_i+1)}{2} = \frac{n(n+3)}{2} - 2$$

$$\sum_1^s \rho_i = 3(n-1).$$

Date tre curve degli ordini $n_1\, n_2\, n_3$ si possono costruire delle curve covarianti relative al sistema delle tre curve, e che sono analoghe alla Jacobiana e alla Steineriana di una rete (quando $n_1 = n_2 = n_3 = n$).

La *Jacobiana del sistema di tre curve* è una curva (di ordine $n_1 + n_2 + n_3 - 3$) luogo dei punti le cui rette polari rispetto alle tre curve concorrono in uno stesso punto. Il luogo di quest'ultimo punto è una curva che, pel caso degli ordini eguali, diventa *la Steineriana* della rete, *e che è di ordine*

$$n_1 n_2 + n_2 n_3 + n_3 n_1 - 2(n_1 + n_2 + n_3) + 3.$$

La Jacobiana delle tre curve è anche il luogo dei punti in cui si segano le prime polari di uno stesso punto, relative alle tre curve.

Se le tre curve hanno punti comuni a tutte tre, la Jacobiana e la Steineriana passano per essi.

La Jacobiana passa anche pei punti doppi delle curve date.

La teoria dei sistemi lineari di curve è stata studiata in varie direzioni negli ultimi tempi, inquantochè questa teoria si rannoda a varie altre teorie geometriche quali la trasformazione biuni-

voca, la rappresentazione piana delle superficie, e anche la cosiddetta geometria dei gruppi di punti su di una curva algebrica.

Due fasci di curve poi possono considerarsi fra loro *in corrispondenza proiettiva*, e allora si ricava l'importante teorema che *ogni curva algebrica può considerarsi come il luogo dei punti d'intersezione delle curve corrispondenti di due fasci proiettivi di curve*, teorema enunciato e dimostrato da CHASLES per le curve di 3.° ordine (*Compt. Rend.* XLI, 1853) e dimostrato pel caso generale da JONQUIERES (*Mém. de l'Acad. des sciences*, XVI, 1858), e che generalizza la nota *generazione proiettiva* delle coniche.

Fra i lavori sui sistemi lineari, oltre la *Introduzione* del CREMONA, citeremo quelli di JONQUIERES (*Math. Ann.*, I), di CAPORALI (*Collect. Math.*, 1881), di JUNG (*Ann. di mat.*, XV, XVI), di GUCCIA (*Rend. Palermo*, VII) e di altri, oltre tutti quelli altri lavori che trattano della geometria dei gruppi di punti su di una curva e di cui tratteremo a suo luogo.

Per lo studio delle singolarità della Jacobiana di tre curve si può vedere il lavoro di GERBALDI (*Rend. Palermo*, VIII).

§ 4. — I GRUPPI DI PUNTI SU DI UNA CURVA ALGEBRICA.

Nella cosiddetta *Geometria su di una curva algebrica* si studiano le proprietà dei gruppi di punti

che sono segati, su di una curva fondamentale di ordine n, da sistemi di altre curve di ordine qualunque, e specialmente quando tali sistemi sono *lineari*, cioè le loro equazioni contengono *linearmente* dei parametri variabili.

Se la curva fondamentale è una retta, questi gruppi di punti costituiscono le cosiddette *involuzioni di ordine superiore* di cui abbiamo trattato nel Cap. II. § 2.

Occorre premettere alcuni teoremi sui punti di intersezione di due curve.

Si abbia una curva fondamentale f di ordine n, e la si seghi con una curva φ di ordine m, la quale passi per δ punti singolari di f (nel numero δ si intende computato il numero delle volte che φ passa per un punto singolare di f.) I punti di intersezione delle due curve non sono fra loro indipendenti; alcuni di essi sono determinati dagli altri. *Sia k il numero dei punti d'intersezione delle due curve, che sono determinati da tutti i rimanenti; abbiamo allora le disuguaglianze fondamentali:*

$$\text{se } m < n-2, \quad \text{è } k \leqq m\,n - \frac{m\,(m+3)}{2} - \delta$$

$$\left(= \frac{(n-1)\,(n-2)}{2} - \delta - \frac{(n-m-1)(n-m-2)}{2}\right)$$

$$\text{se } m \geqq n-2, \quad \text{è } k \leqq \frac{(n-1)\,(n-2)}{2} - \delta.$$

Si dice che una curva è una *curva aggiunta* quando passa $r-1$ volte per ogni punto r^{plo}

di f; se quindi f non ha altri punti multipli che punti doppi e cuspidi, una *curva aggiunta* è una curva non sottoposta ad altre condizioni che di passare *semplicemente* per ogni punto doppio o cuspide di f.

Supponiamo allora che φ sia una *curva aggiunta di ordine m.*

In tal caso, se con k si indica il numero degli n m punti d'intersezione di f e φ, *determinati dai rimanenti, sussistono le disuguaglianze (indicando con p il genere di f)*

$$\text{per } m < n - 2, \quad k \leqq p - \frac{(n-m-1)(n-m-2)}{2}$$

$$\text{per } m \geqq n - 2, \quad k \leqq p.$$

È notevole che, nel secondo caso, il numero k non dipende più dall'ordine m della curva segante e nel primo caso per $m = n - 3$, *si ha* $k \leqq p - 1$.

La curva φ sia *una curva aggiunta.* Nella sua equazione vi entrino *linearmente*, un certo numero di parametri arbitrari per modo che tutte le φ ottenute facendo variare tali parametri formino *un sistema lineare.*

Sia Q il numero dei punti d'intersezione mobili di f con φ, cioè il numero dei punti d'intersezione che variano da una φ ad un'altra; se k di essi sono determinati dagli altri $Q - k$, il numero di quelli che possiamo scegliere arbitrariamente su f sarà $Q - k = q$ che noi chiameremo *molteplicità del sistema di Q punti* inquantochè vi saranno allora ∞^q gruppi di Q punti segati su f da curve della specie di φ. *Il numero q rappresenta*

il numero dei parametri arbitrari che entrano linearmente nella equazione di φ. Il teorema sopraindicato ci dà allora:

$$\text{Se } m \leqq n-3 \text{ sarà } q \geqq Q-p+\frac{(n-m-1)(n-m-2)}{2},$$

$$\text{se } m > n-3 \text{ sarà } q \geqq Q-p.$$

Queste stesse formole possono porsi sotto un'altra forma che serve a dare *un limite superiore* per il numero Q quando sia nota la molteplicità q del sistema. Si può dire:

$$\text{Se } m = n-3 \quad \text{è} \quad Q \leqq q+p-1,$$
$$\text{se } m > n-3 \quad \text{è} \quad Q \leqq q+p.$$

I signori Brill e Noether (*Math. Ann.* VII) hanno poi trovato anche *un limite inferiore per* Q; *propriamente è sempre*

$$Q \geqq \frac{q(q+p+1)}{q+1}.$$

Inoltre, ponendo

$$Q(q+1)-q(q+p+1)=r,$$

esistono ∞^r *sistemi di* Q *punti e molteplicità* q.

Se $r=0$, *il numero di tali sistemi è finito ed è propriamente*

$$\frac{2!\,3!\ldots q!\,2!\ldots(p-1-Q+q)!\,p!}{2!\,3!\ldots(2q+p-Q)!}$$

(Castelnuovo, *Lincei*, 1889.)

Per $q = 1$ *tal numero è*

$$\frac{p!}{(p - Q + 1)!\,(p - Q + 2)!}$$

(Brill-Noether, *Math. Ann.*, VII.)

Col simbolo G_Q^q indichiamo *un gruppo* di un sistema lineare di Q punti e di molteplicità q, e col simbolo g_Q^q indichiamo tutto il sistema di tali gruppi.

Se Q *è maggiore di* $2p - 2$ *deve essere esattamente* $q = Q - p$.

Se $Q = 2p - 2$ *deve essere* $q = p - 1$.

Se f *è una curva indecomponibile, esistono* p *curve aggiunte linearmente indipendenti di ordine* $n - 3$, *le quali non hanno su* f *altri punti comuni che i punti multipli.*

Se f *si decompone in* k *fattori, esistono*

$$p + k - 1$$

curve aggiunte linearmente indipendenti di ordine $n - 3$ (Christoffel, Ann. di Mat.; X).

Le curve aggiunte di ordine $n - 3$ tagliano la curva fondamentale f in $2p - 2$ punti (esclusi i punti singolari fissi). Ora esiste questo teorema interessante:

Ogni sistema lineare q *volte infinito di* Q *punti, può essere sempre segato sulla curva* f *fondamentale da un sistema di curve aggiunte di ordine* $n - 3$, *purchè sia*

$$q \geqq Q - p + 1,$$

la quale condizione esclude (per un teor. dianzi accennato) che possa essere $Q > 2p - 2$.

In particolare:

Se un fascio ($q = 1$) *di curve aggiunte ha* p *intersezioni mobili colla curva* f, *ogni gruppo di tali* p *punti è situato su una curva aggiunta di ordine* $n - 3$.

Un gruppo di Q punti pei quali passa almeno una curva aggiunta di ordine $n - 3$ si dice un *gruppo speciale;* il *sistema* cui esso appartiene si dirà *speciale.*

Il sistema g_{2p-2}^{p-1} si suol chiamare *sistema canonico.*

Esso (v. sopra) non ha punti fissi ed è unico.

Uno dei teoremi fondamentali della teoria che ci occupa è il cosiddetto *teorema del resto* (Restsatz) che fa vedere in certo modo che i gruppi di punti su di una curva si possono concepire come qualcosa di indipendente dalle curve che servono a segarle.

Due gruppi di punti G_Q, $G_{Q'}$, si dicono *corresiduali* fra loro, se esiste un altro gruppo G_R tale che i due gruppi G_Q e G_R rappresentino tutte le intersezioni mobili (esclusi i punti singolari) di una curva aggiunta con f, e i gruppi $G_{Q'}$ e G_R rappresentino anche tutte le intersezioni mobili di un'altra curva aggiunta con f. I due gruppi G_Q e G_R si chiamano poi *fra loro residuali.*

Il *teorema del resto* dice:

Se G_Q *e* $G_{Q'}$ *sono corresiduali fra loro rispetto al gruppo* G_R, *lo saranno anche rispetto a qualunque altro gruppo* $G_{R'}$, *che insieme con uno di*

essi formi il sistema completo delle intersezioni mobili di una qualunque altra curva con f. In altri termini: *la proprietà di due gruppi di punti di essere corresiduali fra loro è indipendente dal gruppo di punti residuo di ambedue, cioè è indipendente dalle curve seganti che determinano su f quei gruppi di punti.*

O anche: *Se per G_Q faccio passare un'altra qualunque curva aggiunta che seghi la f in un gruppo $G_{R'}$, i gruppi $G_{R'}$, e $G_{Q'}$, formeranno il sistema completo delle intersezioni mobili di una curva aggiunta con f.*

Questo teorema, dal punto di vista algebrico, si trova in Brill-Noether (*Götting. Nachr.*, 1873, e *Math. Ann.*, VII). Esso però ricevette la sua prima origine per il teorema di Abel (v. *Repert.*, I, pag. 400 e seg.) sugli integrali trascendenti.

Si abbia un gruppo di Q punti che appartenga ad un sistema lineare g_Q^q. Sia $\tau = r + 1$ il numero delle curve aggiunte linearmente indipendenti di ordine $n - 3$ che passano per i Q punti; la molteplicità q è data dalla formola

$$q = Q - p + r + 1.$$

Questo teorema è quello detto di Riemann-Roch (*Crelle*, LXIV). Esso fu trovato per l'occasione della teoria delle funzioni algebriche (v. *Repert.*, I, pag. 385). *Il numero r rappresenta il numero dei parametri* non omogenei *che entrano linearmente nell'equazione generale di una curva aggiunta di ordine $n - 3$ che passa per i Q punti; esso rappresenta la molteplicità del sistema di tali*

curve. Per un sistema generale (non speciale) è $r+1=0$. Il teorema di Riemann-Roch può porsi sotto la seguente altra forma e prende allora il nome di *teorema di reciprocità* di Brill-Noether (nome datogli dal Klein):

Una curva aggiunta di ordine $n-3$ *seghi la* f *in* $2p-2$ *punti che si distinguano in due gruppi di* $Q+R=2p-2$ *punti. Il gruppo dei primi* Q *punti appartenga ad un sistema lineare di molteplicità* q; *il gruppo dei secondi* R *punti apparterrà ad un sistema lineare di molteplicità* r *in modo che sussisteranno le relazioni*

$$q-r=Q-p+1$$

$$r-q=R-p+1.$$

Va sotto il nome di teorema di Clifford (*Phil. Trans.* 1878) il teorema seguente che è una conseguenza del teor. di Riemann-Roch:

Se il sistema g_Q^q *è speciale (cioè il corrispondente numero* $r+1$ *è maggiore di zero) deve essere* $Q \geqq 2q$.

Dato un sistema lineare g_Q^q vi saranno certi gruppi di Q punti, appartenenti al sistema, aventi due o più punti coincidenti; questi punti si dicono *punti multipli* del sistema.

Il numero dei punti $(q+1)^{pli}$ *appartenenti al sistema è dato dalla formola*

$$(q+1)(Q+qp-q)$$

(v. Brill, *Math. Ann.*, IV; Clebsch-Lindemann,

Geom. (edit. franc.), II, 172). Questioni di questo genere furono trattate da De Jonquieres (*Crelle*, LXVI), Cayley (*Phil. Trans.*, CLVIII) e altri.

Nel sistema g_{2p-2}^{p-1} *cioè nel sistema di tutti i gruppi di punti segati su f da tutte le sue curve aggiunte di ordine* $n-3$, *vi è in generale un numero finito di gruppi di soli* $p-1$ *punti ciascuno contato due volte; tal numero è* $2^{p-1}(2^p-1)$; *questi gruppi corrispondono a curve aggiunte, di ordine* $n-3$, di contatto *con f, cioè tali che toccano f in ogni punto in cui la incontrano.*

Esistono poi $2^{p-1}(2^p+1)$ *curve aggiunte di ordine* $n-2$ *che toccano f in p punti.*

Però la f può essere una tal curva che di tali gruppi ne esistono infiniti e propriamente ∞^{m-1}. ($m=2, 3, \ldots$). Le studio di tali sistemi ha importanza per la teoria delle funzioni abeliane, e fu cominciato da Weber (*Math. Ann.* XIII), Kraus (*Id.* XVI).

Vogliamo riferire i risultati di Kraus relativi alla natura della curva f quando possiede tali sistemi di gruppi di punti:

Un tipo di curva f che possiede ∞^1 *gruppi di* $p-1$ *punti in cui è toccata da una curva aggiunta di ordine* $n-3$, *è* (*per* $p>3$) *una curva di* $p+1^{mo}$ *ordine con un punto in cui la curva tocca sè stessa (Selbstberührungspunkt) e con*

$$\frac{(p-4)(p+1)}{2}$$

punti doppi situati su di una curva di ordine

$p-4$. Per $p=3$ si ha invece una curva di quint'ordine con un punto triplo.

Un tipo di curva f su cui esiste un sistema di ∞^2 gruppi di $p-1$ punti come dianzi, è una curva di ordine $p-1$ con $\frac{1}{2}(p-1)(p-6$ punti doppi che stanno su di una curva aggiunta di ordine $p-6$. Il minimo genere per una curva siffatta è $p=6$.

Un tipo di curva f su cui esiste un sistema di ∞^{m-1} $(m>3)$ gruppi come dianzi, è una curva di $p-m+2^{mo}$ ordine con

$$\frac{1}{2}[(p-m)^2-(p+m)]$$

punti doppi che stanno su di una curva aggiunta di ordine $p-m+3$ la quale tocca anche la curva normale in $m-3$ altri punti. Il minimo valore di p per il caso di $m=4$ è $p=q$.

L'esistenza di tali sistemi di gruppi corrisponde all'esistenza di funzioni ϑ le quali si annullano insieme alle loro derivate di vari ordini, per argomenti zero; ma su questi dettagli non possiamo entrare (v. Weber cit.)

E importante a questo proposito il seguente altro teorema (di Weber):

I $(p-1)+(p-1)=2p-2$ punti di contatto di due curve aggiunte di contatto di ordine $n-3$ appartenenti allo stesso sistema, sono situati su di un'altra medesima curva aggiunta di ordine $n-3$.

Di qui risulta l'esistenza di certe *relazioni quadratiche identiche* che devono allora sussistere fra

i primi membri delle equazioni delle curve aggiunte di ordine $n-3$.

Una categoria molto importante di curve è quella delle cosiddette *curve iperellittiche*. Dal punto di vista della teoria dei gruppi di punti, queste curve sono definite dalla proprietà di possedere un sistema g_2^1.

In questo sistema g^1_2 *esistono* $2p+2$ *coppie di punti coincidenti.*

In una curva iperellittica i punti sono accoppiati in modo che ogni curva aggiunta di ordine $n-3$ *che passi per uno dei punti della coppia, passa necessariamente anche per l'altro.*

Una formola che, nella teoria che ci occupa, ha molta importanza e svariate applicazioni è quella cosiddetta *formola di corrispondenza* di Cayley e Brill, e che può reputarsi una generalizzazione di quella di Chasles (v. Cap. I, § 2).

Supponiamo assegnata una relazione

$$\Phi(x_1 x_2 x_3, \quad y_1 y_2 y_3) = 0$$

di grado r in (x) e s in (y).

Dato un punto (x), questa determinerà una curva del piano che segherà la f fondamentale in ns punti, e dato un punto (y), si avrà una curva che segherà la f in nr punti.

Si scelgano i punti (x) (y) sulla curva f; variando (x) sulla curva f si avrà una serie di gruppi di ns punti su f, e variando (y) anche su f si

avrà una serie di gruppi di $n r$ punti. Si ha dunque *una corrispondenza fra due serie di gruppi di punti su f.* La formola in discorso dà il numero dei *punti uniti* di questa corrispondenza.

Supponiamo che ad un punto (x) *corrispondano* β *punti* (y), *dati dalle intersezioni di una curva della seconda serie con* f, *la quale curva della seconda serie incontri poi ancora* f *in* γ *punti coincidenti con* (x), *e che ad un punto* (y) *corrispondano* α *punti dati dalle intersezioni con* f, *di una curva della seconda serie. Questa curva della seconda serie deve passare ancora* γ *volte per* (y), *e il numero dei punti* (x) *che coincidono con punti corrispondenti* (y) *è dato da*

$$\alpha + \beta + 2 \gamma p.$$

Se $p = 0$ (cioè se f è razionale) questa formola si riduce a quella di Chasles.

I punti di coincidenza formano sempre il sistema completo delle intersezioni di f con un' altra curva.

Il teorema sopraindicato fu enunciato prima da Cayley (*Compt. Rend.*, LXII; *Proc. Lond. math. Soc.*, I); indi fu dimostrato da Brill (*Math. Ann.*, VI, VII, XXXI; v. anche Junker, *Diss.* Tübingen, 1889). Altre dimostrazioni sono quelle di Schubert (*Calcul der abzähl. Geom.*, § 18), Bobek (*Wien Ak.*, XCIII), Lindemann (*Crelle*, LXXXIV), Hurwitz (*Math. Ann.*, XXVIII), Zeuthen (*Math. Ann.*, XL), Segre (*Ann. di mat.* XXII, § 12), etc. Alcuni di questi autori (p. es. Hurwitz) hanno anche considerato un teorema

più generale. Si può anche vedere un paragrafo dedicato a questo teorema nella *Geom.* di CLEBSCH-LINDEMANN.

La geometria dei gruppi di punti su di una curva si può dire fondata da RIEMANN il quale però considerava tale teoria dal punto di vista (che in fondo è lo stesso) della teoria delle funzioni algebriche su di una superficie Riemanniana (v. *Repert.*, I, Cap. XV); indi questa teoria si è svolta secondo vari indirizzi; l'indirizzo, che potremo chiamare, *funzionale* e che fa capo appunto a RIEMANN, e ai numerosi lavori che riguardano gli integrali abeliani; l'indirizzo *algebrico-geometrico* che fa capo ad una fondamentale Memoria di BRILL-NOETHER (*Math. Ann.*, VII); l'indirizzo *algebrico-aritmetico* (KRONECKER, DEDEKIND, WEBER). In questi ultimi tempi si è aggiunto anche l'indirizzo *geometrico puro*, per il quale si può vedere con profitto un recente lavoro di SEGRE (*Ann. di mat.*, XXII).

L'importanza della teoria dei gruppi di punti è grandissima nello studio della trasformazione biunivoca delle curve piane (vedi sotto), perchè per quella trasformazione le proprietà dei gruppi presentano caratteri invariantivi.

Per amore di brevità tralasciamo di citare tutti i numerosi altri lavori di NOETHER, BRILL, etc.

I signori KÜPPER, BOBEK, AMODEO (cfr. *Lincei*, 1893; *Ann. di mat.*, XXI, XXIV; *Acc. Nap.*, 1896) hanno anche studiato le cosiddette curve k-gonali cioè quelle che possiedono una serie lineare g^1_k

senza avere una serie lineare semplicemente infinita, di grado minore, e di cui le curve iperellittiche sono caso particolare.

Naturalmente ogni curva è k-gonale, purchè k abbia valore conveniente.

Aggiungeremo che un lavoro recente in cui si può trovare trattata la teoria col metodo algebrico è quello di BERTINI (*Ann. di mat.*, XXII). * Altre indicazioni si trovano in un lavoro storico di BRILL-NOETHER (*Jahresber. d. D. Math. Vereinig.*, III, 1892-93).

§ 5. — TRASFORMAZIONI BIUNIVOCHE DEL PIANO O DI CURVE PIANE. — TRASFORMAZIONI MULTIPLE.

Poniamo

$$y_i \equiv f_i \, (x_1 \, x_2 \, x_3) \, ^{**} \qquad (i = 1, \, 2, \, 3) \qquad (1)$$

essendo le f_i funzioni razionali intere di ordine n nelle $x_1 \, x_2 \, x_3$ (senza fattore comune); e supponiamo che risolvendo queste due relazioni rispetto alle x si abbia

$$x_i \equiv \varphi_i \, (y_1 \, y_2 \, y_3) \qquad (i = 1, \, 2, \, 3) \qquad (2)$$

dove le φ sieno anche funzioni razionali intere.

---

* Le note di AMODEO contengono qualche svista facilmente correggibile. Il lavoro del BERTINI contiene poi, per conto suo, altre sviste nei punti in cui cerca di correggere quelle di AMODEO.

** Il segno $\equiv$ significa *proporzionalità*; le relazioni sovrascritte sono perciò sostanzialmente *due*, non *tre*.

Allora diremo che le (1) determinano *una trasformazione birazionale, o biunivoca piana*, nel senso che per esse si possono far corrispondere i punti di due piani (piano x e piano y, che potrebbero anche essere sovrapposti) in modo che *ad un punto dell'uno corrisponde uno e uno solo punto dell'altro e viceversa.*

Una siffatta trasformazione si dice anche *trasformazione birazionale* o *Cremoniana* dal nome di chi per il primo l'ha stabilita in tutta la sua generalità.

Una prima proprietà fondamentale è la seguente:

Il grado delle φ_i deve essere il medesimo del grado delle f_i.

Inoltre:

Perchè la trasformazione sia biunivoca è necessario che la rete formata colle tre curve

$$f_1 = 0 \quad f_2 = 0 \quad f_3 = 0$$

abbia $n^2 - 1$ punti fissi (punti fondamentali della trasformazione). Una tal rete, come si sa, si chiama *omaloidica* (v. pag. 225).

Lo stesso naturalmente deve anche verificarsi per la rete delle tre curve $\varphi_i = 0$.

Le curve $f_i = 0$, $\varphi_i = 0$ devono essere tutte di genere zero, e i loro punti multipli devono trovarsi tutti nei punti fondamentali della trasformazione.

Se supponiamo che fra gli $n^2 - 1$ punti fondamentali ve ne sieno α_1 semplici per tutte le curve, α_2 doppi per tutte le curve... α_{n-1} $(n-1)^{pli}$ per tutte le curve, *fra i numeri α devono sussistere le*

tre relazioni di cui una è conseguenza delle altre due:

$$\alpha_1 + 4\alpha_2 + 9\alpha_3 + \ldots + (n-1)^2 \alpha_{n-1} = n^2 - 1$$

$$\alpha_2 + 3\alpha_3 + \ldots + \frac{1}{2}(n-1)(n-2)\alpha_{n-1} = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

$$\alpha_1 + 3\alpha_2 + 6\alpha_3 + \ldots + \frac{1}{2}n(n-1)\alpha_{n-1} = \frac{1}{2}n(n+3) - 2.$$

Dato il valore di n si possono da queste formole trovare i valori possibili per i numeri α; delle tavole sono state costruite a questo scopo da Cremona e Cayley.

Un punto fondamentale k^{plo} per tutte le curve della trasformazione si dice *un punto fondamentale d'ordine k.*

Le precedenti formole sussistono se le f (e le φ) non hanno tangenti comuni nei punti fondamentali.

Ad un punto fondamentale d'ordine k in un piano, corrisponde nell'altro una curva d'ordine k e di genere zero (curva fondamentale k^{ma}).

Le curve fondamentali di un piano hanno i loro punti multipli nei punti fondamentali del medesimo piano, e non si tagliano fra loro che in questi.

La curva fondamentale k^{ma} passa per il punto fondamentale d'ordine h, lo stesso numero α_{kh} di volte che la curva fondam. d'ord. h passa per il punto fond. d'ord. k.

Si ha dunque $\alpha_{hk} = \alpha_{kh}$. Inoltre il determinante $|\alpha_{hk}| = \pm n$.

Una curva fondamentale passa per un punto fond. d'ord. k, $3k-1$ volte.

Se, come sopra, α_i è il numero dei punti fondamentali d'ordine i, in uno dei piani, e β_i l'analogo numero nell'altro piano, si ha $\Sigma\,\alpha_i = \Sigma\,\beta_i$, e i numeri β non differiscono dai numeri α che solo nell'ordine (teor. di Cremona).

La somma dei tre numeri d'ordine dei tre punti fondamentali d'ordine più elevato è sempre maggiore di n.

È importantissimo il seguente teor.:

Ogni trasformazione Cremoniana può essere sempre surrogata da un numero finito di trasformazioni quadratiche, di cui i tre punti fondamentali sono nei tre punti fondamentali di ordine più elevato della trasf. primitiva.

Questo teor. fu dato da Clifford (v. Cayley *Proc. of the Lond. math. Soc.*, III), Noether (*Math. Ann.*, III, V), Rosanes (*Crelle*, LXXIII).

Per una trasformazione quadratica ($n=2$), *alle rette di un piano corrispondono nell' altro, coniche che passano per tre punti fissi, e al punto d' intersezione di due rette, corrisponde il quarto punto d' intersezione delle due coniche corrispondenti.*

Le equazioni della trasf. quadratica possono sempre ridursi alla forma (Cayley)

$$x_1\,y_1 = x_2\,y_2 = x_3\,y_3\,.$$

Ponendo i tre punti fondamentali, due nei due punti ciclici del piano, e il terzo nell'origine delle coordinate *cartesiane*, si ha la cosiddetta *trasformazione per raggi vettori reciproci, o inversione;*

alcuni danno il nome di *inversione* alla trasformazione quadratica generale.

Per una trasformazione quadratica, a una curva di m^{mo} *ordine, passante* k_1, k_2, k_3 *volte per i tre punti fondamentali, corrisponde una curva di ordine* $2m - k_1 - k_2 - k_3$ *passante* $m - (k_2 + k_3)$, $m - (k_3 + k_1)$, $m - (k_1 + k_2)$ *volte per i punti fondamentali del proprio piano.*

Per una trasformazione d'ordine n, ad una curva d'ordine m passante l_i *volte per un punto fondamentale d'ordine* r_i, *corrisponde una curva d'ordine* $\mu = n\,m - \Sigma\, r_i\, l_i$, *passante*

$$\lambda_k = m\, s_k - \sum_i r_i\, \alpha_{ik}$$

volte per un punto fondamentale d'ordine s_k *(le* α_{ik} *hanno il significato sopraindicato).*

Se vogliamo che la trasformazione non sia biunivoca *per tutto il piano*, ma solo per i punti di due curve F e F' corrispondenti, allora non è più necessario che la rete di trasformazione sia *omaloidica. Bisognerà però che le curve della rete che si taglino in un punto di* F, *non si taglino ulteriormente in altro punto di* F *almenochè quest'ultimo punto non sia un punto fondamentale, cioè comune a tutte le curve della rete.*

Per una trasformazione birazionale il genere di una curva resta inalterato (teor. di Riemann, *detto della conservazione del genere).*

Una curva, non riduttibile, razionale si può trasformare birazionalmente in una retta.

Una curva di genere 1 (curva ellittica) si può birazionalmente trasformare in una curva di 3.° ordine.

Le curve aggiunte di ordine $n-3$ (v. § 4) godono di una rimarchevole proprietà per una trasformazione *birazionale*; propriamente:

Se per una trasformazione birazionale una curva F di ordine n diventa F' di ordine ν, il sistema dei punti d'intersezione colle curve aggiunte di ordine $n-3$ di F si trasforma nel sistema dei punti d'intersezione di F' colle sue curve aggiunte di ordine $\nu-3$.

Considerando una rete di curve aggiunte di ordine $n-3$, relative ad una data curva F, di genere p, prendendo i punti base della rete tutti sulla curva F, e assumendo infine tale rete come base di una trasformazione birazionale della curva, *la curva F si trasforma in una di ordine $p+1$ con punti multipli equivalenti a $\frac{1}{2}p(p-3)$ punti doppi.*

Una tal curva può prendersi come *tipo normale* per una curva di genere p.

Scegliendo poi in maniera speciale su F i $p-3$ punti base della rete, la curva trasformata diventa quella di *minimo ordine* possibile in cui può trasformarsi una curva di genere p; *tale minimo ordine è rispettivamente*

$$\begin{array}{lll} 2\pi+2 & \text{se} & p=3\pi \\ 2\pi+3 & \text{se} & p=3\pi+1 \\ 2\pi+4 & \text{se} & p=3\pi+2 \end{array}$$

(Brill-Noether, *Math. Ann.*, VII.)

A questi problemi si riattacca quello della determinazione del numero dei *moduli* di una curva di dato genere, cioè del numero di quelle funzioni dei coefficienti dell'equazione della curva che si comportano come *invarianti assoluti* rispetto ad una qualunque trasformazione birazionale.

Il risultato cui si giunge è il seguente (Riemann):

Per $p = 0$, cioè per le curve razionali, il numero dei moduli è zero; per $p = 1$, cioè per le curve ellittiche, il numero dei moduli è 1; per $p > 1$ il numero dei moduli è $3p - 3$.

Un'importante applicazione della trasformazione Cremoniana del piano è quella cosiddetta della *scomposizione delle singolarità.*

Mediante una trasformazione Cremoniana si può ottenere da una curva con punti multipli a tangenti coincidenti, una curva con sole singolarità ordinarie, cioè con soli punti multipli a tangenti distinte.

Questo problema fu trattato specialmente da Noether (*Gött. Nach.*, 1871; *Math. Ann.*, IX).

Indi con trasformazioni birazionali della curva si può ridurre la curva che ha sole singolarità ordinarie, in altra con soli punti doppi (v. Bertini, *Math. Ann.*, XLIV).

Le trasformazioni birazionali *quadratiche* erano state considerate da Magnus (*Sammlung von Aufg.*, etc. Berlin, 1833) e da Steiner (*Crelle*, VIII), ma la teoria generale delle trasformazioni

birazionali fu stabilita da CREMONA (*Acc. Bologna*, 1863, 1865; *Giorn. di Batt.*, I, III). Altri lavori importanti furono: CAYLEY (*Proc. London math. Soc.*, III, 1870), ROSANES (*Crelle*, LXXIII), CLEBSCH (*Math. Ann.*, III), NOETHER (*Id.*, V).

Per una esposizione della teoria delle trasformazioni birazionali sia fra piani, che fra curve, si può con profitto consultare la *Geom.* di CLEBSCH-LINDEMANN.

Sono state considerate anche le trasformazioni non biunivoche (multiple) fra due piani; e le trasformazioni multiple fra due curve.

Una formola che lega i generi di due curve in corrispondenza non biunivoca è quella di ZEUTHEN.

Si abbiano due curve in corrispondenza tale che ad un punto della prima (di genere p) corrispondano m punti della seconda (di genere p') e ad un punto della seconda, m' punti della prima. Sulle due curve vi sieno rispett. μ, μ' coincidenze, cioè accada μ volte che sulla prima curva fra i punti corrispondenti ad un punto della seconda, ve ne sieno due coincidenti, ecc. *Si ha allora la formola* (ZEUTHEN, *Math. Ann.*, III).

$$\mu - \mu' = 2\,m'\,(p-1) - 2\,m\,(p'-1).$$

Par $m = m' = 1$ si ha la corrispondenza biunivoca, e da questa formola risulta $p = p'$ (*teor. di* RIEMANN).

Fra le corrispondenze multiple fra due piani sono comprese le *isogonali*, cioè quelle che con-

servano gli angoli (vedi l'opera di Holzmüller (*Th. der isog. Verwandsch.* Leipzig, 1883).

I principali lavori sulle trasformazioni multiple sono quelli di Wiener (*Math. Ann.*, III), De Paolis (*Mem. Lincei*, 1877-78), Noether (*Erl. Ber.*, 1878), Jung (*Rend. Lincei*, 1886; *Ist. Lomb.*, 1888), Bertini (*Ist. Lomb.*, 1889).

CAPITOLO VII.

Le cubiche piane.

§ 1. — Generalità sulle cubiche. Punti di flesso. Punti tangenziali.

L'equazione generale di una curva di 3.° ordine contiene omogeneamente dieci coefficienti; quindi dati nel piano nove punti ARBITRARIAMENTE, *per essi passerà in generale una sola cubica.*

I nove punti possono essere però dipendenti fra loro in modo che per essi passino infinite cubiche.

Tutte le cubiche che passano per otto punti del piano, passano anche per un nono punto determinato dai primi.

La cubica è in generale di 6.ª classe e di genere 1; ha nove punti di flesso.

Se la cubica ha un punto doppio, il suo genere è zero, ed essa è di 4.ª classe, ha tre punti di flesso allineati. L'equazione di una tal cubica dipende da otto costanti.

Se la cubica ha una cuspide, il suo genere è ancora zero, la sua classe è 3, e il numero dei

suoi flessi è 1. L'equazione di una tal cubica dipende da sette costanti.

La congiungente due punti di flesso passa sempre per un terzo flesso.

I nove punti di flesso sono situati a tre a tre su 12 rette, e per ciascun flesso passano quattro di tali rette.

I nove punti di flesso non possono essere tutti reali; al massimo ve ne sono solo tre reali.

Le quattro di tali rette passanti per un flesso formano un gruppo equianarmonico.

Queste 12 rette formano quattro terne di rette, tali che ogni terna contiene tutti i nove punti di flesso; ognuno dei triangoli che ha per lati le tre rette di una terna, si dice *triangolo d'inflessione.*

Per i nove punti di flesso di una cubica passano infinite cubiche aventi tutti i medesimi punti di flesso; il fascio di tutte queste cubiche si dice *fascio sizigetico.*

Indicando con $f = 0$ l'equazione della cubica data e con $H = 0$ l'equazione della cubica *Hessiana* (v. Cap. V), *il fascio sizigetico ha per equazione*

$$\lambda_1 f + \lambda_2 H = 0.$$

Fra le curve di questo fascio sono compresi dunque anche i quattro triangoli d'inflessione.

La conica polare di un flesso si scinde in due rette, di cui l'una è la tangente d'inflessione, e l'altra è un'altra retta che si chiama la polare armonica del flesso.

La polare armonica del flesso ha la proprietà che ogni retta condotta per il flesso, la taglia in

un punto che è il coniugato armonico del flesso stesso rispetto agli altri due punti in cui la retta segante incontra la cubica. Di qui viene il nome di *polare armonica.*

Quindi anche:

La polare armonica di un flesso taglia la cubica nei tre punti di contatto delle tangenti condotte dal flesso alla cubica stessa.

Tutte le cubiche del fascio sizigetico hanno anche le medesime polari armoniche.

Le tangenti di due flessi si incontrano sulla polare armonica del flesso che è allineato coi due primi.

Le polari armoniche di tre flessi allineati si incontrano in un punto.

Ad ogni punto di una cubica ne corrisponde un altro, che è il punto d'intersezione colla cubica della tangente nel primo punto.

Tal punto si dice *punto tangenziale o satellite del dato.*

I tre punti tangenziali di tre punti in linea retta sono anche in linea retta (retta satellite della prima).

Esiste una retta del piano (la retta satellite della retta all'infinito) che ha la proprietà, che la distanza di un punto della curva da essa sta in un rapporto costante col prodotto delle distanze dello stesso punto dai tre assintoti (le tangenti nei tre punti all'infinito).

I quattro punti di contatto delle quattro tangenti che da un punto P della curva possono condursi alla curva stessa, formano un quadrangolo di cui i tre punti diagonali sono situati anche

sulla curva; e le tangenti della curva in tali tre punti, insieme alla tangente in P concorrono in un medesimo punto della curva stessa.

Il RAPPORTO ANARMONICO *delle quattro tangenti che da un punto della curva si possono condurre alla curva stessa, è costante al variare del primo punto.* Questa proprietà è molto importante.

Per un punto A di una cubica conduciamo una retta che incontri la curva in due altri punti P, Q; e formiamo indi il quadrangolo completo avente per vertici i quattro punti di cui A è punto tangenziale; due lati opposti di questo quadrangolo tagliano la retta data in due punti coniugati armonici fra loro rispetto a P e Q. (teor. di MACLAURIN.)

Si abbiano tre punti A, B, C in linea retta di una cubica; da A e B si conducano due tangenti alla curva; la retta che congiunge i due punti di contatto taglia la curva in un punto di cui il punto tangenziale è C.

Se i punti tangenziali di tre punti A, B, C sono in linea retta, saranno in linea retta i punti A' B' C' in cui B C, C A, A B tagliano nuovamente la cubica.

Esiste un numero infinito di poligoni di 2 n lati e 2 n vertici, tali che mentre i vertici sono situati sulla cubica, i lati pari si incontrano tutti in un punto A, e i lati dispari in un punto B (poligoni di STEINER, *Crelle,* XXXII). I due punti *A* e *B* si dicono *associati.*

Lo studio di questi poligoni si fa ottimamente mediante la teoria delle funzioni ellittiche (vedi più sotto).

La Hessiana e la Steineriana d'una cubica sono identiche e sono curve di 3.° ordine.

La Cayleyana di una cubica è una curva di 3.ª classe e di 6.° ordine; essa è l'inviluppo di tutte le coniche polari dei punti del piano, le quali si scindono in due rette.

Una cubica qualunque può considerarsi come la Hessiana di tre altre cubiche, e ogni curva di 3.ª classe può considerarsi come Cayleyana di una cubica.

Si abbiano due rette u, u', e si consideri il fascio di coniche polari dei punti di u rispetto alla cubica. Il polo di u', rispetto a ciascuna di queste coniche del fascio, percorre una conica che si chiama la *poloconica mista delle due rette* (Cremona). Se le due rette coincidono si ha:

La curva inviluppata dalla retta polare, rispetto ad una cubica, di tutti i punti di una retta, è una conica che si chiama la poloconica pura della retta.

La Hessiana è toccata dalla poloconica pura di una retta nei tre punti in cui la retta taglia la Hessiana stessa.

Se da un punto del piano si conducono le sei tangenti ad una cubica, i punti tangenziali dei sei punti di contatto si trovano su di una conica la quale si chiama la conica satellite (Cremona) *del punto a, o della conica polare di a (su cui stanno i sei punti di contatto delle sei tangenti).*

La conica polare di un punto, e la conica satellite dello stesso punto si toccano nei due punti in cui esse sono tagliate dalla retta polare del punto.

Se una conica ha con una curva di 3.° ordine due punti di contatto di 2.° ordine (due punti ciascuno dei quali è da considerarsi come la riunione di tre punti infinitamente vicini) la congiungente tali due punti passa per un flesso. Di tali coniche ne esistono nove sistemi.

Per ogni punto di contatto di una tangente condotta alla cubica da un punto di flesso, passa una conica che ha colla cubica in quel punto un contatto di 5.° ordine.

Un siffatto punto, cioè un punto su di una curva tale che in esso una conica può avere colla curva un contatto di 5.° ordine, si dice un *punto sestatico* della curva.

Sulla cubica esistono 27 punti sestatici. Essi corrispondono anche ai 27 punti d'intersezione della cubica colle nove polari armoniche.

Esistono tre sistemi diversi e composti ciascuno d'un numero doppiamente infinito di coniche che toccano una curva di 3.° ordine in tre punti.

I punti tangenziali dei tre punti in cui una di tali coniche tocca la cubica sono in linea retta.

Le cubiche piane furono studiate da Newton (*Enumeratio linearum tertii ordinis*, 1704) e Maclaurin (*De linearum geom. proprietatibus generalibus Tractatus*). Nei tempi più moderni esse furono studiate da Plücker (*System der anal. Geom.*, 1835), da Steiner (*Op.*, II), da Hesse (*Crelle*, XXVIII, XXXVI, XXXVIII), da Salmon (*Crelle*, XLII), da Cayley, da Chasles, da Cremona, da Durege e da molti altri autori.

Le curve di 3.ª classe furono studiate da CAYLEY (*Journ. de Liouville*, IX, 1844; *Phil. Trans.*, 1857), da HESSE *(cit.)*, da BELLAVITIS (*Istituto Veneto*, 1852), ecc.

Le opere principali dove si trovano raccolte le proprietà delle cubiche sono quelle di CREMONA (*Introd.*, ecc.), SALMON (*Higher plane curves*), DUREGE (*Die ebenen Curven 3.ter Ordn.* Leipzig, 1871), SCHROETER (*Theorie der ebenen Curven 3.ter Ordn.* Leipzig, 1888), CLEBSCH-LINDEMANN (*Geom.*).

La teoria delle funzioni ellittiche fu applicata allo studio delle cubiche piane, per la prima volta in una Memoria di CLEBSCH *(Crelle*, LXIII).

Per questo argomento si può vedere la Geom. di CLEBSCH-LINDEMANN e un capitolo del II vol. dell'opera di HALPHEN *(Fonct. ellipt.)*.

Per le proprietà delle varie cubiche di genere zero *(unicursali, razionali)* citeremo l'opera recente di BINDER (*Theorie der unicursalen Plancurven.* Leipzig, 1896).

§ 2. — GENERAZIONI PROIETTIVE DELLE CUBICHE.

Date nel piano tre coppie di punti A, A_1; $B\ B_1$; C, C_1 *tali che non sieno i vertici opposti di un quadrilatero completo, il luogo di un punto* P *tale che le tre coppie di raggi* PA, PA_1; PB, PB_1; PC, PC_1 *siano in involuzione, è una curva generale di 3.° ordine, che passa per i sei punti dati.* A tale luogo appartengono i punti d'intersezione

di AB, $A_1 B_1$, e così di AB_1, $A_1 B$; chiamiamoli rispett. D, D_1; così si avranno i punti

$$E = (AC, A_1 C_1), \ E_1 = (AC_1, A_1 C), \text{ ecc.}$$

I punti come A, A_1; B, B_1; D, D_1, ecc. si chiamano *punti coniugati.*

La proprietà caratteristica di due punti coniugati è la seguente:

Le tangenti in due punti coniugati si incontrano sulla curva stessa in un punto che è a sua volta il punto coniugato del terzo punto d'intersezione colla curva della retta che congiunge i due primitivi punti coniugati.

Altre generazioni proiettive delle cubiche sono le seguenti:

Si consideri un fascio di coniche e un fascio di rette rispett. fra loro proiettivi (i parametri di una conica e di una retta dei due fasci sieno legati da una relazione bilineare); *il luogo dei punti d'intersezione di un raggio colla conica corrispondente è una cubica che passa per il centro del fascio di rette e per i quattro punti-base del fascio di coniche* (Chasles).

Se su di una cubica si assumono quattro punti come punti-base di un fascio di coniche, ogni conica di tal fascio segherà ancora la curva in due punti la cui congiungente passa per un punto FISSO *della cubica stessa (punto* OPPOSTO *ai quattro punti dati).*

Si consideri il sistema (schiera) di coniche tangenti a quattro rette date; da due punti dati si conducano le due coppie di tangenti a ciascuna conica del sistema; il luogo dei punti d'intersezione di tali tangenti è una cubica generale.

Un'altra generazione delle cubiche è quella detta di GRASSMANN:

Un punto P descrive una curva di 3.° ordine se le rette che lo congiungono a tre punti fissi incontrano tre altre rette fisse in tre punti allineati. In tal caso questa retta mobile in cui sono allineati i tre punti inviluppa una curva di 3.ª classe.

Per un'altra costruzione geometrica di SCHROETER v. *Math. Ann.*, V.

Per la costruzione di una cubica, dati nove punti di essa, e per la costruzione del nono punto per cui passano tutte le cubiche del fascio determinato da 8 punti, vedi principalmente CHASLES (*Compt. Rend.*, 1853), CAYLEY (*Quart. J. of math.*, V, 1862), CREMONA (*Introd.*), ecc.

§ 3. — FORME CANONICHE DELL' EQUAZIONE DI UNA CUBICA. — CLASSIFICAZIONI VARIE DELLE CUBICHE.

Prendendo per vertice ($x_1 = 0$, $x_3 = 0$) *del triangolo fondamentale delle coordinate un punto di flesso della curva, per retta* $x_3 = 0$ *la tangente di flesso, e per retta* $x_2 = 0$ *la polare armonica del medesimo flesso, l'equazione (in coordinate omogenee) della cubica è*

$$x_3 x_2^2 = a x_1^3 + 3 b x_1^2 x_3 + 3 c x_1 x_3^2 + d x_3^3.$$

Scindendo il polinomio del secondo membro nei suoi tre fattori lineari, ciascuno di questi, eguagliato a zero, rappresenta una delle tre tangenti che dal flesso possono condursi alla curva.

Scegliendo per retta $x_1 = 0$ una di tali tangenti, l'equazione della curva può ridursi alla forma

$$x_3 x_2^2 = x_1 (x_1 - x_3)(x_1 - k^2 x_3);$$

ovvero anche alla forma (con altra opportuna scelta dell'asse $x_1 = 0$)

$$x_3 x_2^2 = 4 x_1^3 - g_2 x_1 x_3^2 - g_3 x_3^3.$$

Riducendo l'equazione della cubica sotto una delle forme precedenti si vede che *le coordinate di un punto della curva sono proporzionali a funzioni ellittiche di un parametro. Propriamente può porsi*

$$x_1 : x_2 : x_3 = p(u) : p'(u) : 1$$

dove p, p' sono le funzioni ellittiche di Weierstrass.

Quando, ridotta la equazione della cubica sotto l'ultima forma indicata, si ha $g_3 = 0$ allora si ha la cosiddetta *cubica armonica* la quale ha la proprietà che *le quattro tangenti condotte da un punto della cubica alla curva stessa formano un gruppo armonico.*

Quando invece è $g_2 = 0$, allora si ha la *cubica equianarmonica,* la quale ha la proprietà *che le quattro tangenti condotte da un punto della curva alla curva stessa, formano un gruppo equianarmonico.*

Se si assume come triangolo fondamentale delle coordinate uno dei triangoli d'inflessione, l'equazione di una cubica generale diventa:

$$a(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + 6 b x_1 x_2 x_3 = 0.$$

Se si assume come triangolo fondamentale delle coordinate quello formato da tre tangenti d'in-

flessione l'equazione della cubica è

$$(x_1 + x_2 + x_3)^3 + 27\,k\,x_1\,x_2\,x_3 = 0.$$

L'equazione di una cubica con un punto doppio (cubica razionale) si può ridurre alla forma

$$x_1^3 + x_2^3 + 6\,x_1\,x_2\,x_3 = 0$$

prendendo per triangolo delle coordinate quello formato dalla retta $x_3 = 0$ *in cui sono allineati i tre punti di flesso, e dalle due tangenti nel punto doppio* $(x_1 = 0,\ x_2 = 0)$.

L'equazione di una cubica con una cuspide si può ridurre alla forma

$$x_2^3 - 3\,x_1^2\,x_3 = 0$$

prendendo per triangolo fondamentale quello formato dalla tangente cuspidale $(x_1 = 0)$, *dalla tangente nell'unico punto di flesso* $(x_3 = 0)$ *e dalla congiungente la cuspide col flesso* $(x_2 = 0)$.

Se l'equazione della cubica si pone sotto la forma

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6\,m\,x_1\,x_2\,x_3 = 0,$$

l'equazione della Hessiana è (v. § 4)

$$H = -6\,m^2(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + 6\,(1 + 2\,m^3)x_1x_2x_3 = 0,$$

e l'equazione della Cayleyana è (in coordinate di rette)

$$s = -6\,m\,(u_1^3 + u_2^3 + u_3^3) - 6\,(1 - 4\,m^3)\,u_1\,u_2 u_3 = 0.$$

L'equazione di una cubica si può ridurre a contenere solo i cubi di quattro forme lineari nelle coordinate.

Una di queste si scelga arbitrariamente; essa eguagliata a zero rappresenterà una retta, e si consideri il fascio delle coniche polari dei punti di questa retta rispetto alla cubica.

Le tre diagonali del quadrangolo che ha per vertici i quattro punti-base di tal fascio di coniche corrispondono alle altre tre forme lineari che insieme alla data, possono, mediante i loro cubi, servire a rappresentare l'equazione della curva data (v. su ciò Salmon-Fiedler, *Höh. Curv. nota 55).*

Una curva generale di 3.° ordine (senza punti doppi) di cui l'equazione è a coefficienti reali può avere due forme diverse, cioè o risulta di un sol ramo reale (che si estende all'infinito) o di due rami reali separati (v. Cap. V, § 1). *Quella che risulta di un ramo solo ha la proprietà che da un suo punto si possono condurre alla curva (oltre la tangente nel punto stesso) due tangenti reali (le altre due sono immaginarie). Quella che risulta di due rami (un' ovale e un ramo che si estende all' infinito) ha la proprietà che da ogni punto dell' ovale non si può condurre alcuna tangente reale alla curva (oltre la tangente nel punto che si considera), e da ogni punto del ramo che si estende all' infinito si possono condurre quattro tangenti reali alla curva, due all' ovale, e due al ramo cui appartiene il punto.*

Le cubiche ad un sol ramo si distinguono secondo il modo con cui sono tagliate dalla retta all' infinito del piano; cioè:

a) La serpentina ellittica ha un sol punto reale all' infinito, e la tangente in esso si estende al finito ed è perciò un assintoto della curva.

b) La serpentina parabolica ha oltre un punto reale all'infinito, ancora reali e coincidenti gli altri due punti d'intersezione; quindi essa ha un assintoto al finito, ed è tangente alla retta all'infinito.

c) La serpentina iperbolica ha tre punti reali all'infinito e perciò tre assintoti al finito.

Le cubiche a due rami si distinguono similmente in:

a) Serpentina ellittica con ovale ellittica, con un sol punto reale all'infinito, situato sulla serpentina.

b) Serpentina ellittica con ovale parabolica, con un punto reale all'infinito, e gli altri due coincidenti situati sull'ovale, che ha una forma parabolica.

c) Serpentina ellittica con ovale iperbolica, con un punto reale all'infinito sulla serpentina, e due punti reali all'infinito sull'ovale che ha una forma iperbolica.

d) Serpentina parabolica con ovale ellittica; tre punti reali all'infinito; di cui almeno due coincidenti, tutti situati sulla serpentina.

e) Serpentina iperbolica con ovale ellittica; tre punti reali distinti all'infinito, tutti situati sulla serpentina.

Un'altra classificazione delle curve di 3.° ordine di cui l'equazione è a coefficienti reali è quella fatta da Newton in cinque specie di parabole divergenti. Come abbiamo già detto, con opportuna trasformazione reale di coordinate, l'equazione di ogni siffatta curva del terz'ordine può ridursi al tipo:

$$x_3 x_2^2 = a x_1^3 + 3 b x_1^2 x_3 + 3 c x_1 x_3^2 + d x_3^3,$$

dove a, b, c, d sono reali. Basta prendere per retta $x_3 = 0$ una delle tangenti d'inflessione (reale) della curva, per punto $(x_1 = 0,\ x_3 = 0)$ tal punto d'inflessione (reale), e per retta $x_2 = 0$ la polare armonica di tal punto rispetto alla curva.

Trasportando all'infinito la tangente d'inflessione $x_3 = 0$, si ha: *l'equazione in coord. cartesiane d'ogni cubica può ridursi alla forma*

$$y^2 = a\,x^3 + 3\,b\,x^2 + 3\,c\,x + d.$$

Tenendo allora conto della natura dei fattori del polinomio che figura al 2.° membro in questa equazione, abbiamo *la distinzione delle cubiche in cinque specie di parabole divergenti* (Newton), cioè:

a) I tre fattori del polinomio sono tutti reali; la curva risulta di un'ovale e di una serpentina.

b) Un solo fattore è reale; la curva risulta solo di una serpentina.

c) Due dei tre fattori sono eguali, cioè il polinomio si scompone in $(x - \alpha)^2\,(x - \beta)$ *dove* $\alpha < \beta$; *la curva è formata di una serpentina, e l'ovale si riduce o a due punti immaginari coniugati o ad un punto unico reale.*

d) Il polinomio si scompone anche in $(x - \alpha)^2 \times$ $\times\,(x - \beta)$ *ma sia* $\alpha > \beta$; *l'ovale e la serpentina si riuniscono in modo da formare un solo ramo continuo e segante sè stesso; la curva ha un punto doppio.*

e) I tre fattori del polinomio sono tutti eguali; la curva viene ad acquistare un punto cuspidale.

Trasportando all'infinito invece la polare armonica $x_2 = 0$, *l'equazione cartesiana della cubica può sempre anche scriversi*

$$y = a x^3 + 3 b x^2 y + 3 c x y^2 + d y^3.$$

Questa cubica ha un CENTRO, *che è il punto di inflessione* ($x = 0$, $y = 0$) *cioè ogni corda condotta per tal punto è bisecata in esso;* eseguendo allora sui fattori del secondo membro la stessa distinzione fatta sopra, si ha *la distinzione delle cubiche in cinque specie di curve a centro* (CHASLES).

Un'altra classificazione delle cubiche è finalmente quella fatta da PLÜCKER, e studiata anche da CAYLEY, nella quale si prende per punto di partenza la posizione e natura delle tangenti (assintoti) nei tre punti all'infinito della curva.

Per la letteratura sulla classificazione delle cubiche citeremo NEWTON (*Op. cit.*), EULER (*Introd.*, 1748), CHASLES (*Aperçu hist.*), PLÜCKER (*System der anal. Geom.*), CAYLEY (*Transact. of Cambridge*, ecc., XI, 1865), BELLAVITIS (*Società italiana delle scienze*, Modena, 1851), MÖBIUS (*Abh. der Sächs. Gesellschaft*, 1851), DUREGE (*Crelle*, LXXV, LXXVI), ecc.

§ 4. — LA FORMA CUBICA TERNARIA. SUOI INVARIANTI E COVARIANTI.

Sia la cubica ternaria espressa simbolicamente da $f = a_x{}^3 = b_x{}^3 = \ldots$, ovvero, mediante i coefficienti effettivi, da $f = \Sigma\, a_{ihk}\, x_i\, x_h\, x_k$.

Dalle tre formazioni invariantive Δ, Q, R della cubica binaria, col principio di traslazione (vedi

Cap. III) si ottengono tre formazioni invariantive per la cubica ternaria, cioè

$$\Theta = (a\, b\, u)^2\, a_x\, b_x$$
$$Q_1 = (a\, b\, u)^2\, (c\, a\, u)\, c_x{}^2\, b_x$$
$$F = (a\, b\, u)^2\, (c\, d\, u)^2\, (a\, c\, u)\, (b\, d\, u).$$

La relazione $F = 0$ *è la equazione di* f *in coordinate di rette (equazione tangenziale della cubica).*

L'equazione $\Theta = 0$ *dà per* $x =$ *costante l'equazione tangenziale della conica polare di* x; *e per* $u =$ *costante dà l'equazione della* POLOCONICA *della retta* u (v. § 1).

L'equazione $Q_1 = 0$ *dà per ogni retta* u, *una cubica luogo di punti* x *di cui le rette polari incontrano la retta* u *in un punto che è* CONIUGATO (v. Cap. III) *di* x *rispetto alla poloconica di* u.

La cubica $Q_1 = 0$ *incontra la retta* u *in tre punti che insieme con quelli in cui* u *incontra la cubica* $f = 0$, *formano tre coppie di una medesima involuzione di cui i punti doppi sono quelli in cui* u *incontra la propria poloconica.*

Ponendo

$$f_{ij} = \frac{1}{6}\, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}$$
$$\Theta_{ij} = \frac{1}{2}\, \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_i\, \partial x_j}$$

si hanno le formole

$$F = -2 \begin{vmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} & \Theta_{13} & u_1 \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} & \Theta_{23} & u_2 \\ \Theta_{31} & \Theta_{32} & \Theta_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Theta = -2 \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & u_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & u_2 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix} .$$

Ponendo simbolicamente:

$$\Theta = \Theta^2{}_x \, u^2{}_\vartheta = \Theta'^2{}_x \, u^2{}_{\vartheta'}$$

si ha anche

$$Q_1 = u^2{}_\vartheta (c \, \Theta \, u) \, c^2{}_x \, \Theta_x .$$

Il sistema completo di una cubica ternaria risulta di 34 forme.

Altre importanti formazioni invariantive della cubica sono:

l' Hessiana

$$H = (a \, b \, c)^2 \, a_x \, b_x \, c_x$$
$$= \Theta^2{}_x \, c^2{}_\vartheta \, c_x ;$$

la Cayleyana

$$s = (a \, b \, c)(a \, b \, u)(a \, c \, u)(b \, c \, u)$$
$$= (\Theta \, c \, u)^2 \, c_\vartheta \, u_\vartheta ;$$

il contravariante

$$t = (a \, b \, d)(a \, b \, u)(a \, e \, u)(b \, f \, u)(d \, e \, f)^2$$
$$= \Theta^2{}_s \, u_s \, u^2{}_\vartheta$$

e i due invarianti

$$S = (a \, b \, c)(a \, b \, d)(a \, c \, d)(b \, c \, d)$$
$$= \Theta^2{}_{\vartheta'} \, \Theta'^2{}_\vartheta$$
$$= a^3{}_s$$
$$= \frac{2}{3} \Big\{ (a_{122} a_{133} - a^2{}_{123})^2 + (a_{222} a_{333} - a^2{}_{223})(a_{111} a_{133} - a^2{}_{113}) +$$

$$+ (a_{223}\, a_{333} - a^2_{233}) (a_{111}\, a_{122} - a^2_{112}) +$$
$$+ (a_{222}\, a_{333} + a_{223}\, a_{233}) (a_{112} a_{113} - a_{111} a_{123}) +$$
$$+ (a_{122} a_{333} + a_{223} a_{133} - 2 a_{123} a_{233}) (a_{112} a_{123} - a_{113} a_{122}) +$$
$$+ (a_{122} a_{233} + a_{133} a_{222} - 2 a_{123} a_{223}) (a_{113} a_{123} - a_{112} a_{133}) \}$$

$$T = (a\, b\, c) (a\, b\, d) (a\, c\, e) (b\, c f) (d\, e\, f)^2$$
$$= a^3 t.$$

Non esistono altri invarianti fondamentali oltre i due S e T, cioè *ogni altro è sempre una funzione razionale intera di quei due.*

Se si pone f sotto la forma canonica (v. § 3).

$$f = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6\, m\, x_1\, x_2\, x_3$$

si ha:

$$t = - 2 (1 - 10\, m^3) (u_1^3 + u_2^3 + u_3^3) -$$
$$+ 2 (30\, m^2 + 24\, m^5)\, u_1\, u_2\, u_3$$
$$S = 24\, m\, (m^3 - 1)$$
$$T = 6 (8\, m^6 + 20\, m^3 - 1)$$

mentre la equazione di f in coordinate tangenziali diventa:

$$- \frac{1}{2} F = u_1^6 + u_2^6 + u_3^6 - (2 + 32\, m^3) (u_1^3 u_2^3 +$$
$$+ u_2^3 u_3^3 + u_3^3\, u_1^3) - 24\, m^2\, u_1\, u_2\, u_3\, (u_1^3 + u_2^3 + u_3^3) -$$
$$- (24\, m + 48\, m^4)\, u_1^2\, u_2^2\, u_3^2 = 0$$

(per le espressioni di H e C vedi il § 3).

La condizione $S = 0$ esprime che la Hessiana di f si decompone in tre rette; la Cayleyana si compone allora dei tre punti doppi della Hessiana, e il triangolo formato da questi è triangolo polare rispetto a tutte le coniche polari della curva primitiva.

Se $S = 0$, la curva di 3.° ordine è detta *equianarmonica; in tal caso formano un gruppo equianarmonico le quattro tangenti condotte da un punto della curva alla curva stessa* (v. § 1).

Se $T = 0$ la curva di 3.° ordine è detta *armonica; in tal caso formano un gruppo armonico le quattro sopraindicate tangenti.*

Se è $T = 0$, la Hessiana della Hessiana si confonde colla curva primitiva, e la Cayleyana della Hessiana si confonde con $t = 0$.

Il discriminante della curva di 3.° ordine, cioè la funzione che eguagliata a zero esprime la condizione del punto doppio, è

$$T^2 - \frac{1}{6} S^3.$$

Per il caso in cui la f sia data sotto la sopraindicata forma canonica, il discriminante è

$$(1 + 8\, m^3)^3.$$

Chiamando a_{ijk} e h_{ijk} i coefficienti di f e dell'Hessiana H, la espressione effettiva del discriminante è

$$R = \begin{vmatrix} a_{111} & a_{122} & a_{133} & a_{123} & a_{113} & a_{112} \\ a_{211} & a_{222} & a_{233} & a_{223} & a_{213} & a_{212} \\ a_{311} & a_{322} & a_{333} & a_{323} & a_{313} & a_{312} \\ h_{111} & h_{122} & h_{133} & h_{123} & h_{113} & h_{112} \\ h_{211} & h_{222} & h_{233} & h_{223} & h_{213} & h_{212} \\ h_{311} & h_{322} & h_{333} & h_{323} & h_{313} & h_{312} \end{vmatrix}.$$

La espressione $\frac{S^3}{T^2}$ *è invariante assoluto per la cubica.*

Posta la cubica sotto la solita forma canonica, si ha

$$\frac{S^3}{T^2} = \frac{384\, m^3 (m^3 - 1)^3}{(8\, m^6 + 20\, m^3 - 1)^2}.$$

Chiamando α *il rapporto anarmonico (costante) delle quattro tangenti condotte da un punto della cubica alla cubica stessa, si ha la rimarchevole relazione*

$$\frac{S^3}{T^2} = 24\, \frac{(1 - \alpha + \alpha^2)^3}{(1 + \alpha)^2\,(2 - \alpha)^2\,(1 - 2\,\alpha)^2}.$$

Le condizioni necessarie e sufficienti perchè una cubica possieda una cuspide sono $S = 0$, $T = 0$.

Le condizioni necessarie e sufficienti perchè una cubica si decomponga in una conica e in una retta sono date dall'annullarsi identico di

$$T s - S t;$$

se poi la retta deve essere tangente alla conica, allora le condizioni sono espresse dall'annullarsi identico di t.

Per la decomposizione della cubica in tre rette, è necessario e sufficiente che f *e* H *sieno proporzionali, cioè che la forma*

$$(a\, h\, u)\, a^2_x\, h^2_x$$

sia identicamente nulla.

Le condizioni necessarie e sufficienti per la decomposizione di f *in tre rette concorrenti in un punto, sono date dall'annullarsi identico di* H.

L'annullarsi identico di F dà le condizioni perchè f si decomponga in una retta semplice e in una doppia, e finalmente l'annullarsi identico di Θ dà le condizioni perchè f si riduca ad una retta tripla.

Se la cubica ha un punto doppio, le tangenti in questo, tagliano l'unica linea d'inflessione in due punti che sono rappresentati dall'Hessiano Δ della binaria cubica che rappresenta i tre punti di flesso. Il covariante Q di tale binaria cubica rappresenta allora i tre punti in cui le tre rette armoniche dei tre flessi (v. § 1) *tagliano la linea d'inflessione.*

Due cubiche $a_x^3 = 0$, $\alpha_x^3 = 0$ hanno gli stessi flessi se è zero identicamente il contravariante simultaneo $(a\,\alpha\,u)^3 = 0$.

Quindi supposto che la seconda cubica è l'Hessiana H della prima si ha:

Il contravariante $(a\,h\,u)^3$ è identicamente zero.

Nello studio della forma ternaria cubica è interessante lo studio della binaria biquadratica

$$G(\lambda_1 \lambda_2) = \lambda_1^4 - S\lambda_1^2\lambda_2^2 - \frac{4}{3}T\lambda_1\lambda_2^3 - \frac{1}{12}S^2\lambda_2^4$$

la quale si presenta nella formazione dell'Hessiano di una cubica qualunque del fascio sizigetico (v. § 1).

$$\lambda_1 f + \lambda_2 H.$$

La equazione delle 12 rette inflessionali è:

$$G(H, -f) = 0.$$

L'invariante i della biquadratica G è identicamente zero.

L'invariante j di G è eguale a $\frac{2}{3}\left(\frac{S^3}{6} - T^2\right)$, *cioè è eguale, a meno di un fattore, al discriminante di f.*

L' Hessiano di G, differisce solo per un fattore numerico dall' invariante $S\lambda_1\lambda_2$ *di una curva del fascio sizigetico.*

Il covariante sestico di G, differisce solo per un fattore numerico, dall' invariante $T\lambda_1\lambda_2$ *di una curva del fascio sizigetico.*

Delle cubiche ternarie si occuparono HESSE, ARONHOLD (*Crelle*, XXXIX, LV), CAYLEY (*Mem. upon quantics*, 1856; *Phil. Trans.*, 1861; *Am. Journ.*, IV), GORDAN (*Math. Ann.*, I), CLEBSCH-GORDAN (*Math. Ann.*, I, VI, VIII), GUNDELFINGER (*Math. Ann.*, IV, V, VIII), HARNACK (*Math. Ann.*, IX), MERTENS (*Wien. Berich.*, 1888 , DINGELDEY (*Math. Ann.*, XXXI), MAISANO (*Rendic. Palermo*, IV), GERBALDI (*Atti Torino*, XV, 1880). Per una esposizione dettagliata si vegga la *Geometria* di CLEBSCH-LINDEMANN, della quale ci siamo serviti in questo riassunto.

Analoghe ricerche si trovano anche nelle opere di SALMON (*Higher plan. curv.* e *Modern. algeb.* trad. da FIEDLER in tedesco. Leipzig, 1863-1882).

CAPITOLO VIII.

Le quartiche piane.

§ 1. — Generalità. Generazioni delle quartiche. Tangenti doppie. Coniche e cubiche di contatto.

Dalle formole di Plücker risultano le seguenti dieci possibili combinazioni per i numeri caratteristici di una quartica piana:

n	d	r	ν	δ	ι	p
4	0	0	12	28	24	3
4	1	0	10	16	18	2
4	0	1	9	10	16	2
4	2	0	8	8	12	1
4	1	1	7	4	10	1

n	d	r	ν	δ	ι	p
4	0	2	6	1	8	1
4	3	0	6	4	6	0
4	2	1	5	2	4	0
4	1	2	4	1	2	0
4	0	3	3	1	0	0

Si abbiano due fasci proiettivi di coniche, i cui punti base sieno distinti; il luogo dei punti d'intersezione delle coniche corrispondenti è una curva generale di 4.° ordine che passa per gli 8 punti base dei due fasci.

I due fasci di coniche sieno dati da

$$U + \lambda V = 0$$
$$U' + \mu V' = 0$$

dove $U = 0$, $V = 0$, $U' = 0$, $V' = 0$ rappresentino le equazioni di quattro coniche, e fra μ e λ sussista una relazione bilineare del tipo

$$a \lambda \mu + b \lambda + c \mu + d = 0.$$

Eliminando λ, μ fra queste tre equazioni si ha la equazione della curva del 4.° ordine.

Non si perde alcuna generalità, se si suppone $\mu = \lambda$, *e* $V' = V$; *cioè:*

L'equazione di ogni curva del 4.° ordine può sempre porsi sotto la forma

$$U\,W = V^2$$

dove $U = 0$, $W = 0$, $V = 0$ *rappresentano tre coniche non passanti tutte tre per un medesimo punto.*

Per ridurre l'equazione della quartica a questa forma basta assumere per coniche U, W due *coniche di contatto*, cioè coniche che toccano in quattro punti la quartica.

Propriamente sussiste il teorema:

Esistono 63 sistemi di coniche di contatto; ogni sistema è costituito di infinite coniche tali che per gli otto punti di contatto di due coniche di uno stesso sistema passa una medesima altra conica. Nell'equazione superiormente scritta, tale conica è rappresentata da $V = 0$.

In ciascuno dei 63 sistemi di coniche di contatto figurano 6 coppie di tangenti doppie

Se $T_1 = 0$, $T_2 = 0$, $T_3 = 0$, $T_4 = 0$ sono le equazioni di quattro tangenti doppie di due di tali coppie appartenenti allo stesso sistema, *l'equazione della quartica potrà sempre porsi sotto la forma*

$$T_1\,T_2\,T_3\,T_4 = S^2$$

dove le T sono espressione lineari e la S è espressione quadratica.

Messa l'equazione della quartica sotto la forma

$$U\,W = V^2,$$

essa può considerarsi come l'inviluppo del sistema di coniche:

$$\lambda^2 U + 2 \lambda V + W = 0.$$

Una quartica piana può anche essere generata mediante due fasci proiettivi, uno di rette e l'altro di cubiche (v. MILINOWSKI, *Schlömilch Zeitsch.* XXIII, 1878).

Dalla equazione $T_1 T_2 T_3 T_4 = S^2$ risulta che *si possono raggruppare a 4 a 4 le tangenti doppie, in modo che gli otto punti di contatto stiano su di una medesima conica. Di tali coniche ve ne sono 315.*

L'equazione di una quartica può anche porsi sotto la forma

$$T_1 F_3 = \Omega^2$$

dove $T_1 = 0$ *è l'equazione di una tangente doppia,* $F_3 = 0$ *è l'equazione di una cubica, la quale tocca in 6 punti la quartica, e che perciò si chiama cubica di contatto, e* $\Omega = 0$ *è l'equazione di una conica.*

Esistono 64 sistemi di cubiche di contatto triplamente infiniti. Questi 64 sistemi si distinguono in due specie; ve ne sono 28 di una specie e 36 dell'altra. Quelli della prima specie hanno la proprietà che ad ognuno di essi corrisponde una delle 28 tangenti doppie in modo che i sei punti di contatto, insieme ai due della tangente doppia stanno su di una stessa conica. Quelli della seconda specie non hanno invece questa proprietà; essi contengono un sistema semplicemente infinito di cubiche degenerate in una tangente alla quartica e

in una conica passante per i due punti in cui la tangente incontra ancora la quartica, e tangente a questa in altri tre punti.

Ponendo l'equazione della quartica sotto la forma $T_1 F_3 = \Omega^2$, *la cubica* $F_3 = 0$ *è una cubica di un sistema di 1.ª specie.*

Le cubiche di contatto di 1.ª o 2.ª specie hanno sempre la proprietà che per i 12 punti di contatto di due cubiche dello stesso sistema passa una nuova cubica.

In ogni sistema di cubiche di contatto esistono 64 cubiche che hanno colla quartica un contatto di 3.º ordine in tre punti. Di tali cubiche ve ne sono dunque $4^6 = 4096$.

Esistono 728 sistemi di cubiche aventi un contatto di 2.º ordine colla quartica in quattro punti. Questi 728 sistemi si scindono in 364 coppie in maniera, che i punti di contatto di una cubica di un sistema, e quelli di una cubica del sistema ad esso accoppiato, stanno su di una medesima conica.

Una curva generale di 4.º ordine può generarsi anche nel seguente modo indicato da HESSE (*Crelle*, XLIX).

Si abbia una rete di quadriche

$$x_1 \sum_1^4 \alpha_{ik} z_i z_k + x_2 \sum_1^4 \beta_{ik} z_i z_k + x_3 \sum_1^4 \gamma_{ik} z_i z_k = 0$$

dove le $x_1\, x_2\, x_3$ sono i parametri omogenei della rete, le $z_1\, z_2\, z_3\, z_4$ sono le coordinate di punti dello spazio, e $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$, $\beta_{ik} = \beta_{ki}$, $\gamma_{ik} = \gamma_{ki}$. *I vertici dei* CONI *contenuti in questa rete sono situati su di una curva storta di 6.º ordine.* Interpretando

poi le x come le coordinate di punti del piano, *ai punti della indicata sestica storta (vertici dei coni), corrispondono nel piano i punti di una curva piana generale di 4.° ordine, la cui equazione si ottiene ponendo eguale a zero il discriminante di una quadrica della rete.*

Ponendo

$$\pi_{ik} = x_1 \alpha_{ik} + x_2 \beta_{ik} + x_3 \gamma_{ik}$$

L'equazione della quartica è

$$C_4 = \begin{vmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} & \pi_{14} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \pi_{41} & \pi_{42} & \pi_{43} & \pi_{44} \end{vmatrix} = 0.$$

Ponendo l'equazione della quartica sotto questa forma, la equazione

$$\Phi_{uu} = \begin{vmatrix} \pi_{11} & \ldots & \pi_{14} & u_1 \\ \cdot & \cdots & \cdot & u_2 \\ \cdot & \cdots & \cdot & u_3 \\ \pi_{41} & \ldots & \pi_{44} & u_4 \\ u_1 & \ldots & u_4 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

è quella di una cubica di contatto di un sistema di 2.ª specie, e l'equazione

$$\Phi_{uv} = \begin{vmatrix} \pi_{11} & \ldots & \pi_{14} & u_1 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \pi_{41} & \ldots & \pi_{44} & u_4 \\ v_1 & \ldots & v_4 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

è quella della cubica che passa per i punti di contatto di $\Phi_{uu}=0$ *e* $\Phi_{vv}=0$.

Ponendo la equazione della rete di quadriche simbolicamente sotto la forma

$$0 = a_x \alpha^2_z = b_x \beta^2_z = \dots \quad \begin{pmatrix} \text{le } x \text{ sono variab. ternarie} \\ \text{le } z \text{ sono variab. quatern.} \end{pmatrix}$$

la equazione di C_4 *è*

$$(\alpha\, \beta\, \gamma\, \delta)^2\, a_x\, b_x\, c_x\, d_x = 0$$

e quelle delle cubiche Φ_{uu}, Φ_{uv} *sono*

$$\Phi_{uu} = (\alpha\, \beta\, \gamma\, u)^2\, a_x\, b_x\, c_x = 0$$

$$\Phi_{uv} = (\alpha\, \beta\, \gamma\, u)\,(\alpha\, \beta\, \gamma\, v)\, a_x\, b_x\, c_x = 0.$$

È interessante notare ancora che *si può stabilire una corrispondenza biunivoca fra le rette che congiungono a due a due gli otto punti fondamentali della rete di quadriche e le 28 tangenti doppie.*

Un altro modo di generazione di una curva generale di quart'ordine è il seguente di Geiser (*Math. Ann.* I).

Se da un punto P conduciamo il cono tangente ad una superficie cubica, abbiamo un cono di 6.° ordine; ma se il punto sta sulla superficie, si ha un cono di quart'ordine, insieme al piano tangente in quel punto P contato due volte. Segando questo cono con un piano, si ha una curva generale di 4.° ordine, che ha per tangente doppia la retta intersezione del piano segante col piano tangente in P.

Le sezioni piane della superficie cubica si proiettano in cubiche di contatto alla quartica; si ha propriamente il sistema triplamente infinito di cubiche di contatto di 1.ª specie che è correlato colla tangente doppia risultante dal piano tangente in P. Le 27 rette della superficie cubica si proiettano nelle altre 27 tangenti doppie della quartica piana.

Per lo studio della configurazione delle tangenti doppie della quartica piana è utile adoperare per esse una notazione o una rappresentazione da cui possa facilmente risultare la configurazione richiesta.

Una delle rappresentazioni adoperate e che può essere suggerita dalla *figura di Hesse* sopra indicata è *quella mediante le 28 rette che congiungono a due a due otto punti fondamentali.*

Un'altra rappresentazione è *quella mediante le cosiddette caratteristiche dispari di genere 3* (vedi vol I, pag. 465)

Ogni tangente doppia può rappresentarsi col simbolo

$$\begin{pmatrix} i & j & h \\ i_1 & j_1 & h_1 \end{pmatrix}$$

dove i, j, h, i_1, j_1, h_1 *sono numeri 0 o 1, e la somma*

$$i\,i_1 + j\,j_1 + h\,h_1$$

è dispari.

Secondo la prima rappresentazione un gruppo di quattro tangenti doppie pei cui punti di contatto passa una conica è rappresentato o dai quattro lati di un quadrilatero (210 volte) ovvero da quattro

rette due delle quali non hanno mai in comune uno degli otto punti (105 volte).

Secondo la seconda rappresentazione un siffatto gruppo è invece rappresentato da quattro caratteristiche dispari tali che le somme degli elementi che occupano i medesimi posti sieno tutti pari.

Partendo da questi principi si può esaminare quante terne, quaterne, ecc. di tangenti doppie, esistono che sieno dotate di proprietà speciali, p. es. terne i cui 6 punti di contatto non stanno su di una conica, quaterne dei cui 8 punti di contatto solo 6 (ovvero mai 6) stanno su di una conica, ecc.

Fra i gruppi di SEI tangenti doppie sono da notarsi quelli studiati da HESSE e STEINER; *esistono 1008 gruppi di sei tangenti doppie tali che per i punti di contatto di esse passa una curva* PROPRIA *del 3.° ordine.*

Nella prima delle rappresentazioni suindicate tali gruppi sono rappresentati da tre figure diverse, cioè: a) i lati di due triangoli che hanno per vertici 6 degli 8 punti; b) la retta che congiunge due punti, e le rette che congiungono un altro punto agli altri cinque; c) le rette che congiungono un punto a tre altri, e un altro punto ai tre rimanenti.

Esistono poi 5040 gruppi di 6 tangenti doppie tali che i 12 punti di contatto si dividono in 6 + 6, in modo che per ogni gruppo dei 6 punti passa una conica.

Le 6 tangenti doppie di uno dei 1008 gruppi della prima specie toccano la medesima conica; mentre ciascuno dei 5040 gruppi di 2.ª specie, si

divide in tre coppie di tangenti doppie in modo che i tre punti d'incontro delle tangenti di una coppia stanno in linea retta.

Fra i gruppi di SETTE tangenti doppie ve ne sono 288 i quali si chiamano i *sistemi completi* di ARONHOLD; essi sono formati di sette tangenti doppie tali che MAI i sei punti di contatto di tre di esse stanno su di una conica.

Tali sistemi completi sono rappresentati dalle sette rette che congiungono uno degli otto punti agli altri sette; ovvero dalle rette costituenti i tre lati di un triangolo e le quattro congiungenti uno dei rimanenti punti cogli altri quattro.

Esistono 72 sistemi di ARONHOLD *contenenti una data tangente doppia; e ne esistono 16 contenenti due date tangenti doppie.*

Mediante le sette tangenti doppie di un sistema di ARONHOLD *si possono con costruzioni lineari, costruire tutte le altre.*

Viceversa: *Date nel piano sette rette arbitrarie, si può sempre costruire una quartica che abbia per tangenti doppie le sette rette date, le quali formino rispetto alla quartica un sistema completo di Aronhold* (ARONHOLD, *Berl. Monatsb.*, 1864; SALMON-FIEDLER, *Höh. Curv.*, § 264 e seg., FROBENIUS, *Crelle*, IC).

Fra le varie forme che può avere una quartica è interessante quella cosiddetta di PLÜCKER formata di 4 ovali esterne l'una all'altra. Ad ognuna di queste ovali corrisponde una tangente doppia che la tocca in due punti.

Tale quartica ha tutte le TANGENTI *doppie reali.*

Le curve di 4.° ordine furono studiate da Plücker (*Alg. Curv.*), da Hesse (*Crelle*, IL, LV, LIX), Steiner (*Id.*, IL). Cayley (*Id.*, LXVIII), Clebsch (*Id.*, LXIII), Geiser (*Idem*, LXXIII, *Math. Ann.*, I), Zeuthen (*Math. Ann.*, VII, VIII) il quale ultimo si occupò molto della classificazione delle quartiche.

La determinazione della curva che passa per i 56 punti di contatto delle tangenti doppie fu fatta da Hesse (*Crelle*, XXXVI, XL, XLI), da Salmon (*Quart. Journ.*, III), Cayley (*Phil. Trans.*, 1859, 1861) e Dersch (*Math. Ann.*, VII).

Fra i lavori sulla determinazione delle tangenti doppie della quartica è anche da notarsi quello di Aeschlimann (*Diss.*, Zürich, 1880).

Le curve di 4.° ordine sono state anche largamente studiate dal punto di vista della teoria delle funzioni abeliane di genere 3, teoria colla quale esse hanno i più intimi rapporti. Lavori su ciò sono quelli di Riemann, Clebsch, Weber (vedi la *Geom.* di Clebsch-Lindemann).

Altri studi sulla configurazione delle 28 tangenti doppie sono quelli di Aronhold (cit.), Klein (*Math. Ann.*, X), Noether (*Math. Ann.*, XV, XLVI), Frobenius (*Crelle*, IC), Weber (*Math. Ann.*, XXIII), Pascal (*Rend. Lincei*, 1892-93) ecc.

Lo studio della configurazione delle tangenti doppie si riduce a quello delle cosiddette *caratteristiche* (v. Pascal, *Ann. di mat.* XX).

Sulla configurazione dei 24 flessi della quartica generale conosciamo molto poco. Una dissertazione di Grassmann (*Berlin*, 1875) a questo proposito (in cui si volea dimostrare che la conica passante

per cinque flessi, passa sempre per un sesto) è erronea (v. Klein, *Math. Ann.* X); dell'equazione di 24.° grado da cui dipendono i flessi si occupò Gerbaldi (*Rend.* Palermo, VII).

§ 2. — Quartiche con punti singolari.

Si ponga l'equazione della quartica sotto la forma $T_1 T_2 T_3 T_4 = S^2$. Se dei 6 punti d'incontro delle rette $T = 0$, uno, due, tre stanno sulla conica $S = 0$, si ha la quartica con uno, due, tre punti doppi.

Si ponga l'equazione della quartica sotto l'altra forma $U W = V^2$. Se le tre coniche

$$U = 0 \quad W = 0 \quad W = 0$$

hanno uno, due, tre punti comuni, si hanno quartiche con uno, due, tre punti doppi.

Una quartica con un punto doppio ha solo 16 tangenti doppie. Nella rappresentazione di Geiser (v. § 1) essa si otterrebbe ponendo il centro di proiezione P su di una delle rette p della superficie cubica; allora l'intersezione di questa retta col piano segante è il punto doppio; le proiezioni delle 16 rette che nella superficie cubica *non* tagliano la retta p, danno le 16 tangenti doppie.

Nella rappresentazione di Hesse (v. § 1) essa si otterrebbe invece facendo coincidere due degli 8 punti fondamentali della rete di quadriche.

La configurazione delle tangenti doppie si può studiare nello stesso modo con cui si studia la

configurazione generale, immaginando che due degli otto punti fondamentali coincidano, e quindi rappresentando le 16 tangenti doppie mediante le congiungenti a due due *sei* punti fondamentali, e mediante un'altra retta passante per un settimo punto. Le congiungenti questo settimo punto cogli altri sei, corrispondono alle sei rette tangenti alla curva condotte dal punto doppio.

Le 16 tangenti doppie si possono in 60 modi riunire in gruppi di quattro, in modo che per gli otto punti di contatto delle quattro tangenti di un gruppo, passi una conica.

Delle quartiche con un punto doppio si occuparono Brioschi, Cremona (*Math. Ann.*, IV), Brill (*Crelle*, LXV, *Math. Ann.*, VI), ecc.

Fra le quartiche *con due punti doppi* è stata studiata specialmente quella in cui tali due punti doppi sono i *punti ciclici immaginari all'infinito.* Una tal curva si chiama *curva bicircolare di quart' ordine* (Casey, *R. Irish Trans.*, 1871, XXIV).

In una quartica con due punti doppi, da ciascuno di questi possono condursi quattro tangenti alla curva; il rapporto anarmonico delle due quaterne di raggi così formate è il medesimo.

Le 16 intersezioni delle prime 4 tangenti colle seconde 4 tangenti stanno a quattro a quattro su coniche le quali passano per i due punti doppi.

La curva bicircolare può essere considerata come l'inviluppo di un cerchio di raggio variabile, il cui centro si muove su di una conica e che si mantiene sempre ortogonale ad un altro dato cerchio. Se la conica è una parabola, allora la curva

bicircolare si scinde nella retta all' infinito e in una curva di 3.° ordine.

Delle curve di 4.° ordine con due cuspidi sono caso particolare quelle chiamate le *curve Cartesiane*, in cui le due cuspidi sono i due punti ciclici immaginari all'infinito.

Le curve cartesiane hanno la proprietà: esistono su di una retta sempre tre punti A, B, C fissi, tali, che chiamando ρ, ρ' ρ'' *le distanze di un punto della curva da essi, sussistono le relazioni*

$$l\ \rho + m\,\rho' = c$$

$$l\ \rho + n\ \rho'' = c'$$

$$m\,\rho' - n\ \rho'' = c''$$

dove l, m, n, c, c', c'' *sono costanti.* Tali tre punti si chiamano FUOCHI; se essi sono tutti reali si ha una curva detta *ovale di Cartesio*; se uno solo è reale si ha una curva diversa da quella studiata da CARTESIO.

L'equazione di una curva cartesiana è

$$S^2 = k^3 L$$

dove $S = 0$ *è l'equazione di un cerchio,* $L = 0$ *quella di una retta, e* k *è una costante. La retta* $L = 0$ *è allora una tangente doppia della curva.*

È costante la somma delle distanze da un foco, dei quattro punti in cui una trasversale taglia una curva cartesiana.

Casi particolari della curva cartesiana sono la *lumaca di Pascal*, e la *cardioide*, di cui la prima ha, oltre le due cuspidi nei due punti ciclici, an-

cora un punto doppio, e nella seconda questo punto doppio è degenerato di nuovo in una terza cuspide.

L'equazione di una curva di 4.° ordine con tre punti doppi, si può porre sotto la forma seguente:

$$a_{11} x_2^2 x_3^2 + a_{22} x_3^2 x_1^2 + a_{34} x_1^2 x_2^2 + 2 a_{23} x_1^2 x_2 x_3 + \\ + 2 a_{31} x_2^2 x_3 x_1 + 2 a_{12} x_3^2 x_1 x_2 = 0$$

ponendo nei tre punti doppi i vertici del triangolo fondamentale delle coordinate omogenee.

Dividendo il primo membro dell'equazione per $x_1^2 x_2^2 x_3^2$, l'equazione precedente può porsi sotto una forma da cui appare che essa può ricavarsi da quella di una conica ponendo, in luogo di ciascuna coordinata la sua *inversa.*

Questa osservazione può utilmente servire allo studio della curva.

In una curva di 4.° ordine a tre punti doppi, le sei tangenti alla curva in questi punti, sono tangenti ad una medesima conica.

Le sei tangenti che dai tre punti doppi possono condursi alla curva, sono anch'esse tangenti ad una stessa conica.

Gli otto punti di contatto delle 4 tangenti doppie di una siffatta curva stanno su di una stessa conica.

L'equazione di una curva di 4.° ordine con tre cuspidi può sempre porsi sotto la forma

$$x_1^{-\frac{1}{2}} + x_2^{-\frac{1}{2}} + x_3^{-\frac{1}{2}} = 0$$

e le tre tangenti cuspidali sono allora date dalle equazioni

$$x_1 = x_2$$
$$x_2 = x_3$$
$$x_3 = x_1$$

e passano quindi per un medesimo punto.

Le curve di 4.° ordine con tre punti doppi furono specialmente studiate da Brill (*Math. Ann.*, XII) e Bretschneider (*Diss.*, Erlangen, 1875).

§ 3. — La forma quartica ternaria.

Posta simbolicamente la quartica ternaria sotto la forma

$$f = a^4_x = b^4_x = c^4_x = \dots$$

la prima forma invariantiva che si presenta è il contravariante:

$$\sigma = (a\, b\, u)^4.$$

Il contravariante σ eguagliato a zero rappresenta, in coordinate tangenziali, una curva le cui tangenti tagliano la curva $f = 0$ in quattro punti formanti un gruppo equianarmonico.

Un altro contravariante è

$$(a\, b\, u)^2\, (b\, c\, u)^2\, (c\, a\, u)^2,$$

il quale, eguagliato a zero, rappresenta una curva le cui tangenti tagliano la quartica data in quattro punti formanti un gruppo armonico.

Il più semplice invariante è quello espresso simbolicamente da

$$A = (a\,b\,c)^4$$

di 3.° grado nei coefficienti.

Un altro invariante è B espresso mediante i coefficienti effettivi colla formola:

$$B = a_1^2 b_2^2 c_3^2 d_2\, d_3\, e_3\, e_1\, f_1\, f_2 \quad \left|\begin{matrix} a_1^2, a_2^2, a_3^2, & a_2a_3, & a_3a_1, & a_1a_2 \\ b_1^2, b_2^2, b_3^2, & b_2b_3, & b_3b_1, & b_1b_2 \\ c_1^2, c_2^2, c_3^2, & c_2c_3, & c_3c_1, & c_1c_2 \\ d_1^2, d_2^2, d_3^2, & d_2d_3, & d_3d_1, & d_1d_2 \\ e_1^2, e_2^2, e_3^2, & e_2e_3, & e_3e_1, & e_1e_2 \\ f_1^2, f_2^2, f_3^2, & f_2f_3, & f_3f_1, & f_1f_2 \end{matrix}\right|$$

di 6.° grado nei coefficienti. Questo invariante si ottiene eliminando col metodo dialitico le x, fra le sei derivate seconde di f.

L'invariante B ha speciale relazione colla esprimibilità di f mediante una combinazione lineare delle quarte potenze di forme lineari.

Ogni quartica ternaria f può sempre rappresentarsi mediante le quarte potenze di SEI *forme lineari; se poi $B = 0$ allora la f si potrà rappresentare mediante le quarte potenze di* CINQUE *forme lineari; e se infine sono zero tutti i minori di 5.° ordine del determinante B, allora f si potrà rappresentare mediante le quarte potenze di sole* QUATTRO *forme lineari* (v. REYE, *Crelle*, LXXVIII; CLEBSCH, *Id.*, LIX; LÜROTH, *Math. Ann.*, I).

Non crediamo utile dilungarci sulla espressione

delle altre conosciute forme invariantive della quartica ternaria e solo aggiungeremo le seguenti notizie:

Il Gordan considerò il sistema completo d'una speciale quartica e trovò 54 forme (*Math. Ann.*, XVII, XX); il Maisano considerò tutte le forme sino a quelle di 5.° grado nei coefficienti (*Giorn. di Batt.*, XIX), e infine altre ricerche sullo stesso argomento si trovano nel trattato di Salmon-Fiedler (*Höher. Curven*, § 293 e seg.), in Scherrer (*Ann. di mat.*, X) e in Maisano (*Rendic. Palermo*, I).

CAPITOLO IX.

Teoria generale delle superficie e curve gobbe algebriche.

§ 1. — Generalità. — Superficie sviluppabili e gobbe. — Intersezioni di superficie. — Geometria sulle superficie algebriche.

Il luogo di punti rappresentato analiticamente da un'equazione algebrica di grado n fra le tre coordinate cartesiane di un punto dello spazio, si chiama *una superficie di ordine n.*

Superficie di 1.° ordine è il piano.

Ogni retta dello spazio taglia la superficie di ordine n, in n punti (reali o immaginari), e ogni piano la taglia secondo una curva di ordine n.

L'equazione di una superficie di ordine n contiene omogeneamente

$$\frac{1}{6} n (n^2 + 6n + 11) + 1 = \binom{n+3}{3} = N(n) + 1$$

coefficienti.

Retta tangente ad una superficie è la posizione limite di una retta la quale passa per due punti della superficie, quando tali punti restando sempre sulla superficie, si avvicinano indefinitivamente *(contatto bipunto)*.

Retta osculatrice ad una superficie è la posizione limite di una retta, la quale passa per tre o più punti di una superficie, quando tali punti si avvicinano indefinitamente *(contatto tripunto, quadripunto*, etc.).

Tutte le rette tangenti ad una superficie in un punto giacciono in generale in un piano, che si chiama piano tangente alla superficie in quel punto.

Il piano tangente ad una superficie in un punto P, taglia la superficie secondo una curva avente un punto doppio in P. Se questo è una cuspide il piano tangente si dice *stazionario.*

Le due tangenti nel punto doppio sono due rette osculatrici alla superficie. Secondochè tali tangenti sono reali, coincidenti, o immaginarie, il punto della superficie si dice *iperbolico, parabolico, ellittico.*

I punti parabolici di una superficie formano una curva che si chiama *curva parabolica.*

Il numero dei piani tangenti che si possono condurre ad una superficie da una retta situata comunque nello spazio si dice *classe della superficie.*

Una superficie di ordine n è in generale di classe $n\ (n-1)^2$, *se la superficie non contiene alcuna singolarità.*

Si abbia l'equazione della superficie in coordi-

nate omogenee x_1, x_2, x_3, x_4, e si supponga ordinato il primo membro secondo le potenze di x_4, cioè l'equazione posta sotto la forma

$$u_0 x_4^n + u_1 x_4^{n-1} + u_2 x_4^{n-2} + \ldots = 0$$

essendo $u_0, u_1, u_2, \ldots$ funzioni omogenee intere di grado 0, 1, 2,... in $x_1\ x_2\ x_3$.

Se il punto $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ è un punto della superficie, sarà $u_0 = 0$, *e il piano tangente in tal punto sarà rappresentato da* $u_1 = 0$

Conducendo un piano parallelo al piano tangente e infinitamente vicino ad esso, esso taglia la superficie secondo una curva, la quale, trascurando infinitesimi di ordine superiore, può approssimativamente considerarsi come una conica (indicatrice di DUPIN); *il punto della superficie è ellittico, parabolico, o iperbolico, secondochè tale conica è ellisse, parabola, iperbole.*

Ponendo l'equazione della superficie sotto la forma $z = f(x\, y)$, *il punto* $(x\, y\, z)$ *della superficie sarà ellittico, parabolico, iperbolico, secondochè è*

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}\right)^2 \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right).$$

L'intersezione o una parte dell'intersezione di due superficie *algebriche* si dice *curva gobba (o storta) algebrica.*

Una curva gobba (o storta) algebrica è tagliata da un piano qualunque dello spazio in un numero fisso di punti (reali, coincidenti, o immaginari). Tal numero si dice *ordine della curva gobba.*

Il minimo ordine per una curva gobba è il 3.

Si noti che *non si può a tutto rigore*, come per le curve piane, considerare sempre l'assieme di due curve gobbe di ordini d, d' come la degenerazione di una curva gobba di ordine $d + d'$; giacchè se una curva gobba di ordine $d + d'$ situata su di una superficie algebrica, si decompone in due curve di ordini d e d', queste avranno in generale dei punti d'intersezione, il che non avverrà in generale se le due curve date sono assegnate comunque nello spazio.

La posizione limite di una retta che passa per due punti della curva quando questi si avvicinano indefinitivamente è al solito la *retta tangente alla curva*, e la posizione limite di un piano che passa per tre punti della curva quando questi si avvicinano indefinitamente è *il piano osculatore alla curva.*

Classe di una curva gobba è il numero delle sue rette tangenti incontrate da una retta arbitraria dello spazio, ovvero il numero dei piani che passano per una retta fissa arbitraria dello spazio e per tangenti della curva gobba.

Una superficie generata dal movimento di una retta è una *rigata*. Queste si distinguono in *sviluppabili* e *gobbe*.

Una superficie *sviluppabile* è il luogo delle tangenti di una curva gobba. La sviluppabile è dunque generata dal movimento di una retta due posizioni consecutive della quale sono in un medesimo piano.

Generatrici della sviluppabile sono le tangenti della curva gobba, la quale a sua volta si dice

spigolo di regresso o curva cuspidale della sviluppabile.

L'ordine di una superficie sviluppabile è eguale alla classe della curva gobba.

Questo numero si suol chiamare *rango* del sistema costituito dalla curva gobba e dalla sua sviluppabile.

Un piano osculatore della curva gobba è un piano tangente alla superficie sviluppabile, la quale è perciò l'inviluppo dei piani osculatori della curva gobba. Perciò essa si suol chiamare *sviluppabile osculatrice. Segando la sviluppabile con un piano, il punto in cui questo piano taglia la curva gobba è una cuspide per la curva sezione.*

I punti in cui si incontrano due generatrici non infinitamente vicine della sviluppabile, formano una curva che si chiama la *curva doppia o nodale della sviluppabile.*

La curva sezione della sviluppabile con un piano, ha un punto doppio in ogni punto in cui la curva nodale è tagliata dal piano.

Una generatrice qualunque della sviluppabile d'ordine n, incontra altre $n - 4$ generatrici non infinitamente vicine.

I piani passanti per due generatrici non consecutive inviluppano una nuova sviluppabile la quale è bitangente (tangente in due punti) alla curva gobba, e si dice perciò *sviluppabile bitangente alla curva gobba.*

Per una *curva gobba* si dice numero dei suoi *punti doppi apparenti*, il numero delle rette che da un punto dello spazio possono condursi ad incontrare due volte la curva *(tal numero è natu-*

ralmente costante qualunque sia il punto dello spazio).

Per una superficie sviluppabile si dice numero dei suoi *piani doppi apparenti,* il numero delle intersezioni fra due dei suoi piani inviluppanti, e che si trovano in un piano arbitrario dello spazio *(anche tal numero è naturalmente costante).*

Classe della superficie sviluppabile è il numero dei suoi piani tangenti che passano per un punto arbitrario dello spazio, ovvero il numero dei piani osculatori alla curva cuspidale della sviluppabile, passanti per un punto arbitrario dello spazio.

Caso particolare della superficie sviluppabile è il *cono.* Tale superficie è generata dal movimento di una retta di cui uno dei punti sia fisso.

Supposto che la curva sezione del cono con un piano sia una curva algebrica di ordine n, anche il cono si dice algebrico, ed n si dice il suo *ordine. Classe* del cono è la classe della curva sezione.

Superficie gobba o rettilinea è quella generata dal movimento di una retta due posizioni consecutive della quale non sieno generalmente in uno stesso piano.

Una superficie gobba dell'ordine n è anche della classe n e viceversa (Cayley, *Camb. Math. Journ.* VII, 1852).

I punti in cui si incontrano due generatrici non consecutive della superficie gobba formano anche in questo caso una *curva doppia o nodale* della superficie.

I piani passanti per due generatrici non consecutive di una superficie gobba sono bitangenti per

la superficie. Essi inviluppano una superficie sviluppabile che si dice sviluppabile bitangente della superficie gobba data.

La classe della sviluppabile bitangente di una superficie gobba è eguale all'ordine della curva doppia (CAYLEY).

Consideriamo ora alcune relazioni fondamentali riguardanti *una superficie generale di ordine n, senza singolarità* (v. § 4). Insieme alla superficie generale si considerano le altre due superficie sviluppabili inviluppate dai piani bitangenti alla superficie, e dai piani stazionari.

Indichiamo con:

n l'ordine della superficie,

a l'ordine del cono circoscritto alla superficie col vertice in un punto arbitrario dello spazio,

δ il numero delle generatrici doppie di tal cono,

$\varkappa$ il numero delle generatrici di regresso di tal cono,

n' la classe della superficie,

a' la classe di una sua sezione piana,

δ' il numero delle tangenti doppie di questa,

$\varkappa'$ il numero delle sue tangenti di flesso,

b' la classe della superficie sviluppabile inviluppata dai piani bitangenti della superficie,

k' il numero dei piani doppi apparenti di tale superficie sviluppabile, cioè il numero delle intersezioni di due dei suoi piani, le quali si trovano in un piano arbitrario dato,

t' il numero dei piani tritangenti della superficie,
q' l'ordine della sviluppabile dei piani bitangenti,
ρ' l'ordine della curva dei punti di contatto dei piani bitangenti,
c' la classe della sviluppabile dei piani tangenti stazionari della superficie,
h' il numero dei piani doppi apparenti di questa,
r' l'ordine di questa stessa superficie,
β' il numero dei piani comuni alle due superficie sviluppabili, (quella dei piani bitangenti, e quella dei piani stazionari), e che sieno anche stazionari per quest'ultima superficie,
γ' il numero dei piani comuni alle stesse superficie sviluppabili, ma che sieno anche stazionari per la prima superficie,
σ' l'ordine della curva parabolica.

Si hanno allora le seguenti relazioni:

$$a = a' = n(n-1),$$

$$\delta = \frac{1}{2} n(n-1)(n-2)(n-3),$$

$$\varkappa = n(n-1)(n-2),$$

$$n' = n(n-1)^2,$$

$$\delta' = \frac{1}{2} n(n-2)(n^2-9),$$

$$\varkappa' = 3n(n-2),$$

$$b' = \frac{1}{2} n(n-1)(n-2)(n^3-n^2+n-12),$$

$$k' = \frac{1}{8} n (n-2) (n^{10} - 6 n^9 + 16 n^8 - 54 n^7 +$$
$$+ 164 n^6 - 288 n^5 + 547 n^4 - 1058 n^3 +$$
$$+ 1068 n^2 - 1214 n + 1464),$$
$$t' = \frac{1}{6} n (n-2) (n^7 - 4 n^6 + 7 n^5 - 45 n^4 +$$
$$+ 114 n^3 - 111 n^2 + 548 n - 960),$$
$$q' = n (n-2) (n-3) (n^2 + 2 n - 4),$$
$$\rho' = n (n-2) (n^3 - n^2 + n - 12),$$
$$c' = 4 n (n-1) (n-2),$$
$$h' = \frac{1}{2} n (n-2) (16 n^4 - 64 n^3 + 80 n^2 - 108 n +$$
$$+ 156),$$
$$r' = 2 n (n-2) (3 n - 4),$$
$$\beta' = 2 n (n-2) (11 n - 24).$$
$$\gamma' = 4 n (n-2) (n-3) (n^3 + 3 n - 16),$$
$$\sigma' = 4 n (n-2).$$

Due superficie di ordini n_1 e n_2 si segano secondo una curva storta di ordine $n_1 n_2$.

Tutte le superficie di ordine n che passano per

$$N(n) - 1 = \binom{n+3}{3} - 2$$

punti dati arbitrariamente nello spazio, si segano secondo una stessa curva gobba d'ordine n^2.

Ogni superficie di ordine n che passa per

$N(n) - 1$ *punti arbitrari di una curva gobba di ordine* n^2 *intersezione completa di due superficie d'ordine* n, *contiene per intero questa curva.*

Data una curva gobba d'ordine μ, *per essa si può sempre far passare una superficie d'ordine* n, *purchè sia*

$$N(n) > n\mu,$$

perchè allora prendendo sulla curva arbitrariamente $n\mu + 1$ *punti, ogni superficie d'ordine* n *passante per essi conterrà interamente la curva d'ordine* μ.

Il numero delle condizioni semplici cui corrisponde, per una superficie d'ordine n, *il passare per la curva d'ordine* μ, *ha per limite superiore il numero*

$$n\mu + 1.$$

Per una curva di genere zero (v. § 4) tal numero di condizioni è esattamente $n\mu + 1$.

Per una curva di genere 1 *(curva ellittica), tal numero di condizioni è* $n\mu$ (HERMITE, *Crelle*, LXXXII).

Per una curva di genere p ($\leqq \mu - 3$), *tal numero di condizioni semplici è* $n\mu + 1 - p$ (LINDEMANN, *Crelle*, LXXXIV; HALPHEN, *J. École polyt.* LII, pag. 15).

Se la curva è intersezione completa di superficie degli ordini n_1, n_2, *allora le condizioni semplici corrispondenti, per una superficie di ordine* n, *alla condizione di passare per la curva sono ancora in numero di*

$$n\mu + 1 - p$$

qualunque sia p, purchè sia

$$n \geqq n_1 + n_2 \quad 3;$$

in altro caso, ponendo

$$n = n_1 + n_2 - \delta$$

il richiesto numero di condizioni è sempre

$$n \mu + 1 - p + \frac{(\delta - 1)(\delta - 2)(\delta - 3)}{6}$$

(v. Halphen, op. cit. pag. 18).

La curva gobba intersezione completa di due superficie d'ordini n_1, n_2 è individuata da

$$N(n_1) - N(n_1 - n_2) - 1$$

punti dati ad arbitrio nello spazio.

Se la linea d' intersezione di due superficie di ordine n contiene una curva di ordine $n\,p$ la quale è situata per intero su di una superficie di ordine p, la rimanente parte è una curva d'ordine $n(n-p)$ situata su di una superficie d'ordine $n - p$ (Poncelet, 1830).

Tutte le superficie d'ordine n che passano per $N(n) - 2$ punti dati ad arbitrio nello spazio, passano per altri $n^3 - N(n) + 2$ punti individuati dai primi.

Tre superficie di ordini n_1, n_2, n_3 si tagliano in $n_1\, n_2\, n_3$ punti, di cui alcuni sono determinati dagli altri; propriamente:

Se $n_1 \geqq n_2 + n_3$ saranno arbitrari

$$\frac{1}{2}\, n_2\, n_3\, (2\, n_1 - n_2 - n_3 + 4) - 1$$

punti, e gli altri saranno determinati da questi.

Se invece è $n_1 < n_2 + n_3$, *ma* $n_1 > n_2$, $n_1 > n_3$ *saranno arbitrari*

$$\frac{1}{2} n_2 n_3 (2 n_1 - n_2 - n_3 + 4) + N (n_2 + n_3 - n_1 - 4)$$

punti. Queste formole non valgono per $n_2 = n_3$ (JACOBI, *Crelle*, XV).

Se degli n^3 *punti comuni di tre superficie di ordine* n, $n^2 p$ *stanno su di una superficie di ordine* p, *gli altri* $n^2 (n - p)$ *staranno su di una superficie di ordine* $n - p$ (PONCELET).

Tre superficie di ordini n_1, n_2, n_3 *le quali hanno in comune una curva d'ordine* n *e di classe (rango)* r, *si segano ulteriormente in*

$$n_1 n_2 n_3 - n (n_1 + n_2 + n_3 - 2) + r$$

punti.

Se la curva è doppia per la prima superficie (v. § 4) il numero dei punti comuni è

$$n_1 n_2 n_3 - n (n_1 + 2 n_2 + 2 n_3 - 4)$$

(v. SALMON-FIEDLER, *Geom. d. Raumes*, II, 146, 3.ª ediz.).

Se un punto comune a tre superficie di ordini n_1, n_2, n_3 *è multiplo* (v. § 4) *di ordini* λ, μ, ν *per esse rispettivamente, è condizione necessaria e sufficiente che in quel punto sieno raccolte* $\lambda \mu \nu$ *delle* $n_1 n_2 n_3$ *intersezioni, che i coni tangenti alle tre superficie nel punto comune, non abbiano alcuna generatrice comune.* Una dimostrazione rigorosa di questo teorema (estensione di altro simile per le curve piane, v. p. es. il lavoro di Voss citato

a pag. 200 di questo volume) si propose di darla Berzolari (*Ann. di mat.* XXIV).

Di teoremi sulle intersezioni di superficie si occuparono Poncelet (*Prop. project.*, etc. II), Jacobi (*Crelle*, XV), Plücker (*Id.*, XVI, XIX), Cayley (*Papers*, I, 259), Reye (*Math. Ann.*, II), etc., etc.

A proposito di tali ricerche sono interessanti quelle relative ai casi in cui le superficie abbiano in comune punti o linee multiple.

Risultati su ciò son dovuti a Cayley nella sua Mem. sulla trasf. birazionale dello spazio (*Proc. math. Soc.* III, 1870) colle sue formole cosiddette di *equivalenza e di postulazione.* Indi se ne occuparono Noether (*Ann. di mat.* V) e altri.

Si possono enunciare per le superficie e curve storte, teoremi che sono da reputarsi estensioni di quei che costituiscono i fondamenti della teoria dei gruppi di punti su di una curva piana.

Sia data una superficie generale F_n di n^{mo} ordine. Due curve R, R' che insieme formano l'intersezione completa di F_n con un'altra superficie, si dicono *residuali*, e l'una il *resto* dell'altra. Due curve si dicono poi *corresiduali*, se ciascuna è residuale rispetto ad un'altra medesima curva. Analoghe definizioni per i gruppi di punti segati da superficie su di una curva storta.

Si possono enunciare allora *i teoremi del resto (Restsätze)* per le superficie e per le curve gobbe:

Se su di una superficie, due curve R, R' sono residuali ad una medesima curva R'' e quindi

corresiduali fra loro, e se R è residuale ad un'altra curva R'', anche R' sarà residuale ad R''.

Sia una curva R data come intersezione di due superficie F, Φ, e sia R' una CURVA-RESTO *di R; le superficie passanti per R' taglino R in gruppi di punti corresiduali ad un altro dato gruppo; mutando F, Φ e R' e lasciando inalterato solo R, il sistema dei gruppi di punti resta inalterato.*

Le ricerche di questo genere *(la geometria su di una superficie algebrica)* di cui la prima idea è dovuta a CLEBSCH, furono fatte specialmente da NOETHER (*Math. Ann.* II, VIII); negli ultimi tempi se ne sono occupati principalmente CASTELNUOVO e ENRIQUES in varie pubblicazioni.

Una esposizione dei risultati ottenuti si può vedere in un lavoro degli stessi ultimi autori nei *Math. Ann.* XLVIII.

Le prime ricerche sulla teoria delle superficie datano dai tempi di EULERO, a cui si devono anche i fondamenti della teoria delle superficie sviluppabili.

Trattati sistematici sulla teoria delle superficie dal punto di vista della geometria superiore, non ne esistono molti. Riserbandoci di citare ai luoghi opportuni le memorie speciali, ricorderemo qui solo, come opere fondamentali, il libro di CREMONA (*Prelim. di una teoria geom. delle sup.* Bologna, 1866; trad. in tedesco da CURTZE, Berlin, 1870) e il libro di SALMON sulla *Geometria analitica dello spazio* (trad. in tedesco da FIEDLER, 3.ª ediz. Leipzig, 1880). Si noti che nella tradu-

zione tedesca del libro di CREMONA sono aggiunti moltissimi altri paragrafi che non figurano nel testo originale; per molti argomenti bisognerà intendere dunque citato sempre il testo tedesco.

§ 2. — RAPPRESENTAZIONE ANALITICA DELLE CURVE STORTE. LE SUPERFICIE MONOIDI DI CAYLEY.

Un problema interessante nella teoria delle curve storte algebriche è quello sulla rappresentazione analitica di tali curve.

Se le coordinate di un punto della curva sono assegnate in funzione di un parametro, allora il problema è risoluto, ma tale esprimibilità è rare volte agevole.

L'idea di rappresentare la curva mediante le equazioni di due superficie passanti per essa, è naturalmente la più naturale che si presenta; ma è facile riconoscere l'esistenza di curve che non sono *intersezioni complete* di due superficie; quindi la precedente rappresentazione cade in difetto come quella che non può servire ad *individuare* in generale la curva storta.

Allora si pensò di individuare la curva mediante le equazioni di *tre* superficie passanti per essa, le quali non avessero altri punti in comune. Però si è riconosciuto che in generale *tre* superficie non bastano, e, come conseguenza di un teorema di KRONECKER (*Crelle*, XCII) nella teoria delle funzioni algebriche, si trova che per individuare una

curva generale possono occorrere fino alle equazioni di *quattro* superficie. Il VAHLEN trovò (*Crelle*, CVIII) il seguente esempio al proposito: Supponiamo che l'intersezione di due superficie F_μ, F_ν di ordini μ, ν, si scinda in due curve R_m^p, $R_{m'}^{p'}$, di ordini m, m', e di genere p, p'. * Il numero dei punti d'intersezione delle due curve è

$$s = m(\mu + \nu - 4) - 2(p - 1).$$

Si conduca una nuova superficie F_ϱ solo per R_m^p; questa sarà tagliata da $R_{m'}^{p'}$ in

$$S = \mu\nu\varrho - m(\mu + \nu + \varrho - 4) + 2(p - 1)$$

punti che sono su tutte tre le superficie, ma non su R_m^p.

Ora per una data R_m^p non sarà possibile in generale determinare tre superficie in modo che S si annulli; infatti consideriamo una quintica di genere zero R_5^o avente una quadrisecante; se S dovesse annullarsi, poichè per R_5^o non passa alcuna superficie di 2.° ordine, dovrebbe essere $\mu = \nu = \varrho = 3$; ma da tre superficie di 3.° ordine non può essere determinata isolatamente la R_5^o perchè è facile vedere che ogni tale superficie,

* Per la definizione di genere delle curve storte v. il § 4.

contenendo la R_5^0, viene a contenere anche la quadrisecante.

Un altro metodo per la rappresentazione di una curva storta è quello di considerare l'insieme di tutte le corde della curva stessa; introducendo le sei coordinate di rette nello spazio, il complesso delle corde sarà analiticamente rappresentato da una relazione fra tali sei coordinate; ma viceversa non ogni relazione fra le sei coordinate di rette rappresenterà in siffatto modo una curva (v. la *Geometria della retta*). Di siffatta rappresentazione si occuparono Cayley (*Quart. Journ.*, III, V, 1860, 1862) e Voss (*Math. Ann.*, XIII).

Finalmente un altro metodo di rappresentazione è quello anche di Cayley, e cosiddetto delle *superficie monoidi.*

Sieno x_1, x_2, x_3, x_4 le coordinate omogenee di un punto della curva, e dal punto $O, x_1 = x_2 = x_3 = 0$ vertice del tetraedro fondamentale proiettiamo sul piano $x_4 = 0$, la curva R_m^p di ordine m e genere p.

L'equazione della curva proiezione sia

$$f(\xi_1 \xi_2 \xi_3) = 0$$

dove supponiamo scelte le coordinate ξ in modo che

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = x_1 : x_2 : x_3.$$

Si hanno allora le relazioni

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \xi_1 : \xi_2 : \xi_3 : \frac{\psi_n(\xi)}{\psi_{n-1}(\xi)}$$

dove le ψ sono funzioni razionali intere delle ξ di ordine n e $n-1$ rispett.

La curva R_m^p appare allora anche come intersezione delle due superficie

$$f_m(x) = 0 \quad \text{e} \quad x_4 \psi_{n-1}(x) - \psi_n(x) = 0$$

di cui la prima è un cono di m^{mo} ordine col vertice nel punto O ($x_1 = x_2 = x_3 = 0$), e la seconda è una superficie di n^{mo} ordine avente il punto O per punto $n - 1^{plo}$ (v. § 4) e che da CAYLEY fu chiamata una superficie *monoide.*

Il cono e il monoide si tagliano, oltre che in R_m^p, *anche in* $m(n-1)$ *rette passanti per* O, *le quali sono le intersezioni dei due coni* $f_m = 0$ *e* $\psi_{n-1} = 0$; *queste rette si dividono in*

$$(n-1)(m-n) + \alpha$$

rette, ciascuna contata due volte e che sono rette doppie del cono $f_m = 0$; *e in*

$$(n-1)(2n-m) - 2\alpha$$

rette le quali insieme colle precedenti sono situate sul cono $\psi_n(n) = 0$.

I due coni $\psi_n = 0$ e $\psi_{n-1} = 0$ si chiamano rispettivamente *cono superiore e inferiore* del monoide.

Se R_m^p *non è curva piana, sarà sempre*

$$n \geqq \frac{1}{2} m;$$

del resto l'ordine del monoide non è determinato, potendo un monoide sostituirsi con un altro di ordine diverso.

Questo artifizio fu esposto da Cayley (*Compt. Rend.* 1862), e servì poi a vari autori (Noether, Halphen, Weyr, etc.) nei loro studi sulle curve storte.

§ 3. — Classificazione delle curve storte.

Al problema della rappresentazione analitica di una curva storta è intimamente legato quello della classificazione delle medesime, giacchè per le curve storte non sussiste più, come per le curve piane, o per le superficie, il fatto che basta l'ordine a caratterizzare la specie di curva; infatti già per l'ordine 4, esistono due curve diverse caratterizzate da proprietà affatto distinte, come fu riconosciuto da Salmon (*Camb. Journ.* V, 1850) e poi da Steiner (*Fläch. 3.ter Grad.*, *Crelle*, LIII, 1856).

Il problema di cui parliamo si può enunciare nettamente nel seguente modo:

Enumerare, definire e distinguere tra loro le diverse famiglie di curve del medesimo grado, in modo che ciascuna famiglia non possa giammai essere caso particolare d' un' altra più generale.

In queste ricerche non si considerano che curve senza punti singolari, (v. § 4) ammettendo come postulato che ogni curva a punti singolari è caso particolare di una curva dello stesso ordine senza punti singolari. V. Halphen, sottocit.

Di questo problema si occuparono specialmente Halphen e Noether in due Memorie le quali furono premiate col premio Steiner dall'Accademia

di Berlino nel 1882 (v. *Journ. de l'École polyt.*, cahier LII, 1882; *Berlin. Abhand.*, 1883; *Crelle*, XCIII), ai quali lavori ne seguirono degli altri fra cui quello di VALENTINER (*Acta Math.* II), di NOETHER (*Id.*, VIII) etc.

Queste ricerche non giungono ancora a risolvere il problema in tutta la sua generalità, ma solo per casi speciali.

Stabilito che l'ordine solo non basta per caratterizzare una curva storta, vien l'idea di introdurre altri numeri che potrebbero chiamarsi *caratteristici*, e che insieme all'ordine possano caratterizzare la curva. La prima idea che si presenta (dalla considerazione delle due specie di quartiche storte) è di considerare, insieme all'ordine, il numero h dei *punti doppi apparenti*, (cioè il numero delle corde che possono condursi alla curva da un punto *arbitrario* dello spazio).

Ma si trova che per l'ordine eguale a 9, esistono due curve *diverse*, e in cui il numero dei punti doppi è il medesimo ($h = 18$). Queste due curve si possono però distinguere fra loro per un altro numero che HALPHEN indicò colla lettera n, e *che è l'ordine minimo dei coni che contengono tutte le h corde che da un punto arbitrario dello spazio possono condursi alla curva*, inquantochè *per l'una è* $n = 4$ *e per l'altra è* $n = 5$. Ma HALPHEN stesso si accorse che per il 15.^{mo} ordine si trovano due curve diverse per le quali è però sempre $h = 63$, $n = 9$.

Inoltre CAYLEY (*Crelle*, CXI; *Math. Pap.*, V. 613) fece osservare che in certi casi nei quali HALPHEN avea trovato una curva, tale curva non

può effettivamente esistere se non per speciali configurazioni delle h linee nodali; p. es. per le curve di 9.° ordine per le quali è $h=16$ e $n=4$, Cayley trovò che per la loro esistenza non basta che le 16 linee nodali sieno situate su di un cono quartico, ma che stieno contemporaneamente su due; onde oltre che i tre numeri (ord $= d$, h, n) non bastano in generale per individuare la curva, c'è da aggiungere anche la ricerca delle condizioni perchè la curva avente quei tali numeri caratteristici, sia effettivamente esistente.

Esporremo ora i principali teoremi trovati da Halphen e altri.

Le curve di grado d, con h punti doppi apparenti, formano una sola famiglia se h è compreso fra

$$\frac{(d-1)(d-2)}{2} \quad e \quad \frac{(d-2)(d-3)}{2}+1.$$

Il massimo valore di h è $\frac{(d-1)(d-2)}{2}$, e il minimo è il numero intero massimo contenuto in $\left(\frac{d-1}{2}\right)^2$.

Però non si può scegliere arbitrariamente h fra tali limiti, epperò per un dato d la serie degli h presenta lacune; non presenta invece più lacune a partire dal massimo intero contenuto in

$$\frac{(d-1)(d-2)}{3}$$

in poi.

Le curve di ordine d, per le quali è h inferiore al massimo intero contenuto in $\frac{(d-1)(d-2)}{3}$, *sono situate su superficie di 2.° grado; se h è maggiore di tal numero le curve corrispondenti stanno su di una superficie cubica; se h è maggiore di* $3\frac{(d-2)^2}{8}$, *le curve corrispondenti stanno su superficie di quart' ordine, etc.*

Ogni curva di ordine d, per la quale il numero n (v. sopra) è minore di $\frac{2}{3}(d-3)$, *è situata su di una superficie di 2.° ordine.*

Ogni curva di ordine d, non situata su di una quadrica, e per la quale è $n < \frac{3}{4}(d-4)$ *è situata su di una superficie cubica; se è* $n < \frac{4}{5}(d-5)$ *la curva è situata su di una superficie di 4.° ordine, se non è già situata su superficie di 2.° o 3.° ordine; se è* $n < \frac{5}{6}(d-6)$ *e la curva non è situata su superficie di ordine inferiore, essa è situata su superficie di 5.° ordine.*

Le seguenti tabelle danno, per ciascun ordine d, il numero delle famiglie di curve esistenti; queste tabelle le riproduciamo dal lavoro citato di HALPHEN, però ci limitiamo solo ai primi casi, tantopiù che i risultati di Halphen non sono completamente sicuri; per il caso del nono ordine la tabella di HALPHEN deve essere p. es. corretta nel modo indicato da CAYLEY (*Papers*, V, pag. 616). Per la definizione di *genere* vedi il § 4:

1) *curve* STORTE, *non degenerate*, *di 2.° ordine non ne esistono ;*

2) *ordine* $d = 3$ — *Esiste* UNA SOLA *famiglia di cubiche storte; il numero dei punti doppi apparenti è* $d = 1$; *il genere è* $p = 0$;

3) *ordine* $d = 4$ — *Esistono* DUE *famiglie di quartiche storte; esse si differenziano per il numero dei punti doppi apparenti che sono rispettivamente 2 e 3. I loro generi sono rispettivamente 1 e 0;*

4) *ordine* $d = 5$ — *Esistono* TRE *famiglie di quintiche storte.*

Nella seguente tabella sono indicati i valori corrispondenti di h, n, gli ordini minimi delle superficie dalle cui intersezioni risultano quelle curve, le curve complementari risultanti dalle intersezioni di quelle superficie, e finalmente il massimo genere p delle curve di ciascuna famiglia :

$d = 5$	$h =$	$n =$	Ordini minimi delle superf. ecc.	Curve complementari	$p =$
	4	2	2 e 3	una retta	2
	5	2	3 e 3	una quartica storta con 3 punti doppi apparenti	1
	6	3	3 e 3	due coniche	0

Tutte siffatte curve sono determinate da 20 condizioni.

Il SALMON nella *Geom. des Raumes* II, distingue quattre famiglie di quintiche; però la quarta è da considerarsi un caso particolare della terza (vedi HALPHEN, *Ec. polyt.* LII, pag. 12 nota);

5) *ordine* $d=6$ — *Esistono* CINQUE *famiglie di sestiche storte. Il numero delle costanti di tutte tali curve è 24, cioè ciascuna di esse è determinata da 24 condizioni.*

La tabella corrispondente è la seguente:

$d=6$	$h=$	$n=$	Ordini minimi delle superf. ecc.	Curve complementari	$p=$
	6	2	2 e 3	0	4
	7	3	3 e 3	cubica storta	3
	8	3	3 e 3	una retta e una conica	2
	9	3	3 e 3	tre rette	1
	10	4	3 e 4	un'altra sestica della medesima famiglia	0

6) *ordine* $d = 7$. *Esistono* SETTE *famiglie di curve storte di 7.mo ordine. Il numero delle loro costanti è sempre 28.*

$d = 7$	$h =$	$n =$	Ordini minimi delle superf. ecc.	Curve complementari	$p =$
	9	3	2 e 4	una retta	6
	10	3	3 e 3	una conica	5
	11	4	3 e 3	due rette	4
	12	4	3 e 4	una sestica storta con 6 punti doppi apparenti	3
	13	4	4 e 4	curva storta di nono ordine	2
	14	4	4 e 4	curva storta di nono ordine	1
	15	5	4 e 4	curva storta di nono ordine	0

In tutti questi casi, come si vede, basta il numero h per caratterizzare la curva; è dal nono ordine, come abbiamo già detto, che comincia a verificarsi il fatto che il numero h non basta più per tale scopo

In corrispondenza a questo fatto si verificherà anche l'altro che, per l'ordine $d = 9$, vi saranno due famiglie di curve *aventi il medesimo genere p*

massimo (propriamente $p = 10$) e da considerarsi come distinte.

Per le particolarità riguardanti specialmente le secanti multiple relative alle varie famiglie di curve sopra enumerate, rimandiamo a Noether (op. cit.; p. es. *Crelle*, XCIII, pag. 310).

Prima di terminare questo paragrafo vogliamo aggiungere che si è anche immaginato da alcuni di classificare le curve storte secondo la natura della superficie sviluppabile corrispondente. Di ciò si occuparono Chasles (*Comp. Rend.* t. LIV) e Schwarz (*Crelle*, LXIV).

§ 4. — Punti singolari di superficie e curve gobbe. — Loro numeri caratteristici. — Secanti multiple delle curve gobbe. — Genere. — Formole di Cayley. — Contatti di superficie.

Se un punto di una superficie è tale che ogni retta passante per esso incontra ivi la superficie in due punti coincidenti, quel punto si dirà *doppio* per la superficie.

Vi sono infinite rette che, passando per il punto doppio P, hanno ivi un contatto tripunto colla superficie (tre intersezioni infinitamente vicine). Il luogo di queste rette è un cono di 2.° ordine, di cui ogni piano tangente sega la superficie secondo una curva che ha una cuspide in P.

Questo cono può scindersi in due piani distinti o in due piani coincidenti; si hanno allora tre

sorta di punti doppi; *punto conico, punto biplanare, punto uniplanare.*

Se $F = 0$ è in coord. omogenee, l'equazione della superficie, la condizione perchè la superficie abbia un punto doppio è che sia zero il suo DISCRIMINANTE, *cioè il risultato dell'eliminazione delle x fra le quattro equazioni*

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x_4} = 0;$$

e le condizioni perchè un punto (x) sia doppio sono che le sue coordinate soddisfino contemporaneamente queste quattro equazioni.

Vi sono in generale sei generatrici del cono tangente, le quali hanno colla superficie un contatto quadripunto (quattro intersezioni infinitamente vicine).

Se un punto di una superficie è tale che ogni retta passante per esso incontra ivi la superficie in r punti coincidenti, quel punto si dirà r^{plo} per la superficie. Anche qui, come nel caso precedente *si può costruire un cono d'ordine r, di cui ogni generatrice ha colla superficie in quel punto $r + 1$ punti comuni (cono osculatore); in questo cono vi sono poi in generale $r(r + 1)$ generatrici aventi colla superficie $r + 2$ punti comuni.*

Una superficie d'ordine n con un punto O n^{plo} è necessariamente un cono di vertice O.

Una superficie può avere *linee multiple o singolari* cioè linee tutti i punti delle quali sieno multipli. Lungo una linea multipla d'ordine r passano r falde della superficie.

I punti di una linea multipla d'ordine r sono punti multipli d'ordine r pei quali il cono tangente di cui si è sopra parlato, si scinde in r piani.

Per $r = 2$, se i due piani tangenti coincidono si ha la *curva cuspidale* della superficie, ogni punto della quale è un punto uniplanare.

Come per le linee piane, così anche per le superficie si può definire un numero che si chiama *genere*, e che dipende in generale dal numero delle linee doppie e cuspidali della superficie, supposto che questa non abbia altre linee singolari di ordine più elevato.

Un siffatto numero fu introdotto da CLEBSCH (*Comptes Rendus*, LXVII, 1868) ed è definito, per una superficie di ordine n, come il numero dei coefficienti ancora indeterminati che restano nell'equazione di una superficie di $n - 4^{mo}$ ordine la quale passi per le linee doppie e cuspidali della superficie data.

Se questa non ha linee doppie e cuspidali, il genere è

$$p = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3}.$$

Questo numero p resta invariato per una trasformazione birazionale. Questo teorema fu annunciato da CLEBSCH (*Compt. Rend.* 1868) indi dimostrato da NOETHER (*Math. Ann.* II) e ZEUTHEN (*Id.* IV). Accanto a questo genere il NOETHER (*Id.* VIII) considerò altri due numeri che godono di analoga proprietà.

Se la superficie ha una curva doppia dell'ordine d ($\geqq 0$) e di genere π, e un certo numero finito t ($\geqq 0$) di punti tripli per essa e per la curva, il numero

$$p_n = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6} - (n-4)\,d + 2\,t + \pi - 1$$

si chiama *genere numerico* (CAYLEY, *Math. Ann.*, III). Si chiama poi *genere geometrico* p_g (detto anche *primo genere*) il numero dei coefficienti indeterminati delle superficie di ordine $n-4$, cui si è sopra accennato. *Si ha sempre* $p_g \geqq p_n$. *Se è* $p_g = p_n$, la superficie si suol chiamare *regolare.*

Per le superficie razionali (rappresentabili sul piano, v. pag. 341) *è* $p_n = p_g = 0$.

Per GENERE di una rigata si assume il genere p, delle loro sezioni piane, *queste essendo evidentemente tutte dello stesso genere. Per una rigata si ha* $p_g = 0$, $p_n = -p$.

Per un *altro carattere delle superficie* v. SEGRE (*Atti Torino*, 1896), e per altre considerazioni riguardanti i vari generi delle superficie v. CASTELNUOVO-ENRIQUES, *Math. Ann.*, XLVIII).

La superficie generale di ordine $n > 3$ *non possiede alcuna retta.*

Se una superficie di ordine n contiene una curva multipla secondo l' ordine $(n-2)$, *essa conterrà delle rette; se la curva multipla è una retta, la superficie conterrà* $2\,(3\,n-4)$ *altre rette, oltre quella.* Per una tal superficie v. NOETHER (*Math. Ann.*, III, pag. 175).

Una superficie di n^{mo} *ordine non può avere più di* $n\,(11\,n-24)$ *rette.*

Per una retta di una superf. di ord. n, passano sempre $(n + 2)(n - 2)^2$ piani, i quali toccano la superficie ancora in un altro punto fuori della retta.

Se è n l'ordine di una rigata, l'ordine della sua curva doppia (v. § 1) *è compreso fra* $(n - 2)$ *e* $\frac{1}{2}(n - 1)(n - 2)$ (CAYLEY).

Ricerche sulle relazioni che intercedono fra i numeri caratteristici e le singolarità delle superficie furono fatte da SALMON, CAYLEY, ZEUTHEN; v. SALMON-FIEDLER, *G. d. R.*, II, pag. 671.

Quando un punto di una curva gobba è tale che ogni piano passante per esso, incontra ivi la curva in due punti coincidenti, allora quel punto si dice *doppio* per la curva. *Esistono in generale due rette tangenti e due piani osculatori alla curva nel punto doppio.* Se quelle due tangenti coincidono si ha la *cuspide o il punto stazionario* della curva. *Nel punto stazionario coincidono anche i due piani osculatori della curva.*

Se due superficie si toccano in un punto P (hanno il piano tangente comune) la curva intersezione di esse ha in P un punto doppio.

Se questo punto è in particolare una cuspide si dice che *le due superficie hanno in P un contatto stazionario.*

Se la curva d'intersezione delle due superficie ha in P un punto triplo, si dice che *esse si osculano in P. In tal caso ogni piano per P taglia le due superficie secondo linee osculantesi fra loro.*

Se un punto comune a due superficie è r_1^{plo} per l'una e r_2^{plo} per l'altra, esso è multiplo d'ordine $r_1 r_2$ per la curva intersezione; se $r_1 = r_2$ e le due

superficie hanno in quel punto lo stesso cono osculatore, quel punto è invece multiplo di ordine $r(r+1)$ *per l'intersezione.*

Se due superficie hanno un contatto d'ordine $k-1$ *lungo una curva d'ordine* n, *esse si segheranno secondo un'altra curva d'ordine* $n_1 n_2 - k n$.

Il massimo numero di punti in cui due superficie di ordini n_1, n_2 *si possono toccare è*

$$\frac{1}{2} n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 4) + 1$$

Per una curva storta e per la corrispondente sviluppabile osculatrice sono interessanti le seguenti formole (dette di Cayley, *Journ. de Liouville* X, 1845; *Opere*, I, 207) le quali legano i diversi numeri caratteristici della curva e sono analoghe alle formole di Plücker (v. Cap. VI, § 1) mediante le quali possono in parte trovarsi.

(Si riscontri il § 1 per le definizioni riguardanti il sistema costituito dalla curva gobba, dalla sviluppabile osculatrice, dalla curva nodale, e dalla sviluppabile bitangente.)

Sia:

n l'ordine della curva gobba,

r la classe della curva gobba, o il suo rango,

h il numero dei punti doppi apparenti della curva, cioè il numero delle rette che da un punto arbitrario possono condursi ad incontrare due volte la curva,

y il numero dei piani che passano per un punto arbitrario dello spazio e toccano in due punti distinti la curva (bitangenti), cioè la classe della sviluppabile bitangente.

β il numero delle cuspidi (punti stazionari),
H il numero dei punti doppi,
v il numero delle tangenti d' inflessione (stazionarie) della curva (tangenti aventi comuni colla curva tre punti infinitamente vicini).

Sia poi:

m la classe della sviluppabile osculatrice alla curva,
r il suo ordine, o il suo rango,
g il numero delle rette di un piano qualsivoglia, per ciascuna delle quali passano due piani tangenti della sviluppabile, ossia la classe della congruenza delle rette intersezioni dei piani osculatori della curva (v. *Geom. della retta*).
x il numero dei punti situati in un piano qualsivoglia, per ciascuno dei quali passano due diverse generatrici della sviluppabile, ossia l'ordine della curva nodale,
α il numero dei piani stazionari (piano che tocca la sviluppabile lungo due generatrici infinitamente vicine, ovvero dei piani che hanno comuni colla curva quattro punti infinitamente vicini),
G il numero dei piani bitangenti (tangenti in due punti) alla sviluppabile,
v il numero delle generatrici per ciascuna delle quali passano tre piani tangenti consecutivi (generatrici d' inflessione).
ω il numero delle generatrici doppie della sviluppabile.

Si hanno allora le seguenti relazioni (*di* CAYLEY).

$$m = r(r-1) - 2(x+\omega) - 3(n+v)$$
$$n = r(r-1) - 2(y+\omega) - 3(m+v)$$
$$r = m(m-1) - 2(g+G) - 3\alpha =$$
$$= n(n-1) - 2(h+H) - 3\beta$$
$$\alpha = 3r(r-2) - 6(x+\omega) - 8(n+v)$$
$$\beta = 3r(r-2) - 6(y+\omega) - 8(m+v)$$
$$n+v = 3m(m-2) - 6(g+G) - 8\alpha$$
$$m+v = 3n(n-2) - 6(h+H) - 8\beta$$

che corrispondono a *sei* indipendenti.

Si dice *genere* di una curva gobba o della sua sviluppabile osculatrice il numero definito dalle seguenti formole:

$$p = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - (h+H+\beta)$$
$$= \frac{1}{2}(r-1)(r-2) - (y+\omega+m+v)$$
$$= \frac{1}{2}(m-1)(m-2) - (g+G+\alpha)$$
$$= \frac{1}{2}(r-1)(r-2) - (x+\omega+n+v).$$

Introducendo ora queste altre caratteristiche:

k il numero dei punti doppi apparenti della curva nodale,

λ il numero delle rette tangenti e secanti altrove la curva data,

τ il numero dei punti tripli della curva nodale, o dei punti tripli della sviluppabile, o il numero dei punti d'incontro di tre tangenti (non infinitamente vicine) della curva data,

λ' il numero dei piani osculatori e tangenti altrove alla curva data,

τ' il numero dai piani tritangenti della curva data,

R il rango o la classe della curva nodale,

p' il genere della stessa,

si hanno le seguenti altre relazioni:

$$\lambda = n(r+4) - 6(r+\beta) - 4(\omega + H) - 2v$$

$$\tau = \frac{1}{3}[(x - m - 3n - 3v - 2\omega)(r-2) + 8m + \\ + 20v + 10\beta + 18\omega]$$

$$\lambda' = m(r+4) - 6(r+\alpha) - 4(\omega + G) - 2v$$

$$\tau' = \frac{1}{3}[(y - n - 3m - 3v - 2\omega)(r-2) + 8n + \\ + 20v + 10\alpha + 18\omega]$$

$$R = rm + 6r - 3n - 9m - 3v - 2G$$

$$k = \frac{1}{8}[r^4 - 6r^3 + 11r^2 + 66r - \\ - 2r(r-5)(m + 3n + 3v + 2\omega) + \\ + (m + 3n + 3v + 2\omega)^2 - \\ - 58m - 126n - 126v - 76\omega - 24H)$$

$$p - p'(r - 14) = \frac{1}{2}(r-5)(r-6) - (\omega + G + H).$$

Queste formole furono considerate da SALMON (*Trans. R. I. Acad.* XXIII, 1857), CAYLEY (*Quart. Journ.* XI; *Op.* VIII. 72), CREMONA (trad. tedesca dei *Preliminari*, cap. IV), ZEUTHEN (*Ann. di mat.* III). Esse si trovano anche riportate in SALMON-FIEDLER (*An. Geom. d. R.* II, pag. 660 e seg., 3.ª edizione). *

---

* Poichè i vari autori hanno adoperato simboli diversi per indicare le caratteristiche, sarà qui utile, per comodità del lettore, porre, nella seguente tabella, in relazione fra loro le diverse notazioni adoperate:

Notazioni di Cayley	Notazioni di Cremona	Notazioni di Salmon	Notazioni nostre
m	ν	m	n
n	μ	n	m
r	ρ	r	r
α	α	α	α
β	β	β	β
υ	θ	θ	v
g	γ	g	g
h	8	h	h
Δ	γ	G	G

Alla curva storta di ordine $n_1 n_2$ intersezione completa di due superf. di ordini n_1, n_2 le quali si toccano semplicemente in δ punti, e hanno γ contatti stazionari, corrispondono le seguenti ca-

Notazioni di Cayley	Notazioni di Cremona	Notazioni di Salmon	Notazioni nostre
H	$\aleph'$	D	H
x	ξ	x	x
y	η	y	y
ω	ω	d	ω
k	$\varkappa$	k	k
γ	λ	γ	λ
γ'	λ_1	γ'	λ'
t	τ	t	τ
t'	τ_1	t'	τ'
D_x		p^*	p'
q		R	R

ratteristiche:

$$p = \frac{1}{2} n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 4) - (\delta + \chi - 1)$$

$$m = 3 n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 3) - 6 \delta - 8 \chi$$

$$r = n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2) - 2 \delta - 3 \chi$$

$$h = \frac{1}{2} n_1 n_2 (n_1 - 1)(n_2 - 1)$$

$$g = \frac{1}{2} n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 3) [9 n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 3) - 6 (6 \delta + 8 \chi) - 22] + \frac{5}{2} n_1 n_2 + (3 \delta + 4 \chi)(6 \delta + 8 \chi + 7)$$

$$y = \frac{1}{2} n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2) [n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2) - 2 (2 \delta + 3 \chi) - 10] + 4 n_1 n_2 + \frac{1}{2} (5 \delta + 3 \chi)^2 + 10 \delta + \frac{27}{2} \chi$$

$$x = \frac{1}{2} n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2) [n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2) - 2 (2 \delta + 3 \chi) - 4] + \frac{1}{2} (2 \delta + 3 \chi)^2 + 4 \delta + \frac{11}{2} \chi .$$

$$\alpha = 2 n_1 n_2 (3 n_1 + 3 n_2 - 10) - 3 (4 \delta + 5 \chi)$$

$$\beta = \chi$$

$$H = \delta$$

$$G = 0$$

$$v = 0$$

$$\omega = 0.$$

Se due superficie di ordini $n_1 n_2$ si segano secondo due curve (complementari) di ordini n, n', di classi r, r', aventi rispett. h, δ; h' δ' punti doppi apparenti e effettivi, χ, χ' cuspidi, indicando con k il numero delle loro intersezioni apparenti, cioè il numero delle rette che da un punto dello spazio possono condursi a segare ambedue le curve e con i il numero delle intersezioni effettive, si hanno le relazioni:

$$h + h' + k = \frac{1}{2}(n + n')(n_1 - 1)(n_2 - 1)$$

$$r - r' = (n - n')(n_1 n_2 - 1) - 2(h - h') - \\ - 2(\delta - \delta') - 3(\chi - \chi')$$

$$(n_1 + n_2 - 2)\, n = r + i + 2\delta + 3\chi$$

$$(n_1 + n_2 - 2)\, n' = r' + i + 2\delta' + 3\chi'$$

donde anche

$$n\,(n_1 - 1)(n_2 - 1) = 2h + k$$

$$n'\,(n_1 - 1)(n_2 - 1) = 2h' + k.$$

Per una curva gobba descritta su di un iperboloide la quale incontri in α_1 e α_2 punti rispett. ciascuna generatrice del primo e secondo sistema dell' iperboloide, ed è dotata di δ punti doppi e χ cuspidi, si hanno i seguenti numeri caratteristici:

$$r = 2\alpha_1 \alpha_2 - 2\delta - 3\chi;$$

$$m = 6\alpha_1 \alpha_2 - 3(\alpha_1 + \alpha_2) - 6\delta - 8\chi;$$

$$y = \frac{1}{2}[2(\alpha_1 \alpha_2 - \delta) - 3\chi]^2 - 10(\alpha_1 \alpha_2 - \delta - \chi) + \\ + 4(\alpha_1 + \alpha_2) - \frac{7}{2}\chi;$$

$$h = \frac{1}{2}[\alpha_1(\alpha_1 - 1) + \alpha_2(\alpha_2 - 1)]$$

$$y = \frac{1}{2}[6(\alpha_1\alpha_2 - \delta) - 3(\alpha_1 + \alpha_2) - 8\chi]^2 - 22\alpha_1\alpha_2 + \\ + \frac{27}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) + 2(11\delta + 14\chi)$$

$$x = \frac{1}{2}[2(\alpha_1\alpha_2 - \delta) - 3\chi]^2 - 4(\alpha_1\alpha_2 - \delta) + \frac{11}{2}\chi$$

$$\alpha = 4[3\alpha_1\alpha_2 - 2(\alpha_1 + \alpha_2)] - 3(4\delta - 5\chi).$$

Se in particolare la curva gobba è l'intersezione completa dell'iperboloide con una superficie generale dell'ordine μ, *basterà in queste formole porre* $\alpha_1 = \alpha_2 = \mu$, *per ricavarne i numeri caratteristici pel nuovo caso.*

Una curva gobba descritta su di un iperboloide, la quale incontri in α_1 *e* α_2 *punti rispett. ciascuna generatrice del 1.° e 2.° sistema, non può avere più di*

$$\alpha_1\alpha_2 - \alpha_1 - \alpha_2 + 1$$

punti doppi e cuspidi. Per $\alpha_1 = \alpha_2 = \mu$ si ha il teorema corrispondente al caso in cui la curva sia intersezione completa dell'iperboloide con una superficie di ordine μ.

I precedenti teoremi possono ottenersi mediante la cosiddetta rappresentazione piana dell'iperboloide (v. § 7).

Siano n e p l'ordine e il genere (v. sopra) di una superficie rigata algebrica; ν e π l'ordine e il genere di una curva algebrica tracciata sulla rigata e che sia curva semplice per questa; sia k il

numero dei punti d' incontro della curva con ciascuna generatrice della rigata, e δ il numero dei suoi punti doppi; *si ha allora la relazione rimarchevole*

$$(k-1)\nu - \pi - \delta = \frac{k(k-1)}{2} n - k(p-1) - 1.$$

Per il caso in cui la rigata è un cono questa formola fu trovata da Sturm (*Math. Ann.* XIX, 487); per il caso generale la formola si trova in Segre (*Lincei.* 1887; *Math. Ann.*, XXXIV).

Alle formole di questo paragrafo, sono affini quelle riguardanti le rette che incontrano una curva storta in più di due punti *(secanti multiple)*, o che incontrano due o più curve storte.

Le secanti triple di una curva storta di ordine n, con h punti doppi apparenti, formano una superficie rigata di ordine

$$(n-2)\left(h - \frac{n(n-1)}{6}\right).$$

Questa formola fondamentale si trova per la prima volta in Zeuthen (*Ann. di mat.* 1870); indi in Picquet (*Bull. de la Soc. math.* I, pag. 268, 1872), in Schubert (*Kalkül der abz. Geom.* Leipzig, 1879, § 43), in Geiser (*Collect. math.*, etc. Milano, 1881) e in Berzolari (*Rend. Palermo.* IX, 1895).

Il numero delle quadrisecanti di una curva gobba di ordine n con h punti doppi apparenti è

$$\frac{1}{2} h(h - 4n + 11) - \frac{1}{24} n(n-2)(n-3)(n-13).$$

Questa formola si trova prima in Zeuthen (Op. cit.), indi in Picquet (Op. cit. e *Compt. Rend.* LXXVII, 1873) e Berzolari (Op. cit.).

Il numero delle rette trisecanti di una curva di ordine n con h punti doppi apparenti, e che incontrano un'altra curva di ordine n' avente colla prima un numero di punti comuni eguale ad i, è

$$n'(n-2)\left(h - \frac{1}{6} n(n-1)\right) - i(h - n + 2).$$

Le rette che incontrano in due punti una curva di ordine n e con h punti doppi apparenti, e in due punti un'altra curva cui corrispondono le caratteristiche n' e h' e che ha colla prima un numero eguale ad i di punti comuni, sono in numero di

$$h h' + \frac{1}{4} n n'(n-1)(n'-1) - i(n-1)(n'-1) + \\ + \frac{1}{2} i(i-1).$$

Le rette che incontrano in due punti una curva (n, h) e in un punto ciascuna di due altre curve di ordini n', n'' aventi i', i'' punti comuni colla prima e j punti comuni fra loro, sono in numero di

$$n' n''\left(h + \frac{1}{2} n(n-1)\right) - (n-1)(i' n'' + i'' n') - \\ - h j + i' i''.$$

Le rette appoggiate a quattro curve di ordini $n_1 n_2 n_3 n_4$ tali che quelle degli ordini n_r, n_s ab-

biano i_{rs} punti comuni, sono in numero di

$$2\, n_1\, n_2\, n_3\, n_4 - \sum_1^4 n_p\, n_q\, i_{rs} + \sum i_{pq}\, i_{rs}$$

dove gli indici p, q, r, s sono tutti diversi.

Per tutte queste formole si suppone che i punti comuni alle curve sieno tutti distinti. Esse si trovano in PICQUET (*cit.*); per una correzione ad alcuni dei risultati di quest'autore si vegga GUCCIA (*Rend. Palermo*, I).

§ 5. — SUPERFICIE POLARI. SUPERFICIE COVARIANTI.

Tralasciamo di stabilire le definizioni e le proprietà fondamentali della teoria della polarità, perchè queste non sono che le analoghe di quelle stabilite al § 2 del Cap. VI pel caso delle curve piane.

Ci limiteremo solo a ciò che si presenta di nuovo nel caso delle superficie.

La prima polare di un punto qualunque O, rispetto ad una superficie, sega questa in una curva che è la curva di contatto della superficie col cono circoscritto di vertice O.

Se il polo è sulla superficie fondamentale, questa e tutte le sue superficie polari hanno ivi lo stesso piano tangente e le stesse rette osculatrici.

La quadrica polare ($(n-2)^{ma}$ superficie polare) di un punto parabolico della superficie, è un cono tangente al relativo piano tangente staziona-

rio, e la generatrice di contatto è la retta che in quel punto oscula la superficie fondamentale.

Un punto parabolico della superficie data è anche parabolico per tutte le proprie superficie polari.

Le $(n - r)^{ma}$ *polare di un punto* r^{plo} *della superficie fondamentale, è un cono d'ordine* r *col vertice nel punto, e le polari seguenti sono indeterminate. Quel cono d'ordine* r *è il luogo delle rette aventi in quel punto* $r + 1$ *punti comuni colla superficie, e le intersezioni di esso colla* $(n - r - 1)^{ma}$ *superficie polare, sono le rette (in numero di* $r(r + 1)$*) che hanno* $r + 2$ *punti infinitamente vicini comuni colla superficie.*

Il luogo dei punti i cui piani polari passano per una retta, è una curva gobba d'ordine $n - 1$. Questa curva si chiama *curva polare della retta data.*

L'inviluppo dei piani polari dei punti di una retta è una sviluppabile di classe $n - 1$, *e di ordine* $2(n - 2)$, che si chiama *la polare* $n - 1^{ma}$ *della retta.*

La linea nodale di questa sviluppabile è una curva di ordine $2(n - 3)(n - 4)$ *che è il luogo dei poli di cui le prime superficie polari sono tangenti alla retta in due punti distinti.*

L'inviluppo dei piani polari dei punti di una curva d'ordine m *è una sviluppabile di classe* $m(n - 1)$, *che è anche il luogo dei punti le cui prime superficie polari sono tangenti alla curva.*

Analogamente possono enunciarsi molti altri simili teoremi sugli inviluppi dei piani polari dei punti di una superficie, luoghi dei poli dei piani tangenti ad una superficie, ecc., ecc.

Il luogo dei punti doppi delle prime polari di una superficie F_n è una nuova superficie che si chiama la *superficie Hessiana* della data, ovvero la *Jacobiana del sistema delle prime polari.*

Il luogo dei punti le cui prime polari hanno punti doppi è una superficie detta *Steineriana* della data.

Le equazioni di queste superficie si ritroverebbero colle formole analoghe a quelle relative alle omonime curve del § 2, Cap. VI.

Altre definizioni di queste superficie sono:

L'Hessiana di F_n è il luogo di un punto i cui piani polari rispetto alle prime polari di F_n passano per uno stesso punto, ovvero:

il luogo dei punti di contatto delle prime polari di F_n, ovvero:

il luogo di un punto la cui quadrica polare rispetto ad F_n è un cono.

La Steineriana di F_n è il luogo di un punto che è il vertice di un cono di 2.° grado costituente una quadrica polare, ovvero:

l'inviluppo dei piani polari dei punti dell' Hessiana.

L'Hessiana è di ordine $4(n-2)$; *ed ha in generale* $10(n-2)^3$ *punti doppi.*

La Steineriana è una superficie di classe

$$4(n-1)^2(n-2),$$

e possiede $10(n-2)^3$ *rette, ognuna delle quali corrisponde ad un punto doppio dell' Hessiana;* cioè propriamente:

La quadrica polare di un punto doppio dell'Hessiana è costituita da una coppia di piani

passanti per la corrispondente retta della Steineriana, e il piano polare di un punto doppio della Hessiana è tangente alla Steineriana lungo la corrispondente retta.

La curva parabolica di una superficie data, (la quale è di ordine $4n(n-2)$) è l'intersezione completa della superficie colla sua Hessiana.

Se la superficie data possiede una retta semplice questa è tangente in $2(n-2)$ punti alla Hessiana, e quindi alla curva parabolica.

§ 6. — Sistemi lineari di superficie.

Se $a_x^n = 0$, $b_x^n = 0, \ldots$ sono (in notazione simbolica) le equazioni di $k+1$ superficie di ordine n, il sistema rappresentato da

$$\lambda_1 a_x^n + \lambda_2 b_x^n + \ldots = 0$$

dove $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ sono $k+1$ parametri arbitrari, costituisce ciò che si chiama *un sistema lineare di specie k.*

Per $k=1$ si ha *il fascio;* per $k=2$ *la rete.*

Tutte le superficie di un fascio hanno in comune una curva d'ordine n^2 (curva base del fascio) e tutte quelle di una rete hanno in comune n^3 punti base.

Per $k = N(n) = \binom{n+3}{3} - 1$ (v. § 1) *il sistema è costituito da tutte le superficie di ordine n dello spazio.*

Data una superficie d'ordine n, le prime polari dei punti di un piano formano una rete, e le prime polari dei punti dello spazio formano un sistema lineare di 3.ª specie.

Un sistema lineare di specie k è determinato da $k+1$ superficie dello stesso ordine che non appartengano ad un medesimo sistema lineare di specie inferiore.

Fra le superficie di un sistema lineare di specie k, ve ne sono $(k+1)(n-k)$ che hanno un contatto d'ordine k con una retta data, e ve ne sono

$$2^k \frac{(n-k)(n-k-1)\ldots(n-2k+1)}{k!}$$

ciascuna delle quali tocca k volte una retta data.

Fra le superficie di un fascio ve ne sono

$$2(n-1)$$

tangenti ad una data retta, e $3(n-1)^2$ tangenti ad un piano dato.

Fra le superficie di una rete ve ne sono $3(n-2)$ osculatrici ad una retta data,

$$\frac{3}{2}(n-1)(n-2)(3n^2-3n-11)$$

che hanno un doppio contatto con un piano dato, e $12(n-1)(n-2)$ che hanno un contatto stazionario con un piano dato.

Il luogo dei poli di un piano dato rispetto a tutte le superficie di un fascio, è una curva gobba d'ordine $3(n-1)^2$.

In un fascio di superficie ve ne sono $4(n-1)^3$ *con un punto doppio; ciascuno di questi ha il medesimo piano polare rispetto a tutte le superficie del fascio.*

Il luogo dei poli di un piano rispetto a tutte le superficie di una rete, è una superficie d'ordine $3(n-1)$.

Il luogo dei punti di contatto fra un piano e le superficie di una rete è una curva d'ordine

$$3(n-1).$$

Il luogo dei punti doppi delle superficie di una rete è una curva gobba d'ordine $6(n-1)^2$, *la quale è anche il luogo dei punti di contatto fra le superficie della rete stessa, o anche il luogo di un punto i cui piani polari rispetto alle superficie della rete passino per una stessa retta.* Questa curva prende il nome di *curva Jacobiana della rete.*

Il luogo di un punto i cui piani polari rispetto alle superficie di un sistema lineare di 3.ª specie, passano tutti per un punto è una superficie d'ordine $4(n-1)$, *che si chiama la* HESSIANA O JACOBIANA DEL SISTEMA; *essa è anche il luogo dei punti doppi delle superficie del sistema, o il luogo dei punti di contatto delle superficie dello stesso.*

Se il sistema lineare è quello delle prime polari di una superficie data, si ha la Hessiana o Jacobiana della superficie (v. § 5).

Si può definire una superficie analoga anche per il caso in cui sieno date quattro superficie, ma non dello stesso ordine, cioè non formanti un sistema lineare; propriamente:

Il luogo di un punto i cui piani polari rispetto a quattro date superficie di ordini n_1, n_2, n_3, n_4, *passano per uno stesso punto, è una superficie di ordine*

$$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 - 4,$$

che si chiama *Hessiana o Jacobiana* delle quattro superficie.

Si possono poi anche qui considerare sistemi lineari di specie k, di superficie, *fra loro in corrispondenza proiettiva*, o *proiettivi*, e studiare i luoghi generati dalle intersezioni delle superficie corrispondenti.

Per i molti teoremi su questo soggetto rimandiamo specialmente alla citata *Introduzione* di Cremona.

§ 7. — Trasformazione birazionale dello spazio, o delle superficie. — Rappresentazione piana delle superficie.

Come nel piano si può immaginare la trasformazione biunivoca fra due piani (Cremoniana) o *semplicemente* fra due curve dei due piani, senza che lo sia fra i due piani, così nello spazio, possiamo immaginare trasformazioni biunivoche fra due spazi, o *solo* fra due superficie dei due spazi. Quest' ultimo problema è quello della cosiddetta rappresentazione di una superficie su di un'altra, di cui è caso particolare la *rappresentazione piana* delle superficie.

Sieno $x_1 x_2 x_3 x_4$ le coordinate omogenee dei punti di uno spazio e $y_1 y_2 y_3 y_4$ quelle in altro spazio, e si pongano le relazioni

$$y_i \equiv f_i (x_1 x_2 x_3 x_4) \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \qquad (1)$$

dove le f sieno funzioni razionali intere omogenee di grado n; queste relazioni sieno tali che da esse si ricavino le x per mezzo delle y:

$$x_i \equiv \varphi_i (y_1 y_2 y_3 y_4) \qquad (2)$$

dove anche le φ *sieno funzioni razionali*, intere, omogenee di grado m. Una trasformazione di questa specie si dice *biunivoca*, *birazionale* o *Cremoniana; per essa i punti dei due spazi si corrispondono uno ad uno.*

Dato il punto (x), colle formole (1) si trova il corrispondente punto (y); dato il punto (y) come intersezione dei tre piani

$$\sum_1^4 \lambda_i y_i = 0, \qquad \sum_1^4 \mu_i y_i = 0, \qquad \sum_1^4 \nu_i y_i = 0,$$

i punti x corrispondenti saranno le intersezioni delle tre superficie

$$\sum_1^4 \lambda_i f_i (x) = 0, \qquad \sum_1^4 \mu_i f_i (x) = 0, \qquad \sum_1^4 \nu_i f_i (x) = 0;$$

Perchè la trasformazione sia biunivoca, bisogna che queste tre superficie abbiano UN SOL PUNTO *di intersezione variabile, tutti gli altri punti d' intersezione rimanendo fissi comunque si variino i parametri* λ, μ, ν. Di qui si ha:

Per la trasformazione biunivoca occorre che tutte le superficie del sistema lineare di 3.ª specie:

$$\sum_1^4 \rho_i f_i = 0$$

passino per $n^3 - 1$ punti fissi.

Per la trasformazione biunivoca è necessario che le superficie $f_i(x) = 0$ sieno di genere zero. Le coordinate dei loro punti si possono esprimere in funzione razionale di due parametri. Tali superficie furono chiamate *omaloidi* da Cremona e *unicursali* da Cayley.

L'intersezione R variabile (cioè non comune a tutte le f) di due qualunque delle superficie $f_i = 0$ è una curva razionale (di genere zero) di ordine m.

Un sistema di superficie come quello formato dalle f si suol chiamare *omaloidico.*

È da osservarsi che non si verifica più qui ciò che si verifica pel caso della trasformazione birazionale piana, che cioè i gradi m ed n devono essere eguali.

Si dicono *principali* o *fondamentali* i punti e le linee comuni a tutte le superficie del sistema omaloidico.

Delle $n\,m$ intersezioni di una curva R (v. sopra) con una superficie f su cui non giaccia per intero, ve ne sono $n\,m - 1$ situate nei punti e nelle curve fondamentali della trasformazione.

A ciascun punto di una curva fondamentale che sia i^{pla} per tutte le superficie del sistema omaloidico, corrisponde una curva razionale d'ordine i, luogo geometrico della quale è una superficie

che fa parte della Jacobiana del sistema lineare delle superficie $\varphi_i = 0$.

Una curva fondamentale dello spazio (x), i^{pla} *per le superficie* $f = 0$, *se è segata dalle curve* R, *è multipla secondo l'ordine* $4\,i - 1$ *per la Jacobiana delle* f. *Se poi non è incontrata dalle curve* R, *è multipla secondo l'ordine* $4\,i$ *per la Jacobiana delle* f.

Un punto fondamentale dello spazio (x), l^{plo} *per le* f, *è multiplo secondo* $4\,l - 2$ *per la Jacobiana delle* f.

Per le relazioni numeriche fra gli ordini di molteplicità dei punti e delle curve fondamentali, analoghe a quelle che si trovano nel caso della trasformazione piana, e che noi abbiamo citato al § 5 del Cap. VI, si vegga Noether (*Ann. di mat.* V, pag. 175-176).

La teoria della trasformazione birazionale dello spazio non è stata ancora studiata così perfettamente come quella del piano.

Le opere principali sull'argomento sono quelle di Cayley (*Proc. of the London Math. Soc.* III, 171), Cremona (*Gött. Nach.*, 1871, *Math. Ann.* IV., *Rend. Ist. Lomb.*, 1871, *Annali di mat.*, V, *Acc. Bologna*, 1871-1872), Noether (*Math. Ann.*, III).

Caso particolare è la *trasformazione per raggi vettori reciproci* o *inversione, che ha la proprietà di conservare gli angoli.*

Se vogliamo che la trasformazione non sia birazionale *per tutto lo spazio*, ma solo per due superficie $F(x) = 0$, e $\Phi(y) = 0$ contenute nei due

spazi allora non è necessario che le superficie del sistema lineare

$$\sum_{1}^{4} \rho_i f_i(x) = 0$$

abbiano $n^3 - 1$ punti comuni; *è necessario solo che tutte le superficie di questo sistema che passano per un punto di* $F = 0$, *non si interseghino contemporaneamente sulla stessa superficie.*

Sussiste anche qui il teorema da reputarsi come estensione di quello di Riemann, che cioè *è il medesimo il genere delle due superficie che si trasformano biunivocamente l'una nell'altra.* Vedi su questo Clebsch (*Compt. Rend.*, 1868; *Math. Ann.*, II), Cayley (*Math. Ann.* III), Noether (*Annali di mat.* V, *Math. Ann.* II, VIII), Zeuthen (*Math. Ann.* IV).

Come pel caso delle curve piane così anche per le superficie si è tentato qualcosa di simile alle ricerche di Noether sulla scomposizione dei punti singolari; si è cercato, cioè, se è possibile con trasformazioni birazionali di spazio, o di superficie, ridurre una superficie con singolarità elevate, in un'altra con sole singolarità ordinarie. Di questo problema si sono occupati in vario senso Noether (*Math. Ann.* XXIX, *Berl. Sitzungsb.* 1888); Del Pezzo (*Rend. Palermo*, II, III), Segre (*Ann. di mat.* XXV) Pannelli (*Id.* XXV) Levi (*Id.* XXVI). Per il problema simile riguardante le curve gobbe si vegga Poincarè (*Compt. Rend.* CVIII, 1888, Pannelli, *Rend. Ist. Lomb.*, 1893.

Caso particolare della trasformazione birazionale delle superficie è la cosiddetta *rappresenta-*

zione piana delle superficie. Secondo la denominazione di CREMONA, sopra citata, *una superficie che è rappresentabile sul piano è un omaloide.*

Perchè una superficie sia rappresentabile sul piano, deve essere di genere zero.

Una condizione sufficiente per la rappresentabilità piana di una superficie è che essa possieda una schiera semplicemente infinita di curve razionali le quali sieno segate sulla superficie da un fascio di altre superficie (NOETHER, *Gött. Nach.* 1870; *Math. Ann.* III).

Si abbia una superficie S di ordine n; e le coordinate omogenee dei suoi punti si possano esprimere colle formole

$$x_i = f_i (y_1 y_2 y_3) \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

dove le f sieno funzioni razionali omogenee di ordine m, e supponiamo che i rapporti fra le y si possano, reciprocamente, da queste formole esprimere come funzioni razionali delle x. Si dirà che la superficie S, è rappresentabile sul piano, perchè interpretando le y come le coordinate omogenee dei punti di un piano, le precedenti formole stabiliranno una corrispondenza biunivoca fra i punti del piano e della superficie S.

Le curve del sistema lineare piano

$$\sum_1^4 \lambda_i f_i (y) = 0$$

abbiano comuni α_1 punti semplici, α_2 punti doppi, α_3 punti tripli, ecc.

Si ha allora la relazione

$$n = m^2 - \alpha_1 - 4\alpha_2 - 9\alpha_3 - \ldots$$

Chiamando p_1 il genere di una sezione piana della superficie, d l'ordine della curva doppia della stessa, r l'ordine della curva cuspidale, *si ha la relazione*

$$p_1 = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d - r =$$

$$= \frac{(m-1)(m-2)}{2} - \alpha_2 - 3\alpha_3 - 6\alpha_4 - \ldots$$

Sussiste inoltre la disuguaglianza

$$4 \leqq \frac{(n+1)(n+2)}{2} - \alpha_1 - 3\alpha_2 - 6\alpha_3 - \ldots$$

Da queste relazioni si hanno le altre

$$p_1 \leqq n - 2$$

$$d + r \geqq \frac{(m-1)(m-2)}{2}.$$

Per la rappresentabilità piana di una superficie di 4.° ordine, è necessario che questa possieda almeno una retta doppia; per la rappresentabilità di una superficie di 5.° ordine, è necessario che questa possieda almeno una curva doppia di 3.° ordine, ovvero una curva doppia di 2.° ordine, purchè questa si scinda in due rette che non si taglino.

Le superficie di 2.° e 3.° ordine sono evidentemente sempre rappresentabili sul piano. Per le

superficie di 2.° ordine basta proiettarne sul piano i punti, da uno dei loro punti; e per le superficie di 3.° ordine basta considerare due delle loro rette, che non si interseghino, indi da un punto arbitrario di un piano condurre la retta che incontra le due della superficie; essa incontrerà ancora la superficie in un altro punto che corrisponderà biunivocamente al punto del piano.

Per la costruzione geometrica della rappresentazione piana di una superficie di 4.° ordine a conica doppia si può procedere nel seguente modo: Consideriamo una delle 16 rette g della superficie, la quale taglia la conica doppia. Per un punto P di un piano e per g conduciamo il piano, che taglierà ancora la conica in un punto, che congiunto con P dà una retta la quale si appoggia alla conica doppia e a g, e quindi taglia la superficie ancora in un punto Q; *la corrispondenza fra* P *e* Q *è biunivoca.*

Se la superficie di 4.° ordine ha una retta doppia, si può fare una costruzione analoga sapendo che vi sono allora sulla superficie delle coniche le quali tagliano la retta doppia.

Per una superficie di 5.° ordine con due rette doppie non intersecantesi, si può fare evidentemente una costruzione geometrica analoga a quella che si è eseguita per le superficie di 3.° ordine.

Per una superficie di 5.° ordine con una cubica doppia, si possono evidentemente prendere come raggi proiettanti, le corde della cubica le quali tagliano la superficie ancora in un punto. Analoga costruzione può farsi se la cubica si scinde in una conica e in una retta che taglia la conica in un

punto, o in tre rette di cui una interseca le altre due. I casi in cui la cubica sia piana, ovvero si scinda in una conica e in una retta che non la incontra, ovvero in tre rette non intersecantesi, non sono possibili.

La rappresentazione piana delle superficie può essere utile per lo studio delle curve tracciate sulle superficie stesse. Le più antiche ricerche sulla rappresentazione piana delle superficie possono dirsi quelle relative alla proiezione stereografica e in generale a tutte quelle proiezioni immaginate per la costruzione delle carte geografiche.

La rappresentazione piana delle superficie di 2.° ordine fu fatta da PLÜCKER (*Crelle*, XXXIV, 1847), CHASLES (*Compt. Rend.*, 1861), CAYLEY (*Phil. Mag.*, XXII, 1861), i quali se ne servirono per lo studio delle curve tracciate su di una quadrica (v. anche CLEBSCH-LINDEMANN, *Geom.*, II e il Cap. X, § 1 di questo volume).

La rappresentazione piana della cubica fu fatta da CREMONA (*Crelle*, LXIX) e CLEBSCH (*Crelle*, LXV; quelle delle superficie di 4.° ordine a conica doppia o retta doppia o di quelle di 5.° ordine con cubica doppia, furono fatte da CLEBSCH (*Crelle*, LXIX; *Math. Ann.*, I), KORNDÖRFER (*Math. Ann.*, I, IV), FRAHM (*Id.*, VII).

Rappresentazioni piane delle superficie rigate razionali furono studiate da CREMONA (*Annali di mat.*, I), ARMENANTE (*Ann. di mat.*, IV, 1870). CLEBSCH (*Math. Ann.*, II, V), NOETHER (*Id.*, II).

Nel caso che la superficie non sia algebrica, ma qualunque, il problema della rappresentazione pia-

na di tutta la superficie o di una sua parte, diventa un problema che può trattarsi coi metodi della Geometria Differenziale (vedi).

Come sul piano così anche per lo spazio sono state considerate le *trasformazioni multiple* (vedi Cap. VI, § 5). Fra i lavori su ciò citeremo quello di De Paolis (*Mem. Lincei.* 1885).

CAPITOLO X.

Le curve storte di vari ordini.

§ 1. — Le curve sulle superficie di 2.° ordine. Le curve sferiche.

Come abbiamo detto, nell'ultimo paragrafo del Cap. IX, lo studio delle curve situate su di una superficie di 2.° ordine si può agevolmente fare mediante la rappresentazione piana di tali superficie. Proiettando da un punto P della quadrica, (che può essere anche un punto all'infinito) i punti di questa su di un piano, p. es. sul piano tangente alla quadrica nel secondo punto d'incontro O colla quadrica del diametro passante per P, si ha una rappresentazione piana della quadrica, che può chiamarsi, per analogia con quella della sfera, *proiezione stereografica.*

I punti situati sulle due generatrici della quadrica passanti per P si proiettano tutti in due medesimi punti all'infinito $P_1\,P_2$ che si chiamano *punti fondamentali;* la retta $P_1\,P_2$ (che in questo

caso è la retta all'infinito) si dice *retta fondamentale.*

L'assieme di tutte le rette della quadrica si proietta nei due fasci di raggi aventi i centri in P_1 e P_2.

Stabiliamo ora sulla quadrica un sistema di coordinate.

Prendiamo per origine delle coordinate il punto O e per assi OX, OY le due rette secondo cui il piano tangente in O taglia la quadrica. * Sia A un punto di questa; per esso passeranno due generatrici, una del primo e una del secondo sistema, le quali andranno rispettivamente a tagliare le generatrici fisse OX, e OY, nei punti A_1 (su OX) e A_2 (su OY); le distanze $\xi = OA_1$ e $\eta = OA_2$ possono assumersi come coordinate del punto A della quadrica. Tali coordinate soglionsi chiamare *iperboloidali*, e furono immaginate da PLÜCKER (*Crelle*, XXXIV).

È notevole il fatto che *il punto situato nel piano tangente XY e avente per coordinate le medesime ξ e η, è la proiezione da P del punto A della quadrica.*

Un'equazione di primo grado

$$a\xi + b\eta + c = 0$$

fra le coordinate $\xi\eta$, rappresenta sulla quadrica una curva piana passante per il punto P.

Prendendo come assi di coordinate cartesiane nello spazio gli assi OX, OY, e un terzo asse

* Volendo eseguire queste costruzioni nel campo reale, basterà supporre che la quadrica sia un *iperboloide.*

OZ qualunque, *le coordinate cartesiane* $x\,y\,z$ *di un punto* A *della quadrica sono legate alle coordinate iperboloidali* $\xi\,\eta$ *del medesimo punto* A, *dalle relazioni*

$$\xi = -\frac{dz}{cz + \mu y}, \quad \eta = -\frac{dz}{bz + \mu x}$$

ovvero

$$\frac{y}{z} = -\left[\frac{d}{\mu}\frac{1}{\xi} + \frac{c}{\mu}\right], \quad \frac{x}{z} = -\left[\frac{d}{\mu}\frac{1}{\eta} + \frac{b}{\mu}\right]$$

se l'equazione della quadrica è della forma

$$z(az + by + cx + d) + \mu xy = 0.$$

Scegliendo in particolare per asse Z il diametro passante per O, *l'equazione della quadrica diventa*

$$z(z + d) + \mu xy = 0$$ *se la quadrica è un iperboloide*

ovvero

$$dz + \mu xy = 0$$ *se è un paraboloide*,

e le relazioni soprascritte diventano

$$\xi = -\delta\frac{z}{y}, \quad \eta = -\delta\frac{z}{x}, \quad \left(\delta = \frac{d}{\mu}\right).$$

Le precedenti formole si trovano adoperate nell'opera citata di Plücker; in coordinate omogenee le formole acquistano maggiore simmetria (vedi Clebsch-Lindemann, *Geom.* II, pag. 422).

Sieno P, O due qualunque punti della quadrica (non è più necessario che sieno gli estremi di un

diametro), il tetraedro fondamentale delle coordinate abbia per vertici i punti P, O, P_1, P_2 (dove P_1 e P_2 sono i due punti fondamentali nel piano tangente alla quadrica in O).

L'equazione della quadrica sarà della forma

$$x_1 x_2 - x_3 x_4 = 0$$

se i piani $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ sono rispettivamente i piani $P O P_1$, $P O P_2$, $O P_1 P_2$, $P P_1 P_2$.

Indicando allora con $\xi_1 \xi_2 \xi_3$ le coordinate omogenee del punto (nel piano $O P_1 P_2$) proiezione di un punto della quadrica; *si hanno le formole*

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \xi_1 \xi_3 : \xi_2 \xi_3 : \xi_1 \xi_2 : \xi^2_3.$$

Le quantità $\frac{x_3}{x_1}$, $\frac{x_3}{x_2}$ possono assumersi come coordinate del punto sulla quadrica (Cayley, *Op.*, V, 70); esse corrispondono in fondo alle coordinate iperboloidali di Plücker.

Ogni curva piana sulla quadrica si proietta in una conica la quale diventa cerchio se P è un punto ciclico od ombelico della quadrica, e O è il punto diametralmente opposto; tutte le coniche siffatte sono fra loro simili e sono similmente disposte; i loro assintoti sono paralleli ai due assi $O X$, $O Y$ intersezioni del piano tangente in O colla quadrica.

Una curva di ordine n sulla quadrica, e che non passi per P, si proietta in una curva piana di ordine n.

Se la curva passa m volte per P, la proiezione sarà di ordine $n - m$.

Ogni curva di ordine n sulla quadrica, incontra sempre k volte una qualunque generatrice di un sistema, k' volte un'altra qualunque generatrice dell'altro sistema, in modo che $k+k'=n$; la proiezione di tal curva passerà allora k volte per P_1 e k' volte per P_2. I due numeri k, k' caratterizzano la specie di curve sulla quadrica; tale specie si suole perciò indicare col simbolo $[k, k']$.

Se uno dei numeri k, k' è zero, allora la curva si scinde nell'assieme di n rette della quadrica.

Non considerando come sostanzialmente diverse fra loro le due specie di curve $[k\,k']$ e $[k'\,k]$, si ha:

Vi sono su di una quadrica $\frac{n-1}{2}$ (se n è dispari) e $\frac{n}{2}$ (se n è pari) diverse specie di curve proprie di ordine n.

L'intersezione completa della quadrica con una superficie generale di ordine m è del tipo $[m, m]$.

Per $k\,k'+k+k'$ punti dati ad arbitrio sulla quadrica si può far passare una e una sola curva del tipo $[k, k']$.

Due curve dei tipi $[k, k']$ e $[k_1, k'_1]$ si incontrano in $k\,k'_1+k'\,k_1$ punti.

Una curva del tipo $[k, k']$ dotata di δ punti doppi e χ cuspidi, tocca

$$2\,k'(k-1)-2\,\delta-3\,\chi$$

generatrici del primo sistema e

$$2\,k(k'-1)-2\,\delta-3\,\chi$$

generatrici del secondo sistema.

Per le singolarità e i numeri caratteristici delle curve tracciate su di una quadrica vedi il § 4 del Cap. IX.

Sulla quadrica non esistono altre curve proprie di 2.° ordine che le sezioni piane, le quali sono del tipo [1, 1].

Non esistono altre curve proprie di 3.° ordine che quelle del tipo [1, 2] *o, ciò che è lo stesso,* [2, 1]; *sono le cubiche storte.*

Esistono due diverse famiglie di quartiche rappresentate rispett. da [2, 2] *(quartiche di 1.ª specie) e* [1, 3] *(quartiche di 2.ª specie).*

La rappresentazione piana delle quadriche fu ideata prima da Chasles, come estensione della proiezione stereografica della sfera (*Ann. de Gergonne*, XVIII, XIX; *Aperçu hist.*, p. 219 (1837)). Lo studio delle curve sulla quadrica fu fatto da Plücker in due Memorie (*Crelle*, XXXIV, 341-360). Dello stesso argomento si occuparono Cayley in una breve nota (*Phil. Magaz.*, XXII, 1861; *Opere*, V, 70) e Chasles (*Compt. Rend.*, 1861). Si vegga anche Clebsch-Lindemann (*Geom.*, II, pag. 414 e seg.).

Casi particolari di queste ricerche sono quelle sulla proiezione stereografica della sfera, e sulle curve sferiche, in particolare sulle cosiddette *coniche sferiche.* La proiezione stereografica della sfera era conosciuta sin dai geometri greci; la sua proprietà più importante è quella cosiddetta della *rappresentazione conforme*, cioè *l'angolo di due curve sferiche è eguale all'angolo delle proiezioni piane delle medesime*, ponendo, come sopra,

il centro di proiezione in un punto P della sfera, e il piano di proiezione parallelo al piano tangente in P, o in particolare, facendo che il piano di proiezione sia il piano tangente nel punto O diametralmente opposto a P.

Questa proprietà sembra trovata da HOOKE e MOIVRE (v. HALLEY, *Phil. Trans.* 1696); però qualcuno crede che fosse già conosciuta sin dal 1587 da MERCATOR (v. A. BREUSING, *Das Verebnen der Kugeloberfläche etc.* Leipzig, 1892); indi studiata da LAMBERT, EULERO, LAGRANGE, GAUSS, ecc. (vedi CHASLES, *Aperçu hist.* pag. 219 e 235).

Ogni sezione piana della sfera si proietta in un cerchio.

La proiezione del polo del piano segante è il centro del cerchio secondo cui si proietta la sezione piana (*teorema di* CHASLES; v. HACHETTE, *Géom. à 3 dim.* 1817).

Le coordinate sulla sfera e le coniche sferiche (intersezioni della sfera con coni di 2.° ordine furono studiate da CHASLES (*Mém. de Belgique*, VI), GUDERMANN (*Crelle*, VI), MÖBIUS (*Opere*, II), etc. Un'esposizione dettagliata della loro teoria si può vedere in HESSE (*Anal. Geom. des R.*, 3.ª ediz., pag. 51) e SALMON-FIEDLER (*Id.*, I, 3.ª edizione, pag. 340 e seg.).

Una conica sferica è una curva storta di 4.° ordine e di 1.ª specie (v. § 3); essa è l'intersezione della sfera con un cono di 2.° grado avente il vertice nel centro della sfera.

Per una conica sferica è costante il rapporto anarmonico dei quattro raggi che congiungono un punto variabile della curva con quattro punti

fissi della curva stessa, intendendo per rapporto anarmonico dei 4 raggi (non situati in un piano), quello dei 4 piani che li proiettano dal centro della sfera; proprietà analoga a quella delle coniche piane.

Per una conica sferica è costante il rapporto fra il prodotto dei seni delle normali che da un punto della sfera si possono condurre a due archi di circoli massimi tangenti alla conica, e il quadrato del seno della normale condotta all'arco di circolo massimo passante per i due punti di contatto.

Conducendo per il centro della sfera i due piani ciclici del cono di 2.° grado (che lo tagliano secondo cerchi), i circoli massimi corrispondenti sulla sfera a tali piani si chiamano *i circoli ciclici* corrispondenti alla conica sferica.

Se un circolo massimo taglia la conica sferica in due punti P e Q, e i circoli ciclici in A e B, è $AP = BQ$, e in particolare:

L'arco di circolo massimo, tangente alla conica e compreso fra i due circoli ciclici, è tagliato per metà dal punto di contatto.

§ 2. — Le cubiche storte o gobbe.

Due quadriche aventi di comune una retta, si intersecano in una curva residua che è una *cubica gobba.*

Riferendoci alle notazioni adoperate al § 4 del Capitolo IX per i numeri caratteristici e le singolarità delle curve storte, abbiamo i seguenti

valori:

$$\begin{array}{ll} n = 3 & , \quad m = 3 \\ r = 4 & , \quad g = 1 \\ h = 1 & , \quad x = 0 \\ y = 0 & , \quad \alpha = 0 \\ \beta = 0 & , \quad G = 0 \\ H = 0 & , \quad \omega = 0 \\ v = 0 & , \quad p = 0 \end{array}$$

donde i seguenti risultati:

La cubica gobba è una curva di genere zero, e di 4.ª classe; e la sua sviluppabile osculatrice è di 4.° ordine e 3.ª classe.

Per un punto qualunque dello spazio passa una sola corda, e tre piani osculatori alla cubica.

Un piano qualunque dello spazio contiene una e una sola retta intersezione di due piani osculatori della cubica.

La proiezione piana di una curva storta di 3.° ordine è una cubica piana con un punto doppio.

Ogni curva gobba di 3.° ordine si può immaginare tracciata su di una quadrica; essa incontra sempre in un punto le generatrici di un sistema, e in due punti quelle dell'altro (v. § 1, Cap. X). Quindi:

Su di una quadrica possono immaginarsi tracciati due sistemi diversi di cubiche, secondochè incontrano in uno o due punti le generatrici del 1.° *sistema (e quindi in due o un punto quelle del* 2.° *sistema).*

Due cubiche di sistemi diversi si incontrano in cinque punti, e due cubiche dello stesso sistema si incontrano in quattro punti.

Se due quadriche si segano in una cubica, e quindi anche in una retta, questa, in ciascuna delle due quadriche, appartiene a quel sistema le cui generatrici sono tagliate in due punti dalla cubica.

Per cinque punti dati ad arbitrio su di una quadrica passano DUE *cubiche giacenti sulla quadrica stessa (una per ciascuno dei due sistemi, v. sopra).*

Per sei punti ad arbitrio dello spazio, passa sempre una cubica.

Per costruire questa cubica basterà condurre il cono quadrico che ha per vertice uno dei sei punti, e che passa per gli altri cinque, e poi ancora l'altro cono quadrico che ha per vertice un'altro dei sei punti, e che passa per gli altri cinque. I due coni si intersegheranno nella retta congiungente i due vertici, e in una cubica che sarà la cubica richiesta.

Una cubica gobba è il luogo dei punti comuni alle terne di piani corrispondenti di tre fasci di piani fra loro proiettivi.

La sviluppabile osculatrice di una cubica gobba può considerarsi come l' inviluppo dei piani passanti per le terne di punti corrispondenti di tre punteggiate proiettive.

Degenerazione della cubica gobba con un sol punto doppio apparente, è l'assieme di una conica e di una retta situata così nello spazio che tagli la conica in un sol punto.

(Proprietà varie delle cubiche.) I quattro piani che passano per una corda variabile della cubica e per ciascuno di quattro punti fissi della stessa, hanno rapporto anarmonico costante.

Quattro piani osculatori della curva sono tagliati in quattro punti aventi rapporto anarmonico costante, da una retta qualunque intersezione di due piani osculatori.

In particolare:

I quattro piani che congiungono una tangente alla curva con quattro punti della stessa, hanno rapporto anarmonico costante al variare della tangente.

I quattro punti in cui quattro piani osculatori sono tagliati da una tangente variabile, hanno rapporto anarmonico costante.

Dati sette punti 1, 2, . . . 7, *di una cubica, i piani*

712 e 745

723 e 756

734 e 761

si intersecano in tre rette di un piano, il quale passa per una corda fissa della cubica, se, restando fissi i primi sei punti, muta di posizione solo il punto 7 (Cremona).

Date due cubiche passanti per i medesimi cinque punti, le corde della prima passanti per punti della seconda, incontrano tutte le corde della seconda passanti per punti della prima.

I piani osculatori di tre punti 1, 2, 3 della cubica si tagliano in un punto (4) del piano 1 2 3.

I punti di contatto dei tre piani osculatori condotti alla cubica da un punto (4) stanno in uno stesso piano col punto (4) (Chasles).

La retta intersezione di piani osculatori, esi-

stente nel piano 1 2 3, è la polare armonica del punto 4 rispetto al triangolo (1 2 3). *

La corda della cubica passante pel punto 4 è la retta polare armonica del piano 1 2 3 rispetto al triedro dei tre piani osculatori. **

Quattro punti di una cubica formano un tetraedro, e un altro tetraedro è formato dai piani osculatori nei quattro punti; ciascuno dei due tetraedri è nello stesso tempo iscritto e circoscritto all'altro (MÖBIUS, *Crelle*, III, 273).

Il teorema di CHASLES fa vedere che per mezzo di una cubica gobba, si stabilisce nello spazio una corrispondenza speciale fra i punti e piani, in modo che *ad ogni punto corrisponde un piano passante per esso, e ad ogni piano corrisponde un punto in esso situato.* Tale corrispondenza è una *dualità polare o involutoria*, e propriamente una di quelle chiamate *polarità nulle* (v. pag. 62 di questo volume) o *sistemi nulli* (*Nullsystem* dei tedeschi; v. MÖBIUS, *Statik*, I, 151 e *Crelle*, X, 317). Il punto e il piano corrispondente si chiamano *polo* e *piano polare.*

La corda alla cubica, passante per un polo dato P, e la retta situata nel piano polare di P, e in cui si incontrano due piani osculatori della cu-

---

* La *polare armonica* s di un punto S (*polo armonico* di s) rispetto ad un triangolo è quella retta che taglia i lati di un triangolo ABC in tre punti $A'B'C'$ tali che le coppie di raggi SA, SA'; SB, SB'; SC, SC' sieno in involuzione (v. il teor. 7.mo alla pag. 84 di questo volume).

** Ciascuno potrà facilmente estendere da sè al caso del triedro, la definizione di *polare armonica* contenuta nella nota precedente.

bica, sono due rette corrispondenti nella polarità nulla.

(Costruzioni varie.) I problemi di cui enuncieremo le soluzioni in questo paragrafo sono quelli riguardanti la costruzione di una cubica gobba date che sieno certe condizioni cui essa deve soddisfare.

1. Dati sei punti 1, 2, 3, 4, 5, 6, della cubica, costruire la cubica stessa.

Si faccia passare per (12) un piano arbitrario α, *e si determinino le intersezioni:*

$$[\alpha, (345)] = a, \qquad [\alpha, (456)] = b$$
$$[(23), (561)] = A, \qquad [(61), (234)] = B$$
$$[\alpha, (B\,4)] = C, \qquad [\alpha, (A\,5)] = D$$
$$[(C\,D), a] = E, \qquad [(C\,D), b] = F;$$

il punto

$$[(1\,E), (2\,F)] = P$$

appartiene alla cubica.

Ovvero anche:

Si determinino

$$[\alpha, (45)] = G$$
$$[1\,A\,G] = \beta, \qquad [2\,B\,G] = \gamma$$
$$[\beta, (34)] = H, \qquad [\gamma, (56)] = K;$$

i tre piani

$$[6\;1\;H], \qquad \alpha, \qquad [2\;3\;K]$$

si tagliano in un punto della cubica; si ha naturalmente il terzo punto della cubica esistente nel piano α.

2. Dati cinque punti 1, 2, 3, 4, 5, e una secante *(a)* della cubica, costruire la cubica.

Per la secante (a) si faccia passare un piano arbitrario α, *il quale taglia i piani*

$$[123],\quad [124],\quad [134],\quad [234]$$

in quattro rette che insieme con (a) determinano una conica ad esse tangente; il piano α *taglia inoltre i piani*

$$[123],\quad [125],\quad [135],\quad [235]$$

in altre quattro rette che insieme ad (a) determinano un' altra conica; le due coniche hanno per tangenti comuni (a) e $[\alpha, (1\,2\,3)]$. *Il punto d'incontro delle altre due tangenti comuni è punto della cubica.*

3. Dati quattro punti e due secanti, costruire la cubica. *Questo problema o non ha soluzioni o ne ha infinite.*

4. Dati tre punti e tre secanti, costruire la cubica.

Basterà considerare i tre fasci di piani che hanno per assi le tre secanti, e porre in corrispondenza proiettiva i piani dei tre fasci, considerando come corrispondenti i piani che passano per ciascuno dei tre punti assegnati; i punti della cubica si determinano come intersezioni di tre altri qualunque piani corrispondenti.

5. Dati 2 punti A, B, e 4 secanti a, a', b, b', costruire la cubica.

Si costruisca la retta che passa per A *e incontra le rette* a, a'; *e la retta che passa per* A *e*

incontri b, b'; tali rette sieno c, c'; indi si costruiscano similmente le rette d, d' che passano per B e incontrino a, a' ovvero b, b'. L'intersezione dei piani $[c\,d]$ e $[c'\,d']$ sia l; allora i due iperboloidi

$$[a\,a'\,l]; \qquad [b\,b'\,l]$$

si incontrano nella cubica richiesta.

6. *Il problema:* costruire la cubica passante per un punto, e avente per secanti cinque rette date, *ammette anche sempre una soluzione.*

7. *Invece il problema:* costruire la cubica avente sei secanti date, *ammette in generale sei soluzioni.*

Per queste costruzioni rimandiamo alle opere sottocitate di SCHRÖTER, CREMONA, STURM.

(Varie specie di cubiche.) Nello stesso modo con cui le coniche si distinguono in specie secondo la realità o meno dei loro punti all'infinito, anche per le cubiche storte possono stabilirsi analoghe distinzioni. Propriamente:

1. Se il piano all'infinito taglia la cubica *in un sol* punto *reale*, si ha la *ellisse cubica.*

2. Se il piano all'infinito contiene *tre* punti *reali* della cubica, si ha la *iperbole cubica.*

3. Se in particolare di tali tre punti reali, due sono coincidenti, si ha la *iperbole cubica parabolica.*

4. Se infine tali tre punti sono tutti coincidenti, cioè il piano all'infinito è piano osculatore, si ha la *parabola cubica.*

Per una iperbole cubica passano tre cilindri iperbolici reali di 2.° grado.

Per una ellisse cubica passa un solo cilindro reale di 2.° grado che è ellittico.

Per un' iperbole cubica parabolica passano due cilindri reali di 2.° grado, di cui uno è iperbolico e l'altro è parabolico.

Per una parabola cubica passa un solo cilindro reale di 2.° grado, il quale è parabolico.

Chiamando *assintoto* la tangente reale (al finito) in un punto all' infinito della curva, si ha:

La ellisse cubica ha un solo assintoto.

La iperbole cubica ha tre assintoti.

La iperbole cubica parabolica ha un solo assintoto.

La parabola cubica non ha alcun assintoto.

Le cubiche gobbe furono studiate per la prima volta da Möbius (*Baryc. Calcul*, 1827, pag. 120; *Crelle*, X) e poi da Chasles (*Aperçu hist.* Note XXXIII; *J. de Liouville*, II, 1854; *Compt. Rend.* XLV). Indi se ne occuparono Seydewitz (*Arch. v. Grunert,* X), Hesse (*Crelle,* XXVI), Schröter (*Id.*, LVI), v. Staudt (*Beiträge*, III, 1860), Cremona (*Ann. di mat.* I, II, V; *Crelle*, LVIII, LX, LXIII; *Nouv. Annales*, *etc.*, I, 2.e série), Sturm (*Crelle*, LXXIX, LXXX, LXXXVI), Müller (*Math. Ann.*, I).

Per altre ricerche sulle cubiche storte, specialmente per l' applicazione ad esse della teoria degli invarianti delle forme binarie, si vegga Beltrami (*Ist. Lomb.*, 1868), Sturm *(cit.)*, Voss (*Math. Ann.*, XIII), D'Ovidio (*Acc. Torino*, XXXII, 1879; *Giorn. di Batt.*, XVII; *Collect. math.*, 1881), Pittarelli (*Giorn. di Batt.*, XVII), Gerbaldi (*Mem. Torino*, 1880).

Per trattazioni sulla teoria delle cubiche gobbe citeremo Salmon-Fiedler (*An. Geom. d. R.*, II),

e più specialmente SCHROETER (*Th. der Oberf. 2ter Ordn., etc.* Leipzig, 1880).

§ 3. — LE QUARTICHE GOBBE DI 1.ª SPECIE.

Una quartica gobba di 1.ª specie è l'intersezione completa di due quadriche; *su ciascuna di queste, essa taglia in due punti ogni generatrice di un sistema, e in due punti ogni generatrice dell'altro* (v. § 1).

Le caratteristiche per tale curva, supposto che le due quadriche sieno qualunque, sono le seguenti:

$$n=4\ ,\quad m=12$$
$$r=8\ ,\quad g=38$$
$$h=2\ ,\quad x=16$$
$$y=8\ ,\quad \alpha=16$$
$$\beta=0\ ,\quad G=0$$
$$H=0\ ,\quad \omega=0$$
$$v=0\ ,\quad p=1$$

Se poi le due quadriche hanno in un punto un contatto ordinario, allora la quartica acquista un punto doppio, e le sue caratteristiche sono:

$$n=4\ ,\quad m=6$$
$$r=6\ ,\quad g=6$$
$$h=2\ ,\quad x=6$$
$$y=4\ ,\quad \alpha=4$$

$$\beta = 0 \quad , \quad G = 0$$
$$H = 1 \quad , \quad \omega = 0$$
$$v = 0 \quad , \quad p = 0$$

Se le due quadriche hanno in un punto un contatto stazionario, la quartica acquista una cuspide, e le sue caratteristiche diventano:

$$n = 4 \quad , \quad m = 4$$
$$r = 5 \quad , \quad g = 2$$
$$h = 2 \quad , \quad x = 2$$
$$y = 2 \quad , \quad \alpha = 1$$
$$\beta = 1 \quad , \quad G = 0$$
$$H = 0 \quad , \quad \omega = 0$$
$$v = 0 \quad , \quad p = 0$$

Degenerazioni della quartica gobba di 1.ª specie sono:

1. Una cubica piana e una retta situata in modo nello spazio che la tagli in un sol punto.
2. Una cubica gobba e una sua corda.
3. Due cubiche situate nello spazio in modo che abbiano in comune due punti.

Dalla proprietà riguardante il numero dei coni quadrici esistenti in un fascio di quadriche, si ricava:

Per ogni quartica di 1.ª specie passano quattro coni quadrici (Poncelet).

Una quartica di 1.ª specie non può avere alcuna trisecante.

Ogni piano del fascio di piani avente per asse una corda o una tangente della quartica di 1.ª

specie, taglia la stessa in due punti la cui congiungente è la generatrice di una quadrica su cui sta tutta intera la quartica.

In tal fascio vi sono quattro piani tangenti alla quartica.

Otto punti dati ad arbitrio nello spazio determinano una quartica di 1.ª specie.

Due quartiche di 1.ª specie situate sulla stessa quadrica si incontrano in otto punti.

Tali otto punti sono quelli nei quali si incontrano tre quadriche; *dati sette di essi, l'ultimo può determinarsi con costruzioni lineari*; essi formano un *gruppo di otto punti associati; per essi passano infinite quartiche* (v. p. es, Hesse, *Crelle*, XXVI; Reye, *Id.*, C; Zeuthen, *Id.*, IC, *Acta math.*, XII, etc.).

Per sei punti di un gruppo di 8 punti associati si conduca la cubica gobba; la retta degli altri due punti è una corda della cubica; e reciprocamente *otto punti di una quartica aventi questa proprietà, sono otto punti associati.*

Per cinque punti di una quartica di 1.ª specie si facciano passare tutte le quadriche possibili, le quali tagliano ancora la quartica in tre punti. Il piano di questi tre punti passa per un punto fisso della quartica stessa.

Si abbiano su di una quartica, due gruppi di otto punti associati, cioè in tutto 16 punti, e fra questi se ne possano scegliere otto da formare un nuovo gruppo di punti associati; allora anche i rimanenti otto formeranno un gruppo di punti associati.

Si conducano tre piani che taglino la quartica nei punti

$$\begin{matrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3; \end{matrix}$$

i piani $A_1 A_2 A_3$; $B_1 B_2 B_3$; $C_1 C_2 C_3$; $D_1 D_2 D_3$ *tagliano ancora la quartica in quattro punti situati in un piano.*

I quattro piani osculatori in quattro punti situati in un piano, tagliano la curva in quattro punti di un piano (REYE).

Vi sono sulla quartica delle TERNE DI PUNTI $A_1 A_2 A_3$ *dotate della proprietà che i tre piani osculatori in essi, si tagliano in un punto* S *della curva, per il quale passa poi anche il piano* $A_1 A_2 A_3$. Il punto S si dice *punto satellite della terna.*

Si abbia la quartica su di una quadrica; i tre punti $B_1 B_2 B_3$ *in cui le generatrici di un medesimo sistema, passanti per* $A_1 A_2 A_3$ *incontrano ancora la quartica, formano ancora una terna.*

Sia O *un punto della quartica; i tre punti in cui i tre piani* $O A_1 A_2$, $O A_2 A_3$, $O A_3 A_1$ *incontrano ancora la quartica, formano ancora una terna.*

I tre punti in cui i tre piani passanti rispettivamente per A_1, A_2, A_3 *e per una secante o per una tangente della quartica, incontrano ancora la quartica, formano ancora una terna.*

Per costruire una terna di punti, data la quartica, si può procedere nel seguente modo: si as-

suma un punto S della quartica come punto satellite; indi si proietti la quartica da S su di un piano, in una curva di 3.° ordine; *il piano passante per S e per una delle rette d'inflessione della cubica piana, taglia la quartica nei tre punti di una terna.*

Abbiamo sopra detto che *nel fascio di piani che ha per asse una corda della quartica, vi sono quattro piani tangenti alla stessa;* diremo che i quattro punti di contatto formano UNA QUATERNA DI PUNTI.

Il rapporto anarmonico di siffatti quattro piani del fascio è COSTANTE *al variare della corda che è l'asse del fascio stesso*, o anche:

È costante il rapporto anarmonico dei quattro punti in cui le tangenti nei quattro punti di una quaterna tagliano la corda ad essi corrispondente.

I piani passanti per una corda della curva, e per ciascuno dei quattro punti di una quaterna, tagliano la curva in quattro punti formanti a loro volta una quaterna.

Le quattro facce del tetraedro avente per vertici quattro punti di una quaterna, tagliano la curva in quattro punti di un' altra quaterna, i quali non sono altro che i quattro punti nei quali la curva è incontrata dai quattro piani osculatori nei punti della prima quaterna.

Esistono sulla quartica 24 COPPIE *di punti tali che il piano osculatore in un punto della coppia passa per l'altro punto della coppia, e reciprocamente.*

È stata studiata la configurazione dei 16 punti

di contatto colla quartica dei piani stazionari della sviluppabile osculatrice, cioè dei 16 punti della quartica in cui il piano osculatore ha un contatto di 3.° ordine colla curva.

Tali 16 punti sono i punti di incontro della curva colle quattro facce del tetraedro polare, cioè di quello avente per vertici i vertici dei quattro coni passanti per la quartica.

Ogni piano che passa per tre di tali 16 punti, passa ancora per un quarto di essi, il quale però può essere coincidente con uno dei tre già considerati. Si hanno così 116 piani.

I 16 punti si possono rappresentare coi simboli (i, j) *dove* $i, j = 0, 1, 2, 3$, e stanno in un piano quei quattro punti per cui la somma dei primi indici, e quella dei secondi indici sono separatamente $\equiv 0 \pmod{4}$.

Le coordinate di un punto della quartica gobba di 1.ª specie si possono esprimere per funzioni ellittiche di un parametro; propriamente si può porre

$$x = p(u), \quad y = p'(u), \quad z = p''(u)$$

dove p è la nota funzione ellittica di WEIERSTRASS (v. *Repert.*, I, Cap. XVI, § 4). *Quattro punti in un piano sono allora quelli pei quali la somma dei quattro argomenti è* $\equiv 0 \pmod{2\omega, 2\omega'}$.

Da questo punto di vista la quartica gobba di 1.ª specie si trova studiata in HARNACK, *Math. Ann.*, XII; LANGE, *Diss*, Dresden, 1882, e *Schlömilch's Zeits.*, XXVIII; v. anche HALPHEN, *Fonct. ellipt.*, II, pag. 449 e seg.

Le quartiche gobbe di 1.ª specie si trovano stu-

diate in CHASLES (*Compt. Rend.*, LII, LIV), REYE (*Ann. di mat.*, II), GEGENBAUER (*Wien. Berich.*, XCIII), AMESEDER (*Id.*, XXXVII), oltre che nelle altre opere sopra citate. Un trattato su tali curve è quello di SCHROETER (*Grundzüge einer rein-geometrischen Theorie der Raumcurven 4.ter Ord. Iter Species.* Leipzig, 1890) dove possono trovarsi moltissime altre indicazioni.

A tale specie di quartiche appartengono le *coniche sferiche* di cui abbiamo trattato nel § 1.

§ 4. — QUARTICHE GOBBE DI 2.ª SPECIE.

La quartica gobba di 2.ª specie è definita come quella quartica per la quale passa *una sola* quadrica.

In generale se una quadrica e una cubica hanno in comune una curva piana di 2.° ordine (due rette in un piano, o una conica) la intersezione residua è una quartica di 1.ª specie; quindi la quartica di 2.ª specie è l'intersezione residua di una quadrica e di una superficie cubica le quali hanno in comune due rette sghembe.

Si ha anche una quartica di 2.ª specie, se la quadrica e la cubica hanno in comune una retta unica la quale sia doppia per la superficie cubica.

Alla superficie cubica generale può sostituirsi una rigata gobba; cioè:

Ogni quartica di 2.ª specie può considerarsi come l'intersezione di una quadrica e di una superficie cubica gobba, la quale ha per direttrice doppia una corda della curva (CREMONA).

Ogni quartica di 2.ª specie può considerarsi come il luogo dei punti comuni ai piani corrispon-

denti di tre fasci proiettivi, il primo semplice, il secondo doppio involutorio, e il terzo omografico al secondo (Cremona).

La proiezione piana della quartica di 2.ª specie, è in generale una curva di 4.° ordine, di 6.ª classe, con tre punti doppi, quattro tangenti doppie, e 6 flessi.

Se il centro di proiezione è situato sulla curva si ha una curva di 3.° ordine e 4.ª classe.

Per la quartica di 2.ª specie passano 4 coni di 3.° ordine e 3.ª classe.

I numeri caratteristici per la quartica di 2.ª specie sono:

$$
\begin{array}{lll}
n=4 & , & m=6 \\
r=6 & , & g=6 \\
h=3 & , & x=6 \\
y=4 & , & \alpha=4 \\
\beta=0 & , & G=0 \\
H=0 & , & \omega=0 \\
v=0 & , & p=0.
\end{array}
$$

Tutte le generatrici di uno dei due sistemi sulla quadrica sono tagliate in tre punti dalla quartica, e tutte quelle dell' altro sistema sono tagliate in un punto solo (v. § 1); quindi:

La curva ammette un sistema semplicemente infinito di trisecanti.

Esistono quattro punti nei quali la tangente alla curva, taglia ancora la curva stessa.

Questa curva può *in particolare* avere una o due *tangenti stazionarie* ($v = 1, 2$), ciò che invece non può verificarsi per la quartica di 1.ª specie.

I numeri caratteristici per questi casi particolari sono:

$$n = 4 \quad , \quad m = 5$$
$$r = 6 \quad , \quad g = 4$$
$$h = 3 \quad , \quad x = 5$$
$$y = 4 \quad , \quad \alpha = 2$$
$$\beta = 0 \quad , \quad G = 0$$
$$H = 0 \quad , \quad \omega = 0$$
$$v = 1 \quad , \quad p = 0$$

e

$$n = 4 \quad , \quad m = 4$$
$$r = 6 \quad , \quad g = 3$$
$$h = 3 \quad , \quad x = 4$$
$$y = 4 \quad , \quad \alpha = 0$$
$$\beta = 0 \quad , \quad G = 0$$
$$H = 0 \quad , \quad \omega = 0$$
$$v = 2 \quad , \quad p = 0.$$

Degenerazioni della quartica gobba di 2.ª specie sono:

1. Una cubica storta e una retta che la tagli in un sol punto.

2. Due coniche aventi un sol punto comune.

Il rapporto anarmonico dei quattro piani che passano per quattro punti della curva e per una qualunque trisecante della stessa è costante al va-

riare della trisecante. Esso può perciò chiamarsi *il rapporto anarmonico dei quattro punti della quartica.*

Su di una quadrica si possono descrivere due sistemi di quartiche di 2.ª specie, secondochè queste incontrano in un punto le generatrici di un sistema (1.° sistema) e in tre punti le generatrici dell'altro sistema (2.° sistema), ovvero viceversa.

Due quartiche appartenenti a sistemi diversi si incontrano in 10 punti, e due quartiche dello stesso sistema si incontrano in 6 punti.

Una quartica di 1.ª specie e una di 2.ª specie tracciate sulla stessa quadrica, si incontrano in 8 punti.

Una curva cubica gobba e una quartica di 2.ª specie, tracciate sulla stessa quadrica, le quali incontrano ciascuna in un sol punto una stessa generatrice di questa, si segano in cinque punti.

Se invece la cubica incontra in due punti, e la quartica in un sol punto la medesima generatrice, le due curve hanno in comune sette punti.

Per otto punti arbitrari dello spazio passano quattro quartiche di 2.ª specie.

Per sette punti su di una quadrica, si possono descrivere due quartiche di 2.ª specie situate sulla quadrica stessa.

Da un punto P della curva possono condursi tre piani osculatori alla medesima; i tre punti di contatto di questi, stanno in un piano che passa per P, e che è il piano polare armonico della trisecante passante per P rispetto al triedro dei tre piani osculatori (per la definizione di piano polare armonico ci riferiamo a quanto si è detto in nota al § 2 di questo stesso capitolo).

Variando il punto M, il piano dei tre punti di contatto inviluppa un cono quadrico (Cremona).

Si chiamano *corde principali* della curva quelle per le quali passano due piani osculatori alla curva i cui punti contatto sieno i punti nei quali le corde incontrano la curva (Bertini).

Esistono tre corde principali; esse passano per uno stesso punto.

Per un punto dello spazio passano tre corde della curva (perchè $h = 3$); ora se per il medesimo punto conduciamo i sei piani passanti per le tangenti alla curva nei sei punti d'intersezione colle corde, abbiamo:

Tali sei piani toccano un medesimo cono quadrico.

Si ha poi ancora:

I sei piani osculatori condotti da un punto alla curva toccano uno stesso cono quadrico.

Le otto rette condotte da un punto dello spazio ai punti di contatto dei quattro piani bitangenti condotti per tale punto, sono generatrici di un cono quadrico.

I piani osculatori della curva sono tangenti ad una quadrica, i cui piani tangenti tagliano la curva secondo quattro punti formanti un gruppo equianarmonico. Quella quadrica è iscritta nella sviluppabile osculatrice della curva (Cremona).

I piani che tagliano la quartica in quattro punti formanti un gruppo armonico, inviluppano una superficie di Steiner (di 4.° ordine e 3.ª classe) iscritta nella sviluppabile osculatrice della quartica (Cremona).

Consideriamo il fascio di piani che ha per asse una retta che taglia in due punti la quartica; *il luogo della retta che congiunge gli altri due punti di incontro di ciascun piano colla quartica, è una superficie cubica gobba, la cui direttrice doppia è l'asse del fascio di piani.*

Dalle tabelle al principio di questo § risulta che la curva di cui stiamo trattando ha *quattro* piani osculatori stazionari ($\alpha = 4$); ora si ha:

Le quattro tangenti nei quattro punti stazionari (chiameremo *punti stazionari* i punti di contatto dei piani stazionari) *sono situate sul medesimo iperboloide.*

Tali quattro punti stazionari appartengono alla curva nodale (del 6.º ordine) della sviluppabile osculatrice (v. Cap. IX, § 1); *in essi i piani stazionari sono anche piani osculatori per la curva nodale.*

La curva nodale ha anche quattro punti stazionari, e non ha altri punti multipli; essa è l'intersezione di una superficie di 2.º ordine, e di una di 3.º ordine, le quali hanno un contatto stazionario in quattro punti.

La quartica di 2.ª specie incontra la corrispondente curva nodale in otto punti, di cui quattro sono punti stazionari per la quartica, e gli altri quattro sono punti stazionari per la curva nodale.

L'esistenza delle quartiche di 2.ª specie fu notata da Salmon e Cayley (*Camb. Math. Journ.* V, 1850), e indi da Steiner (*Flächen 3ten Grades*, *Crelle*, LIII, 1857).

Il primo lavoro importante sull' argomento fu quello di Cremona (*Acc. Bologna,* 1861, ovvero *Ann. di Tortolini*, IV); indi si successero molti lavori di Weyr (*Math. Ann.* IV; *Wien. Berich.* 1871-75-76-78), il lavoro di Bertini (*Ist. Lomb.* 1872), quello di Armenante (*Giorn. di mat.* XI, XII), e molti altri.

Per la quartica di 2.ª specie Study ha trovato che, dato un punto dello spazio, resta determinata sulla curva un' involuzione di 4.º ordine e di 1.ª specie (*Leipz. Berichte*, 1886); un caso particolare di tale involuzione era stato già notato da Bertini *(cit.)*. Tale involuzione supplisce in certo modo alla mancanza di quell' altra esistente su tutte le curve gobbe razionali di ordine $n > 4$ (v. § 6).

La cosiddetta *teoria delle osculanti* è connessa colla teoria di tali involuzioni. (v. Jolles, *Th. der Osculanten*, Aachen, 1886; Stahl (*Crelle*, CI, CIV).

Per più particolari notizie bibliografiche e storiche si vegga la prefazione di un recente lavoro di Berzolari sul medesimo argomento (*Ann. di mat.* XX) il quale ha dimostrato che *la precedente involuzione non è altro che la apolare di quella che si ottiene tagliando la curva con piani passanti pel punto dato.*

Per i casi particolari sopra accennati (pag. 370), in cui la curva possiede delle tangenti stazionarie, v. Cremona (*Rend. Ist. Lomb.* 1868), Appell (*Compt. Rend.* 1876), ecc.

§ 5. — Le curve storte di 5.°, 6.°, ecc. ordine.

(Curve di 5.° ordine.) Come abbiamo detto (v. Cap. IX, § 3) vi sono tre famiglie di curve storte di 5.° ordine, una con 4 punti doppi apparenti e di genere massimo 2, l'altra con 5 punti doppi apparenti e di genere massimo 1, e l'altra con 6 punti doppi apparenti e di genere zero. Si intende naturalmente che le curve non abbiano singolarità effettive, cioè punti doppi effettivi, cuspidi, ecc.

Indichiamo queste curve rispettivamente con $R^2{}_5$, $R^1{}_5$, $R^0{}_5$.

Per ogni curva storta di quint' ordine, passano infinite superficie cubiche.

I numeri caratteristici per la $R^2{}_5$ sono:

$$r = 12 \qquad x = 48$$
$$m = 21 \qquad y = 32$$
$$h = 4 \qquad \alpha = 32.$$
$$g = 156$$

Gli altri numeri caratteristici sono zero.

Da ogni punto della curva $R^2{}_5$ parte una sola trisecante della curva stessa.

Questa curva è l' intersezione parziale di una quadrica e di una cubica, le quali hanno in comune una retta, che è una trisecante della curva.

Il luogo delle trisecanti della curva è la quadrica su cui sta la curva.

Esistono otto punti in cui la tangente alla curva taglia ancora la curva stessa. ($\lambda = 8$; v. Cap. IX, § 4.)

Vi sono 96 punti d' incontro di tre tangenti non infinitamente vicine (punti tripli della curva nodale della sviluppabile).

Vi sono 72 piani osculatori e tangenti altrove, alla curva data.

La curva R^2_5 *non ha alcuna quadrisecante.*

La curva R^2_5 *può generarsi mediante tre fasci proiettivi, uno, di superficie di 2.° ordine, e gli altri due, di piani; la quadrica passante per* R^2_5 *è quella determinata dalle intersezioni dei piani corrispondenti dei due fasci di piani.*

La R^2_5 *può anche definirsi come la intersezione parziale di due superficie cubiche, le quali abbiano in comune ancora una quartica gobba di 1.ª specie. Questa incontra allora otto volte la* R^2_5.

I numeri caratteristici per la R^1_5 *sono:*

$$r = 10$$
$$m = 15$$
$$h = 5$$
$$g = 70$$
$$x = 30$$
$$y = 20$$
$$\alpha = 20.$$

Questa curva può considerarsi come la intersezione parziale di due superficie cubiche, le quali si incontrano ancora in una quartica di 2.ª specie.

Da ogni punto della curva si possono condurre ad essa due trisecanti.

Vi sono 10 tangenti della curva le quali tagliano ancora altrove, la curva stessa.

Vi sono 30 piani osculatori e tangenti altrove alla curva data.

Vi sono 40 punti d'incontro di tre tangenti non infinitamente vicine della curva data.

Il luogo delle trisecanti della R^1_5 *è una rigata di 5.° ordine.*

La R^1_5 *non ha alcuna quadrisecante.*

I numeri caratteristici per la R^0_5 *sono:*

$$r = 8$$
$$m = 9$$
$$h = 6$$
$$g = 20$$
$$x = 16$$
$$y = 12$$
$$\alpha = 8.$$

Per ogni punto della curva passano tre trisecanti.

Vi sono 12 rette tangenti e secanti altrove la curva.

Vi sono 12 piani osculatori e tangenti altrove alla curva.

Vi sono 8 punti in cui si incontrano tre tangenti non infinitamente vicine della curva.

Di curve R^0_5 *ve ne sono di due specie caratterizzate da ciò che una contiene una sola retta quadrisecante, e l'altra ne contiene infinite formanti una quadrica.*

Una R^0_5 della prima specie si può generare come luogo del punto comune ai piani corrispondenti di tre fasci proiettivi, due doppi involutori, il terzo semplice.

Una R^0_5 della seconda specie si può generare come luogo del punto comune ai piani corrispondenti di tre fasci proiettivi, due semplici, il terzo triplo involutorio.

La R^0_5 della prima specie è l' intersezione parziale di due superficie cubiche aventi ancora in comune una cubica gobba e una retta che non la tagli; ovvero anche l' intersezione parziale di due superficie cubiche rigate aventi di comune una retta doppia, e due altre rette, di cui una tagli la prima e l' altra no.

La R^0_5 della seconda specie è l' intersezione parziale di una quadrica e di una rigata di 4.° ordine avente per retta tripla una quadrisecante di R^0_5.

Le trisecanti di una R^0_5 della prima specie formano una rigata di 8.° ordine, per la quale la R^0_5 è tripla e la sua quadrisecante è retta quadrupla.

Dal punto di vista della classificazione delle curve storte, la seconda R^0_5 non deve considerarsi come rappresentante una famiglia distinta rispetto alla prima R^0_5, ma un caso particolare di essa (v. su ciò HALPHEN, *J. École polyt.*, LII, pag. 12).

Le curve di quint' ordine furono considerate prima da CAYLEY (*Compt. Rend.*, LIV, LVIII, 1862, 1864; *Opere*, V, 15, 24); indi da STURM (*Fläch. 3ter Ord.* Leipzig, 1867) studiando le curve situate

sulla superficie cubica; poi se ne occuparono (in quanto alla $R^0{}_5$) BERTINI (*Collect. math.*, 1881), BERZOLARI (*Lincei*, Mem., 1893), e, in quanto alla $R^1{}_5$, WEYR (*Wiener Berichte*, 1884-85-88) e MONTESANO (*Acc. Napoli*, 1888).

(*Curve di 6.° ordine.*) Di curve storte di 6.° ordine ve ne sono cinque famiglie, caratterizzate dal numero dei punti doppi apparenti (v. Cap. IX, § 3). *Per ognuna di esse passa sempre una cubica.* Fra esse la più importante è quella di genere 4, *intersezione completa di una quadrica e di una cubica.* Questa curva è specialmente importante nella teoria delle funzioni abeliane di genere 4, perchè per tale teoria essa fa lo stesso ufficio, che la quartica piana per le funzioni abeliane di genere 3.

I numeri caratteristici per questa curva sono:

$$r = 18$$
$$m = 36$$
$$h = 6$$
$$g = 531$$
$$x = 126$$
$$y = 96$$
$$\alpha = 60.$$

Per un suo punto passano due trisecanti (le due rette della quadrica su cui essa è situata).

Il numero delle rette tangenti e secanti altrove è 24.

Il numero dei piani osculatori e tangenti altrove è 324.

La sviluppabile osculatrice ha 480 punti tripli.

La curva possiede 120 piani tritangenti, e non può naturalmente possedere alcuna quadrisecante.

Si è cominciato a studiare la configurazione dei 120 piani tritangenti della sestica storta, e dei 360 punti di contatto corrispondenti. Tale configurazione è da considerarsi come un'estensione per il genere $p = 4$, di ciò che è per il genere $p = 3$ la configurazione delle 28 tangenti doppie della quartica piana.

I 360 punti di contatto della sestica coi suoi piani tritangenti, stanno a 12 a 12 sopra 32130 quadriche.

Tali quadriche si possono riunire a coppie ed esistono otto specie distinte di tali coppie; una coppia di 1.ª specie è caratterizzata dalla proprietà che esistono 4 altre delle quadriche che incontrano in $6 + 6$ *punti (sulla sestica) ciascuna delle due date, ed esistono inoltre 16 altre quadriche che incontrano in 6 punti (sulla sestica) una delle due della coppia, e solo in tre punti l'altra, non esistendo poi quadriche aventi la proprietà opposta; come si vede, questa coppia possiede dunque una certa dissimmetria.*

Ci basti d'aver dato questi cenni; per altri particolari si vegga Pascal (*Lincei*, 1893).

Se si conoscono due *radici dell'equazione da cui dipende la determinazione dei 120 piani tritangenti della sestica storta, le altre 118 si scindono in 54 + 64 e l'equazione delle 64 ha per risolvente quella delle 54 la quale a sua volta si*

scinde in 27 fattori quadratici dopo la risoluzione di un' equazioue di 27mo grado la quale non ha risolventi di grado inferiore.

Se se ne conoscono tre, il problema dipende ancora da un' equazione di 27.^{mo} grado non avente risolventi di grado inferiore. Questo teorema è analogo a quello relativo alle 28 tangenti doppie della quartica piana o alle 27 rette della superficie cubica (v. PASCAL, *Lincei*, 1.° sem. 1893, pag. 120.)

Delle sestiche storte si occuparono CLEBSCH Crelle, LXIII), BAULE (*Diss.* Göttingen, 1872), WEYR (*Compt. Rend.*, LXXVI), NOETHER (*Crelle*, XCIII), LONDON (*Math. Ann.*, XLV), PETOT (*Compt. Rend.*, CII), ecc.

Per le curve di 7.° ordine citeremo un lavoro di WEYR (*Wien. Berichte*, LXIX), e della curva di 9.° ordine *intersezione completa di due superficie cubiche (cioè curva base di un fascio di superficie cubiche)* riferiremo qui i numeri caratteristici.

Essi sono:

$$r = 36$$
$$m = 81$$
$$h = 18$$
$$g = 3006$$
$$x = 576$$
$$y = 504$$
$$\alpha = 144, \qquad p = 10.$$

Per ogni punto della curva passano 11 trisecanti.

Vi sono 144 rette tangenti e secanti altrove, e 2160 piani osculatori e tangenti altrove.

Vi sono 3360 piani tritangenti.

Per tutte le varie degenerazioni della curva intersezione di due superficie cubiche vedi STURM (*Fläch. 3ter Ord.* Leipzig, 1867).

§ 6. — LE CURVE STORTE RAZIONALI.

Le curve *di genere zero* si dicono *razionali*, o anche *unicursali*. Sono state stabilite delle loro proprietà generali. Eccone alcune fra le più elementari, riferentisi specialmente ai loro numeri caratteristici. Si suppone naturalmente che la curva sia priva di punti singolari.

La sviluppabile osculatrice d'una curva gobba razionale d'ordine n, è d'ordine $2(n-1)$.

Vi sono $(n-1)^2$ *rette appoggiate a due rette arbitrarie e bisecanti della curva.*

Una retta mobile appoggiata ad una retta fissa e bisecante della curva, descrive una superficie gobba d'ordine $(n-1)^2$ *di cui la retta fissa è multipla d'ordine* $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$, *e la curva data è multipla d'ordine* $n-1$, *e avente* $2(n-1)(n-2)$ *punti cuspidali situati sulla curva razionale.*

La curva razionale ha evidentemente

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

punti doppi apparenti.

Per ogni suo punto passano $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ *trisecanti.*

Vi sono $\frac{(n-2)(n-3)^2(n-4)}{3\,.\,4}$ *quadrisecanti.*

La superficie gobba formata dalle trisecanti è di ordine

$$\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3}.$$

La classe della curva è $3(n-2)$.

Per un punto della curva passano $3(n-3)$ *piani osculatori altrove.*

Per ogni punto dello spazio passano

$$2(n-2)(n-3)$$

piani bitangenti.

Per ogni punto della curva passano

$$2(n-3)(n-4)$$

piani bitangenti altrove.

Ciascuna tangente è incontrata da $2(n-3)$ *altre tangenti.*

La curva ha $4(n-3)$ *piani stazionari.*

Vi sono $6(n-3)(n-4)$ *piani osculatori e tangenti altrove.*

Vi sono $2(n-2)(n-3)$ *rette tangenti e secanti altrove.*

La curva ha $\frac{4(n-3)(n-4)(n-5)}{3}$ *piani bitangenti.*

Una proprietà importante delle curve razionali è quella relativa alla cosiddetta *involuzione fondamentale* esistente sulla curva.

Le coordinate $x_1\, x_2\, x_3\, x_4$ di un punto della curva si possono esprimere in funzione razionale di un parametro λ mediante le relazioni

$$x_1 \equiv a_\lambda^n$$

$$x_2 \equiv b_\lambda^n$$

$$x_3 \equiv c_\lambda^n$$

$$x_4 \equiv d_\lambda^n$$

(dove con a_λ^n, b_λ^n, ... si intendono, in notazione simbolica, forme binarie di grado n). Si costruiscano le $n - 3$ forme di grado n, *apolari* (vedi Cap. II) con ciascuna delle quattro date, e quindi con una qualunque del sistema lineare individuato da quelle quattro.

Il sistema lineare individuato dalle $n - 3$ forme così costruite rappresenterà una involuzione (v. Cap. II) di gruppi di n punti sulla curva data; si ha dunque:

Sulla curva razionale data esiste una involuzione di ordine n e di specie $n - 4$, i cui gruppi di n punti, sono apolari con tutti i gruppi di n punti tagliati sulla curva da un piano qualunque dello spazio.

Questa involuzione è stata chiamata da Stahl, *fondamentale*.

Quando $n = 4$, allora l'involuzione evidentemente si riduce ad un gruppo solo di 4 punti. *Per la quartica storta di 2.ª specie (razionale) tal gruppo di quattro punti è quello dei quattro punti di contatto dei piani osculatori stazionari* (v. § 4). Però in tal caso intervengono altre involuzioni trovate in generale da Study, come abbiamo accennato nel § 4.

Per lo studio della *involuzione fondamentale* sulle curve razionali si vegga specialmente Stahl (*Crelle*, CIV; *Math. Ann.*, XL). Altri lavori sulle curve razionali sono quelli di Weyr (*Giorn. di Batt.* IX; *Ann. di mat.*, IV; *Crelle*, LXXIV; *Ist. Lomb.*, 1882; *Prag. Berichte*, 1883, etc.), Körndörfer (*Math. Ann.*, III), Brill (*Id.*, XXXVI), etc. Berzolari (*Ann. di mat.*, XXI) estende alcune delle considerazioni precedenti alle curve razionali in uno spazio ad un numero qualunque di dimensioni.

CAPITOLO XI.

Le superficie di 3.° ordine.

§1. — Generalità. Le superficie a punti doppi. Generazioni geometriche.

La superficie generale di 3.° ordine è di 12.ª classe; l'ordine del cono ad essa circoscritto e col vertice in un punto qualunque dello spazio, è 6; le generatrici di regresso di tal cono sono 6 e non vi sono generatrici doppie. L'ordine della curva parabolica è il 12.°

L'equazione generale della superficie generale di 3.° ordine contiene 19 coefficienti non omogenei.

Su di una superficie cubica generale vi sono 27 rette.

Se una superficie di 3.° ordine ha una linea doppia, questa non può essere che una retta sola; in tal caso però la superficie cubica è una rigata.

Per una siffatta superficie cubica, vi sono sulla retta doppia due punti uniplanari (v. Cap. IX, § 4) *e gli altri sono biplanari.*

Una superficie cubica può avere al massimo quattro punti doppi.

Non esistono superficie sviluppabili PROPRIE *di 3.° ordine, ma solo superficie* IMPROPRIE, *come i coni e i cilindri di 3.° ordine.*

Ecco una tabella delle varie specie di superficie cubiche a punti singolari, e di rigate cubiche *(di queste ultime ve ne sono solo due specie).*

Questa classificazione fu fatta in modo completo da CAYLEY (*Phil. Trans.*, 1869); i casi (5) (7) (11) (15) (20) erano già stati considerati da SCHLAEFLI (*Phil. Trans.*, 1863). Le rigate cubiche erano già state studiate da CREMONA (*Istit. Lombardo*, 1861; *Crelle*, LX); si vegga anche un lavoro di EM. WEYR, *Geom. der räuml. Erzeugnisse.* Leipzig, 1870) *

* Nelle seguenti tabelle rappresenteremo coi simboli $u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots v^{(1)}, v^{(2)} \ldots$ funzioni omogenee di gradi 1, 2, . . . in $x_1\, x_2\, x_3$.

Numero d'ordine	Natura della singolarità	Classe	Equazione della superficie
1	Senza punti singolari	12	
2	Un punto conico	10	$u^{(2)} x_4 + u^{(3)} = 0.$ Il punto conico è $x_1 = x_2 = x_3 = 0.$
3	Un punto biplanare	9	$u^{(1)} v^{(1)} + u^{(3)} = 0$ Il punto biplanare è $x_1 = x_2 = x_3 = 0.$
4	Due punti conici	8	Nell'equazione del caso (2) si supponga che $u^{(2)}$, $u^{(3)}$ contengano x_3 solo a primo grado.

	ni tangenti appartenga alla superficie. Esso è da considerarsi come la riunione di due punti conici		dotta $$x_1 x_2 x_4 + u^{(3)} = 0,$$ l'equazione pel caso (5) si ottiene supponendo per es. che $u^{(3)}$ non contenga $x_3{}^3$. I piani tangenti sono $x_1 = 0$, $x_2 = 0$.
6	Un punto conico e un punto biplanare	7	L'equazione per questo caso si può ottenere dal caso (4) supponendo che il coefficiente di x_3 si scinda in due fattori.
7	Un punto biplanare come nel caso (5), ma supponendo che il piano tangente alla superficie lungo la retta intersezione dei due piani tangenti coincida con uno di que-	7	Un' equazione ridotta per questo caso è la seguente $$x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3^2 + x_2^2 x_3 - a x_1^3 = 0.$$ Il punto biplanare è $$x_1 = x_2 = x_3 = 0,$$

Numero d'ordine	Natura della singolarità	Classe	Equazione della superficie
	sti. Tale singolarità è da considerarsi come la riunione di un punto conico con un punto biplanare. Il piano tangente lungo la retta taglia la superficie nella retta stessa contata due volte e in un'altra retta diversa		coi piani tangenti $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, e il piano tangente in un punto della retta intersezione di questi, è sempre $x_1 = 0$, che taglia la superficie in $x_1 = x_2 = 0$ contata due volte, e in $x_1 = x_3 = 0$ contata una sola volta.
8	Tre punti conici	6	Nell'equazione del caso (2) si supponga che $u^{(2)}$ $u^{(3)}$ contengano x_2, x_3 solo a primo grado.

			tenga x_3 solo a primo grado e il coefficiente di x_3 si scinda in due fattori.
10	Un punto conico e un punto biplanare della specie di quelli del caso (5)	6	Basterà nel caso (5) supporre che $u^{(3)}$ non contenga neanche x_3^2.
11	Un punto biplanare come nel caso (7), ma colla nuova particolarità che il piano tangente lungo la retta tagli la superficie nella stessa retta contata tre volte. Si dice allora che quella retta è *osculante* alla superficie, e tal punto è da considerarsi come la riunione di tre punti conici	6	Equazione ridotta è: $x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3^2 + x_2^3 - a x_1^3 = 0.$

Numero d'ordine	Natura della singolarità	Classe	Equazione della superficie
12	Un punto uniplanare	6	$(x_1 + x_2 + x_3)^2 x_4 + x_1 x_2 x_3 = 0.$
13	Un punto biplanare ordinario e due punti conici	5	$x_2 x_3 x_4 + x_1^2 (x_1 + x_2 + x_3) = 0.$
14	Un punto biplanare come nel caso (7) e un punto conico	5	$x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3^2 + x_2^2 x_3 = 0.$
15	Un punto uniplanare, ma tale che il piano tangente in esso taglia la superficie lungo tre rette di cui due coincidenti	5	$x_1^2 x_4 + x_2^2 x_3 + x_1 x_3^2 = 0.$
16	Quattro punti conici	4	$x_1 x_2 x_3 + x_2 x_3 x_4 +$

	punto conico		
18	Un punto come nel caso (5) e due punti conici	4	$x_1 x_2 x_4 + (x_1 + x_2) x_3^2 = 0.$
19	Un punto come nel caso (11) e un punto conico	4	$x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3^2 + x_2^3 = 0.$
20	Un punto uniplanare ma tale che il piano tangente in esso taglia la superficie secondo tre rette coincidenti	4	$x_1^2 x_4 + x_1 x_3^2 + x_2^3 = 0.$
21	Tre punti biplanari	3	Basterà supporre nell'equazione del caso (9) che anche la x_2 sia contenuta a primo grado e che il suo coefficiente si scinda in due fattori.

Numero d'ordine	Natura della singolarità	Classe	Equazione della superficie
			Nel caso particolare in cui ai tre punti biplanari corrisponde a due a due un piano tangente comune la equazione ridotta della superficie è $x_1^3 + x_2 x_3 x_4 = 0.$
22	Una retta doppia, i cui punti sono tutti biplanari, meno due che sono uniplanari. La superficie è rigata. Essa è generata da una retta che si appoggia a due altre (direttrici) in modo che le punteggiate determinate su queste, di cui una sia semplice, e l'altra doppia	3	$x_3 x_1^2 - x_4 x_2^2 = 0.$ La retta doppia è $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. Le direttrici sono le rette $x_1 = 0, \quad x_2 = 0$ e $x_3 = 0, \quad x_4 = 0.$

	retta doppia.		
23	Una retta doppia nei cui punti (biplanari o uniplanari) un piano tangente sia sempre il medesimo. Questa superficie può considerarsi come caso limite della precedente, quando le due direttrici tendano indefinitivamente ad avvicinarsi. Per la sua generazione vedi SALMON-FIEDLER cit. pag. 370. Questa superficie si suol chiamare *la rigata cubica di* CAYLEY.	3	$x_3^3 + x_1(x_1 x_3 + x_2 x_4) = 0.$ Il piano $x_1 = 0$ è tangente in ogni punto della retta doppia $x_1 = x_2 = 0$, e taglia la superficie secondo questa medesima retta contata *tre* volte. L'altro piano tangente inviluppa un iperboloide $x_1 x_3 + x_2 x_4 = 0.$

b'	27	15	9	7	3	3	0	3	1	3	0	0	1
k'	216	105	36	21	3	3	0	3	0	3	0	0	0
t'	45	15	6	3	0	1	0	1	0	1	0	0	0
ρ'	27	15	9	7	3	3	0	3	1	3	0	0	1
c'	24	18	16	12	10	6	8	6	4	0	2	0	0
h'	180	96	84	38	24	6	24	7	2	0	0	0	0
r'	30	24	18	17	12	9	8	7	5	0	2	0	0
σ'	12	12	12	10	9	6	8	6	4	0	2	0	0
β'	54	30	18	13	6	3	0	3	1	0	0	0	0

* I numeri segnati nella prima linea sono quelli delle Superficie elencate nella precedente tabella, e per la significazione delle lettere contenute nella prima colonna, rimandiamo al Capitolo IX, § 1.

Per il numero e la configurazione delle rette situate sulle cubiche a punti doppi, v. più sotto il § 3.

Le varie generazioni geometriche delle superficie cubiche sono le seguenti:

Si abbiano due triedri A e B; ogni piano del primo taglia ogni piano del secondo e così si hanno in tutto nove rette; per un punto P dello spazio si faccia passare un piano il quale taglia le nove rette in nove punti, pei quali e per P passa sempre una curva di 3.° ordine; *il luogo di questa quando si muti in tutti i possibili modi il piano passante per P, è una superficie generale di 3.° ordine passante per P e per le nove rette*, (Steiner, *Berl. Ac.* 1856, *Crelle*, LIII).

Dati due fasci proiettivi uno di quadriche e uno di piani, il luogo della curva intersezione degli elementi corrispondenti è una superficie cubica (Id.)

In particolare:

Il luogo delle coniche in cui ogni quadrica di un fascio è tagliata dal piano polare di un punto P rispetto a sè stessa è una superficie cubica (Id.)

Il luogo dei punti comuni a tre piani corrispondenti di tre reti di piani proiettive, è una superficie di 3.° ordine (Grassmann, *Crelle*, IL; Schröter, *Crelle*, LXII).

Il luogo del polo di un piano rispetto a tutte le quadriche di una rete è una superficie cubica (Steiner).

Il luogo del punto d' intersezione dei tre piani polari di tutti i punti di un altro piano rispetto a tre quadriche non appartenenti al medesimo fascio, è una superficie cubica (Id.)

Si abbiano sei fasci di piani a, b, c; a_1, b_1, c_1, e i tre assi dei tre primi, come quelli dei tre ultimi non si incontrino; si stabilisca una relazione proiettiva tra a e a_1; b e b_1; c e c_1. Si consideri un piano π e di esso un punto P pel quale passeranno tre piani dei primi tre fasci, e ad essi corrisponderanno tre piani nei secondi tre fasci. *Il luogo del punto d' incontro di tali ultimi tre piani, quando P si muove in π, è una superficie cubica* (August, *Diss.* Berlin, 1862; Sturm, *Fläch. 3.ter Ordn.* pag. 44.).

Una superficie cubica con un punto conico si può generare nel seguente modo (Salmon):

I quattro piani di un tetraedro rotino intorno a 4 punti mentre i tre lati di una faccia si muovano in tre piani fissi; *il luogo del vertice opposto descrive una superficie cubica di cui è punto doppio il punto d'incontro dei tre piani fissi.* Questo teorema è un caso particolare di quello di Grassmann.

Sieno $A_1 A_2 A_3 A_4$ quattro punti di un piano e $A_1' A_2' A_3' A_4'$ le loro proiezioni da un punto P su quattro piani dati; *il luogo di P per il quale i quattro punti A' sono in uno stesso piano è una superficie cubica con quattro punti doppi, i quali sono i vertici del tetraedro dei quattro piani assegnati* (Sturm, cit., pag. 381).

Questa superficie a 4 punti conici *(di 4.ª classe)* fu studiata per la prima volta da Cayley nel 1844 (*J. de Liouville*, IX) (alcuni la chiamano perciò *la superficie di Cayley*) ed è interessante anche per il fatto che essa *è la polare reciproca della superficie di* Steiner (v. Cap. XII, § 8). Questa

superficie fu anche studiata da Eckard nel lavoro sottocitato, e da altri.

I piedi delle perpendicolari abbassate da un punto della superficie di Cayley, sulle 4 facce del tetraedro dei punti doppi, stanno in un piano.

Questa proprietà dà luogo ad una costruzione che è un caso particolare di quella sopraindicata.

Il Beltrami dallo studio di alcune proprietà stereometriche ricavò alcune semplici proprietà della superficie in parola (*Giorn. di Batt.* I). Esse sono le seguenti:

I punti medii dei 28 segmenti determinati dai centri delle 8 sfere inscritte in un tetraedro, giacciono in una superficie di 3.º ordine che contiene interamente i sei spigoli del tetraedro stesso. Questa superficie è quella di Cayley, *ha quattro punti conici che sono i vertici del tetraedro.*

I quattro coni aventi i vertici nei vertici del tetraedro e circoscritti alla superficie del 3.º ordine, sono coni di 2.º ordine che si segano a due a due lungo sei coniche piane. Il piano della conica d'intersezione dei due coni aventi i vertici agli estremi di uno spigolo, passa per lo spigolo opposto ed è coniugato armonicamente rispetto alle due facce del tetraedro che si segano lungo questo spigolo, col piano tangente alla superficie lungo questo medesimo spigolo. Inoltre tutti i 6 piani anzidetti passano per un solo e medesimo punto.

I più antichi lavori sulla superficie di 3.º ordine sono specialmente quelli di Cayley e Salmon (*Camb. math. J.*, IV, 1849), di Sylvester (*Id.*, VI, 1851), di Steiner *(cit.)* e di Grassmann *(cit.)*.

Indi in questa teoria furono lavori importantissimi quelli di CREMONA (*Crelle*, LXVIII) e di STURM premiati dall'Accademia di Berlino nel 1866. Lo STURM pubblicò un libro sulle superficie cubiche (Leipzig, 1867) e una larga parte della traduzione tedesca della *Teoria delle superficie* di CREMONA (*trad. da* CURTZE, Berlin, 1870) è dedicata alle medesime superficie.

Di superficie cubiche speciali o a punti singolari si occuparono fra gli altri CAYLEY *(cit. a pag. 387)*; SCHLAEFLI *(idem)*; CLEBSCH (*Math. Ann.*, IV; *Gött. Nach.*, 1872); ECKARDT (*Math. Ann.*, V, X); KOHN (*Wien. Ber.*, XCVI, 1887), ecc.

Delle rigate di 3.° ordine si occuparono CAYLEY (*Phil. Maz.* 1862, 1864; *Phil. Trans.* 1864), CREMONA (*Ist. Lomb.*, 1860; *Crelle*, LX), EM. WEYR (cit. a pag. 387), ecc.

Anche nella *Geom. des Raumes*, II, di SALMON-FIEDLER, e nella *Geom. der Lage* di REYE si può trovare diffusamente trattata la teoria delle superficie cubiche.

Una ricca collezione di modelli in gesso delle varie forme delle superficie di 3.° ordine si trova nella raccolta edita da L. BRILL in *Darmstadt* (v. il suo *Catalog math. Modelle, etc.*, Darmstadt, 1892) ed è posseduta anche dall'Istituto matematico dell' Università di Pavia.

§ 2. — Il pentaedro di Sylvester. L'Hessiana della superficie cubica.

La equazione di una superficie generale di 3.º ordine senza punti singolari, può porsi sotto la forma

$$a_1 X_1^3 + a_2 X_2^3 + a_3 X_3^3 + a_4 X_4^3 + a_5 X_5^3 = 0$$

dove $X_1 = 0, X_2 = 0, \ldots X_5 = 0$ *sono le equazioni di cinque piani, formanti il cosiddetto* PENTAEDRO DI SYLVESTER. Si sa che fra le cinque X esiste sempre una relazione identica lineare omogenea; ora si può naturalmente sempre supporre che le costanti che entrano nelle equazioni dei piani X, sieno scelte in modo che la relazione lineare omogenea esistente fra i primi membri delle equazioni dei cinque piani, si riduca semplicemente alla forma

$$\sum_1^5 X_i = 0.$$

Quindi il teorema può anche enunciarsi dicendo che *la equazione della superficie cubica può porsi sotto la forma (equazione pentaedrale)*

$$\sum_1^5 a_i X_i^3 = 0$$

mentre fra le X sussiste la relazione identica

$$\sum_1^5 X_i = 0.$$

Questo teorema importantissimo fu enunciato prima da SYLVESTER senza dimostrazione (*Camb. Math. Journ.*. VI, 1851, pag. 198); indi fu dimostrato rigorosamente da CLEBSCH (*Crelle*, LIX); a questo lavoro fanno seguito gli altri di GORDAN (*Math. Ann.*, V) e REYE (*Crelle*, LXXVIII).

La Hessiana della superficie cubica la cui equazione è messa sotto la forma precedente, ha per equazione

$$\frac{1}{a_1 X_1}+\frac{1}{a_2 X_2}+\frac{1}{a_3 X_3}+\frac{1}{a_4 X_4}+\frac{1}{a_5 X_5}=0.$$

La Hessiana e la Steineriana di una superficie di 3.° ordine sono due superficie identiche (vedi Cap. IX, § 5), *e sono di 4.° ordine.*

I punti della Hessiana si corrispondono dunque a due a due in modo che la quadrica polare di un suo punto rispetto alla superficie cubica, è un cono avente il vertice in un altro punto della Hessiana stessa.

Tale corrispondenza è reciproca.

La retta che congiunge due punti corrispondenti della Hessiana ha la proprietà che i piani polari dei suoi punti passano per una retta fissa che è tangente doppia (tocca in due punti) della Hessiana.

La Hessiana possiede 10 punti doppi e 10 rette; i primi sono distribuiti a tre a tre sulle 10 rette, e queste passano tre a tre per i dieci punti.

Tali 10 punti e 10 rette sono rispettivamente i vertici e gli spigoli del pentaedro di Sylvester, relativo alla data superficie cubica.

La quadrica polare, rispetto alla superficie cubica, di uno dei 10 punti doppii dell' Hessiana, si scinde in due piani il cui asse è situato sull'Hessiana stessa, ed è una delle 10 rette sopraindicate; i due piani sono coniugati armonici rispetto alle due facce del pentaedro passanti per quella retta.

Con questo teorema resta stabilita una corrispondenza fra i 10 punti e le 10 rette.

L'intersezione (di 12° ordine) della superficie cubica colla sua Hessiana è curva parabolica per entrambe le superficie (STURM)

La sviluppabile circoscritta alla superficie cubica lungo la curva parabolica è circoscritta anche all' Hessiana.

Ogni retta della superficie cubica è tangente doppia della Hessiana.

La determinazione dei 10 punti doppi della Hessiana dipende dalla risoluzione di un'equazione di 10.° grado, la quale dipende a sua volta dalla risoluzione di una di 5.° grado (v. CLEBSCH, *Crelle*, IL; SALMON-FIEDLER, cit. § 298-299).

Sulla configurazione delle coppie di piani che rappresentano le quadriche polari dei 10 punti doppi dell'Hessiana, e delle rette nelle quali esse si incontrano, ecc. c'è un teorema di CLEBSCH (loc. cit.) riportato e completato in STURM e in SALMON-FIEDLER.

Se nella equazione pentaedrale della superficie cubica si suppongono tutte le a eguali ad 1, si ha l'equazione

$$\Sigma X_i{}^3 = 0.$$

mentre fra le X sussista l'altra relazione

$$\Sigma X_i = 0.$$

La superficie rappresentata dalla precedente equazione si chiama la *superficie diagonale di* Clebsch (*Math. Ann.*, IV).

Considerando in ciascuna delle cinque facce del pentaedro, il quadrilatero determinato dalle altre quattro facce, e di questo le tre diagonali, le 15 diagonali così formate giacciono sulla superficie di Clebsch; di qui il nome di *superficie diagonale.*

La superficie ha dunque 15 rette che a 3 a 3 passano 10 volte per un punto, e cinque volte stanno in un piano.

Tutti i punti della superficie diagonale sono iperbolici (v. Cap. IX, § 1) *meno i 10 vertici del pentaedro i quali appartengono alla superficie e sono per essa punti parabolici* (Klein, *Math. Ann.*, VI).

La parte reale della curva parabolica si riduce solo a tali 10 punti isolati.

Le altre 12 rette della superficie di Clebsch, (oltre le 15 diagonali) formano una bisestupla (v. § 3).

Una superficie che sta fra la generale di 3.° ordine e la diagonale, è quella di Cayley (*Phil. Mag.*, I, 1864):

$$a_1 X_1^3 + a_2 X_2^3 + b(X_3^3 + X_4^3 + X_5^3) = 0.$$

Essa ha tre piani tritangenti che passano per una retta e tre rette che passano per un punto.

Altre ricerche sul pentaedro sono quelle di Rodenberg (*Math. Ann.,* XIV; *Diss.* Göttingen, 1874). Per altre ricerche di Cremona e altri v. più sotto il § 3.

Come estensione di un teorema sulle cubiche piane il CLEBSCH trovò il seguente teorema: (*Crelle*, LXIII).

Il piano polare di un punto P d'una superficie cubica rispetto alla sua Hessiana taglia il piano tangente alla superficie cubica in P, in una retta che è retta d' inflessione della intersezione del piano stesso colla cubica.

L' inviluppo dei piani che tagliano la superficie cubica secondo cubiche armoniche * *è una superficie di 6.ª classe, e l' inviluppo dei piani che la tagliano secondo cubiche equianarmoniche è una superficie di 4.ª classe. Queste due superficie sono inscritte nella sviluppabile dei piani stazionari, cioè nella sviluppabile circoscritta alla superficie cubica lungo la curva parabolica.*

Fra i piani che tagliano la superficie cubica secondo cubiche equianarmoniche vi sono i dieci piani passanti per un punto doppio della Hessiana e per la retta corrispondente.

Per altre proprietà della Hessiana della cubica vedi specialmente CREMONA e STURM (op. cit.)

---

* *Cubiche armoniche* sono quelle per le quali è eguale a − 1 il rapporto anarmonico di cui si parla a pag. 252 di questo volume.

Così *cubiche equianarmoniche* sono quelle per le quali il medesimo rapporto ha per valore — ε (radice cubica di — 1).

§ 3. — Le rette della superficie di 3.° ordine. I piani tritangenti Gli esaedri polari di Cremona.

Come abbiamo già detto, *una superficie generale di 3.° ordine possiede 27 rette.*

Ogni piano che passa per una di queste rette è un piano bitangente per la superficie; i punti di contatto sono i due nei quali la retta taglia la conica, intersezione residua del piano colla superficie.

In ciascuno di tali fasci di piani, vi sono 5 piani pei quali tale conica si spezza in due rette; tali piani sono allora piani tritangenti della superficie, cioè:

Per ogni retta passano 5 dei 45 piani tritangenti, e naturalmente ogni piano tritangente passa per tre rette.

Ogni retta della superficie tocca la curva parabolica della medesima in due punti.

I punti di contatto colla superficie dei piani bitangenti passanti per una retta fissa della stessa, formano sulla retta un'involuzione di cui i punti doppi sono i due in cui la retta tocca la curva parabolica.

Da uno dei teoremi precedenti si ricava anche:

Ogni retta ne incontra 10 altre, e non incontra le rimanenti 16. Vi sono 135 punti d'incontro di rette della superficie.

Due rette a, b, che non si incontrano, sono incontrate dalle medesime cinque rette; fra le ri-

manenti 20 ve ne sono cinque che incontrano solo a, cinque che incontrano solo b, e dieci che non incontrano nè a nè b.

Vi sono 216 coppie gobbe di rette (che non si incontrano).

Tre rette che non si tagliano sono incontrate da altre tre rette le quali fra loro neanche si tagliano; e vi sono sei altre rette che non incontrano nessuna delle tre date.

Le tre rette gobbe e le altre tre gobbe che le tagliano formano ciò che si chiama una *biterna* (*Doppeldrei*; Sturm).

Vi sono 360 biterne.

Quattro rette che non si tagliano sono incontrate da due rette, e non incontrate da tre altre.

Di assiemi di cinque rette che non si tagliano (quintuple gobbe) ve ne sono di due specie; le quintuple della prima specie sono caratterizzate dal fatto che esiste una sesta retta che non incontra nessuna di quelle della quintupla; per quelle della seconda specie invece tale sesta retta non esiste. Vi sono 432 quintuple di 1.ª specie e 216 di 2.ª specie.

Vi sono 72 sestuple gobbe cioè assiemi di sei rette che a due a due non si incontrano, e non esistono assiemi gobbi superiori.

Le 72 sestuple gobbe si possono riunire in coppie colla proprietà che se

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \end{matrix}$$

sono le rette delle due sestuple, ogni a_i non incontra b_i e incontra ogni altra retta b, e viceversa. Una siffatta coppia si dice una *bisestupla di* Schaefli. *Di queste quindi ve ne sono 36.*

Due bisestuple hanno o 4 o 6 rette in comune.

Due piani tritangenti non aventi rette della superficie in comune individuano un terzo piano che sta con essi nella medesima relazione, e in modo che le 9 rette contenute nei tre piani si possono in un altro solo modo riunire ancora in tre altri piani; queste due terne di piani si dice che formano una *coppia di triedri coniugati (di* STEINER).

Vi sono 120 coppie di triedri coniugati.

Le 15 rette che restano dalle 27 quando si sopprimano le 12 di una bisestupla stanno a tre a tre in 15 piani, i quali a 6 a 6 formano 10 coppie di triedri coniugati.

È evidente che intersecandosi due triedri coniugati in nove rette della superficie, e ciascuno di essi rappresentando una superficie degenerata di 3.° ordine, si può dire che essi determinano un fascio di superficie cubiche alle quali appartiene la data.

Se

$$A=0,\quad B=0,\quad C=0$$
$$A'=0,\quad B'=0,\quad C'=0$$

sono le equazioni dei piani di due triedri coniugati, l'equazione della superficie è del tipo

$$A\,B\,C+k\,A'\,B'\,C'=0$$

Ad ogni coppia di triedri coniugati ne corrispondono due altre, in modo che il complesso delle tre coppie contiene tutte le 27 rette della superficie. Di tali complessi di tre coppie di triedri coniugati ve ne sono 40.

La costruzione geometrica delle 27 rette della superficie è la seguente (SALMON, STURM):

Assumiamo quattro rette b_3, b_4, b_5, b_6 che non si incontrino e che non appartengano al medesimo iperboloide; costruiamo le due rette a_1 a_2 (che non si incontrano) e che incontrano le quattro precedenti; sia b_2 una retta la quale incontri solo a_1 e non a_2 e che non sta sullo stesso iperboloide con nessun gruppo di tre rette scelte fra le quattro b, e sia b_1 una simile altra retta che incontri però solo a_2 e non a_1. Scegliamo su a_1 quattro punti arbitrariamente, e tre punti su ciascuna delle cinque rette b_2, b_3, b_4, b_5, b_6. *La superficie cubica che passa per tali 19 punti contiene tutte le rette a, b, costruite; inoltre essa contiene anche la retta a_3 la quale insieme con a_1 forma la coppia di rette che incontrano la quaterna $b_2\, b_4\, b_5\, b_6$ e che è la stessa di quella che insieme con a_2 forma la coppia di rette che incontrano la quaterna $b_1\, b_4\, b_5\, b_6$; analogamente costruendo le altre rette a_4, a_5, a_6 le quali taglino rispettivamente le rette delle quaterne*

$$b_2\, b_3\, b_5\, b_6, \quad b_2\, b_3\, b_4\, b_6, \quad b_2\, b_3\, b_4\, b_5$$

si hanno in tutto 12 rette situate sulla superficie cubica e formanti una bisestupla.

Le altre 15 rette si costruiscono formando le intersezioni dei piani

$$(a_i\, b_j) \quad \text{e} \quad (a_j\, b_i) \qquad (i \text{ e } j \text{ diversi})$$

le quali sono esattamente 15.

Il gruppo delle sostituzioni fra le 27 rette della superficie di 3.° ordine ha per ordine 6!72.

La determinazione di queste 27 rette dipende dalla risoluzione di un'equazione la quale non ha

risolventi di grado inferiore; conosciuta però una delle radici di tale equazione, cioè una delle 27 rette, le altri radici si separano in 10 + 16, *e l'equazione delle seconde 16 ha per risolvente la equazione delle prime 10, la quale a sua volta, colla risoluzione d' un' equazione generale di 5.° grado, si decompone in cinque fattori quadratici.*

Conoscendo ancora una radice fra le 16 cioè, conoscendo in tutto due rette che non si tagliano, la conoscenza delle altre dipende ancora da una equazione generale di 5.° grado (Jordan).

Lo studio della equazione delle 27 rette fu fatto da Clebsch (*Gött. Abhand.*, XIV, 1868-69), Jordan (*Subst.*, pag. 310-368), Sylvester (*Proc. London math. Soc.*, II, 155), Klein (*J. de Liouville*, IV, pag. 169 (1887)), Burkhardt (*Gött. Nach.*, 1892).

Vogliamo ora passare ad esporre una certa relazione trovata da Cremona (*Math. Ann.*, XIII) fra le bisestuple gobbe e il pentaedro di Sylvester. Immaginiamo posta l'equazione della superficie cubica sotto la forma

$$Y_1^3 + Y_2^3 + Y_3^3 + Y_4^3 + Y_5^3 + Y_6^3 = 0$$

dove le $Y_i = 0$ rappresentano 6 piani e si abbia

$$\Sigma\, Y_i = 0.$$

Si può vedere che l'equazione della superficie potrà allora porsi sotto la forma

$$(Y_2 + Y_3)\,(Y_3 + Y_1)\,(Y_1 + Y_2) + \\ + (Y_5 + Y_6)\,(Y_6 + Y_4)\,(Y_4 + Y_5) = 0$$

e anche naturalmente sotto tutte le altre forme analoghe a questa e che da questa si ricavano con qualunque permutazione degli indici. Di tali equazioni se ne avranno perciò tante quanti sono i modi di dividere sei elementi in due gruppi di $3+3$, cioè 10.

I 15 piani $Y_i + Y_j = 0$ *sono piani tritangenti della superficie, ed essi a sei a sei sono i piani di due triedri coniugati relativi alla superficie stessa.*

I sei piani $Y_i = 0$ formano un cosiddetto *esaedro polare* (CREMONA).

Le 10 coppie di vertici opposti dell'esaedro polare (cioè p. es. i punti

$$Y_1 = 0,\ Y_2 = 0,\ Y_3 = 0 \text{ e } Y_4 = 0,\ Y_5 = 0,\ Y_6 = 0)$$

sono coppie di punti corrispondenti sulla superficie Hessiana (v. § 2); di quì il nome di esaedro POLARE, giacchè i punti corrispondenti dell'Hessiana sono tali che il cono polare dell'uno rispetto alla cubica ha il vertice nell'altro punto.

I vertici opposti dell'esaedro polare sono anche i vertici di due triedri coniugati formati coi piani tritangenti della superficie cubica.

È evidente che i tre piani tritangenti

$$Y_h + Y_k = 0$$
$$Y_i + Y_j = 0$$
$$Y_l + Y_m = 0$$

dove h, k, i, j, l, m, rappresentano una permutazione dei numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6, *si incontrano lungo la medesima retta della superficie.* Dunque:

I 15 piani tritangenti $Y_i + Y_j = 0$ *passano per 15 rette della superficie.* Perciò:

Le altre 12 rette della superficie formano una bisestupla (v. sopra); onde abbiamo che *ad ogni esaedro polare corrisponde una bisestupla e reciprocamente.*

Vi sono 36 esaedri polari.

È notevole il seguente teorema:

Due esaedri polari determinano due superficie sviluppabili di 3.ª classe ad essi iscritte; queste due sviluppabili hanno comuni 5 piani tangenti; i quali formano il pentaedro di Sylvester.

Per ulteriori ricerche sulle relazioni fra il pentaedro e gli esaedri vedi Beltrami (*Ist. Lomb.*, 1879), e Meyer (*Apolarität*, ecc., Tübingen, 1883).

Una superficie cubica con un punto doppio, contiene 6 rette passanti per il punti doppio e 15 altre rette; *ciascuna delle prime 6 è da considerarsi come la riunione di due rette; quindi vi sono anche 15 piani tritangenti passanti pel punto doppio e 15 altri piani, passanti per le altre 15 rette.*

La configurazione di questi ultimi 15 piani e 15 rette è simile a quella delle 15 rette (e piani con esse formati) che restano dalle 27 quando se ne tolgano le 12 rette di una bisestupla.

Di questa configurazione in relazione con quelle degli esagoni di Pascal (v. pag. 127), si è occupato Cremona (*Mem. Lincei.* 1876-77).

Una superficie cubica con due punti doppi possiede una retta che congiunge i due punti doppi, 8 rette passanti per uno di questi, e 7 altre rette.

Una superficie cubica con 3 punti doppi, contiene tre rette che congiungono a due a due i tre punti doppi, 6 rette passanti per uno di essi, e 3 altre rette.

Una superficie cubica con 4 punti doppii, contiene 6 rette che passano per due di questi, e 3 altre rette non passanti per alcuno di essi.

Delle rette della superficie cubica si occuparono prima CAYLEY e SALMON (*Camb. math. J.*, IV), e STEINER (*Crelle*, LIII). Indi se ne occuparono SCHLAEFLI (*Quart. Journ.*, II), STURM (*Fläch. 3ter Ord.* Leipzig, 1867; *Math. Ann.*, XXIII) e AFFOLTER (*Arch. v. Grunert*, LVI) che studiarono specialmente gli *assiemi gobbi* di rette, SCHROETER (*Crelle*, LXII), CREMONA (*Ist. Lomb.*, 1870-71; *Crelle*, LXVIII).

Più recenti lavori sulla configurazione delle rette e dei piani, sui poliedri che con essi possono formarsi, ecc., sono quelli di BERTINI (*Ann. di mat.*, XII), PASCAL (*Ann. di mat.*, XX, XXI; *Istituto Lomb.*, 1892-93).

La cosidetta *notazione di* SCHLAEFLI per le 27 rette è la seguente:

Si indichino con

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \end{matrix} \quad .$$

le rette di una bisestupla, dove, come si sa, ogni a_i non incontra alcuna altra a, e incontra tutte le b meno b_i.

Indichiamo ora con c_{ij} la retta intersezione dei piani

$$a_i\, b_j \quad , \quad a_j\, b_i \; ;$$

queste c_{ij} saranno le altre 15 rette. Due rette c aventi un indice in comune *non si incontrano;* due

c non aventi alcun indice in comune *si incontrano;* un *a* (o *b*) incontra una *c* purchè l'indice di *a* sia uno dei due di *c*.

Un'altra rappresentazione delle 27 rette, e che in sostanza può anche ricavarsi dalla precedente, è quella di farle corrispondere una ad una alle rette che congiungono a due a due otto punti fondamentali, 1, 2,...8 quando fra tali congiungenti se ne sopprima una, p. es. la (12). Si considerano allora come concorrenti o no due rette, secondochè insieme alla (12) possono o no essere parte di due figure fondamentali che si chiamano le *quaterne-zero*, e che risultano o di quattro rette come (12) (34) (56) (78), o di quattro altre come (12) (23) (34) (41).

È importante notare che la configurazione delle rette quando la superficie acquista punti doppi, si può studiare facendo in questa figura avvicinare fra loro due dei punti, cosicchè in certo modo anche questa figura venga ad acquistare dei punti doppi.

Inoltre per studiare la configurazione delle rette reali appartenenti ad una superficie reale, basterà nella medesima figura supporre immaginari coniugati due dei punti, ovvero 4 ecc. e dedurne le conseguenze all'uopo (v. § 4).

Mediante questa figura lo studio della configurazione delle 27 rette è affine a quello delle 28 tangenti doppie della quartica piana. (V. su ciò anche GEISER, *Math. Ann.*, I).

§ 4. — Classificazione delle superficie cubiche reali generali.

Le superficie cubiche reali senza punti doppi si possono classificare dal punto di vista della realità o meno delle rette su esse situate.

Si hanno propriamente cinque specie di siffatte superficie cubiche, e cioè:

a) Tutte le rette sono reali; anche i piani tritangenti sono allora tutti reali. Il pentaedro è reale;

b) 15 rette e 15 piani sono reali, i quali a tre a tre passano per una retta reale. Queste 15 rette sono quelle che restano quando dalle 27 rette si sopprimono le 12 di una bisestupla;

c) 7 rette e 5 piani sono reali, e i 5 piani passano tutti per una medesima retta reale. Quattro altre rette sono immaginarie ma passano ciascuna per un punto reale. *

d) 3 rette e 7 piani sono reali; le tre rette sono in uno stesso piano; per ciascuna di esse, oltre questo piano, passano ancora altri 2 piani reali. Dodici rette sono immaginarie ma passanti per un punto reale;

e) 3 rette e 13 piani sono reali; le tre rette sono in uno stesso piano; per ciascuna di esse, oltre questo piano, passano ancora altri 4 piani

---

* È bene avvertire, per comodo degli studiosi, che nei libri tedeschi siffatte rette sono chiamate *punktirte Geraden.*

reali. Le altre 24 rette contengono tutte un punto reale.

Questa classificazione fu fatta da Schlaefli (*Quart. J.* II, 55, 110; *Phil. Trans.*, CLIII, 193) il quale si occupò anche delle superficie a punti singolari. Dello stesso soggetto si occuparono anche Cremona e Sturm (cit.), e più recentemente Klein (*Math. Ann.*, VI) e Schlaefli (*Ann. di mat.*, V).

Uno studio affine a quello di questo paragrafo è quello sulla forma e sulle proprietà di situazione delle superficie cubiche delle varie specie. Servendosi della circostanza che il contorno d'una superficie cubica proiettata da un suo punto, in un piano, è una quartica, e facendo una specie di proiezione stereografica della superficie su di un piano doppio, cioè su due piani sovrapposti riuniti lungo il contorno della quartica, lo Zeuthen (*Math. Ann.*, VIII) ha studiato la posizione delle varie falde reali delle superficie cubiche (v. anche *Math. Ann.*, VII, pag. 428 e seg.).

§ 5. — Rappresentazioni piane della superficie cubica.

Di rappresentazioni piane della superficie cubica se ne possono immaginare varie.

Si immagini una corrispondenza proiettiva (biunivoca) fra tre sistemi lineari di 3.^{a} specie di piani, e il sistema dei punti dello spazio ordinario, in maniera che ad ogni piano di un sistema

corrisponda un piano in ciascuno degli altri due e anche un punto P dello spazio, e viceversa ad ogni punto P dello spazio corrispondano tre piani in ciascuno dei tre sistemi; *se P descrive un piano, i piani corrispondenti descrivono tre reti e il punto d'incontro di essi descrive una superficie generale di 3.° ordine* (Grassmann, v. § 1), *i cui punti saranno così rappresentati sul piano.*

Tutte le superficie cubiche corrispondenti in tal modo a tutti i piani dello spazio, passano per una medesima sestica storta; ai punti di questa non corrispondono nel piano rappresentativo dei punti, ma delle rette.

I sei punti in cui la sestica incontra il piano rappresentativo corrispondono a sei rette ($a_1 \dots a_6$) della superficie cubica; essi furono chiamati da Cremona punti fondamentali della rappresentazione piana della superficie S_3, e indicati colle cifre 1, 2,... 6.

Le 6 coniche che passano per cinque dei punti fondamentali, corrispondono ad altre sei rette ($b_1 \dots b_6$) della superficie cubica, e le 15 rette che congiungono a due a due i 6 punti fondamentali corrispondono alle rimanenti 15 rette di S_3, (c_{rs}).

Le rette ($b_1 \dots b_6$) che corrispondono alle 6 coniche e quelle ($a_1 \dots a_6$) che corrispondono ai 6 punti formano una bisestupla di Schläfli.

Ad una cubica piana situata su S_3 corrisponde nel piano una cubica passante per i sei punti fondamentali.

Alla conica contenuta in un piano passante per una retta a, corrisponde una cubica passante per i 6 punti fondamentali e avente uno d'essi come doppio.

Alla conica contenuta in un piano passante per una retta b, corrisponde una retta passante per un punto fondamentale.

Alla conica contenuta in un piano passante per una retta c_{rs} corrisponde una conica passante per quattro punti fondamentali, eccetto r ed s.

Alla curva gobba di ordine $3n$ intersezione di S_3 con una superficie di ordine n, corrisponde una curva piana passante n volte per ciascun punto fondamentale.

Ad una retta del piano corrisponde su S_3 una conica o una cubica gobba, secondochè la retta passa o no per un punto fondamentale.

A una conica del piano corrisponde su S_3 una curva gobba di genere zero e di ordini 4, 5, 6 secondochè la conica passa per 2, 1, 0 punti fondamentali.

Questa rappresentazione fu fatta da Clebsch (*Crelle*, LXV) e Cremona (loc. cit.). Un'altra rappresentazione piana della superficie cubica fu fatta da Clebsch (*Math. Ann.*, I) ed è quella cui abbiamo accennato alla fine del § 7 del Cap. IX, (v. anche Cayley, *Lond. math. Soc.*, III).

§ 6. — La forma cubica quaternaria.

Espressa la forma cubica quaternaria simbolicamente con

$$f = a^3_x = b^3_x = \dots$$

si trova che esistono solo cinque invarianti fondamentali dei gradi rispettivamente 8, 16, 24, 32, 40. I due primi di essi sono:

$$A = (abcd)^2 (ab'c'd')(a'bc'd')(a'b'cd')(a'b'c'd)$$
$$B = (abcd)^2 (a'b'c'd')^2 (a''b''c''d'')^2 (a'''b'''c'''d''')^2 \times$$
$$\times (aa'a''a''')(bb'b''b''')(cc'c''c''')(dd'd''d''').$$

Se la forma cubica è messa sotto la forma di Sylvester

$$a_1 X_1^3 + a_2 X_2^3 + a_3 X_3^3 + a_4 X_4^3 + a_5 X_5^3$$

gli invarianti A e B diventano rispettivamente

$$A = \Sigma a_2^2 a_3^2 a_4^2 a_5^2 - 2 a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 \Sigma a_1 a_1 a_3$$
$$B = a_1^3 a_2^3 a_3^3 a_4^3 a_5^3 \Sigma a_1.$$

Gli altri invarianti C, D, E diventano poi rispettivamente

$$C = a_1^4 a_2^4 a_3^4 a_4^4 a_5^4 \Sigma a_2 a_3 a_4 a_5$$
$$D = a_1^6 a_2^6 a_3^6 a_4^6 a_5^6 \Sigma a_1 a_2$$
$$E = a_1^8 a_2^8 a_3^8 a_4^8 a_5^8.$$

Per le espressioni simboliche di questi tre invarianti nel caso generale v. Clebsch (*Crelle*, LVIII, 120).

Il discriminante di f espresso mediante questi 5 invarianti è

$$(A^2 - 64 B)^2 - 16384 (D + 2 A C).$$

Vi sono 4 covarianti lineari; essi nel caso in cui la cubica è messa sotto la forma di Sylvester sono:

$$L = a_1^2 a_2^2 a_3^2 a_4^2 a_5^2 \sum_1^5 a_i X_i$$

$$L' = a_1^3 a_2^3 a_3^3 a_4^3 a_5^3 \sum_1^5 a_2 a_3 a_4 a_5 X_1$$

$$L'' = a_1^5\, a_2^5\, a_3^5\, a_4^5\, a_5^5 \sum_1^5 a_i^2\, X_i$$

$$L''' = a_1^8\, a_2^8\, a_3^8\, a_4^8\, a_5^8 \sum_1^5 a_i^3\, X_i\,.$$

I 4 piani rappresentati da questi quattro covarianti eguagliati a zero, si incontrano in un punto quando il discriminante delle a è zero.

Un covariante di quarto ordine è l'Hessiana della cubica, che, come sappiamo (v. § 2), pel caso della forma di Sylvester si riduce a

$$H = \sum a_2\, a_3\, a_4\, a_5\, X_2\, X_3\, X_4\, X_5.$$

Lo studio delle forme invariantive della forma quaternaria cubica fu cominciato quasi contemporaneamente nel 1860 da Clebsch (*Crelle*, LVIII) e Salmon (*Phil. Trans.*, 1860).

Si può vedere per altri dettagli anche Salmon-Fiedler (*An. G. d. R.*, II, § 317 e seg.). Il Clebsch esprime anche i cinque invarianti mediante i coefficienti dell'Hessiana, e il Salmon trovò anche l' equazione di una superficie covariante che taglia la superficie cubica lungo le 27 rette.

CAPITOLO XII.

Le superficie di 4.° ordine.

§ 1. — Generalità.
Superficie a punti doppi e a linee doppie.

La superficie generale di 4.° ordine è di 36.ª classe; l'ordine del cono ad essa circoscritto e col vertice in un punto arbitrario dello spazio è 12; le generatrici di regresso di tal cono sono 24, e sono 12 quelle doppie.

L'ordine della curva parabolica è 32.

L'equazione generale di una superficie di 4.° ordine dipende da 34 coefficienti non omogenei.

Una superficie di 4.° ordine non può avere al più *che 16 punti doppi.*

La superficie, senza essere rigata, può possedere una retta doppia, una conica doppia, una conica cuspidale (v. Cap. IX, § 4), *tre rette doppie che si incontrano in un punto e non sono situate in un piano.*

Una superficie di 4.° ordine avente per linea doppia una linea gobba (che non sia l'assieme di tre rette non situate in un piano e concorrenti in un punto) è sempre una rigata.

La singolarità più alta che può avere una superficie di 4.° ordine è una retta tripla; la superficie è allora necessariamente una rigata.

Se la superficie ha 16 punti doppi, il cono ad essa circoscritto e col vertice in uno di essi, è di 6.° ordine e si scinde in 6 piani.

La teoria delle superficie di 4.° ordine generali non è stata ancora così approfondita come quella delle superficie cubiche. Sono state piuttosto studiate delle particolari superficie di 4.° ordine caratterizzate dalla proprietà di contenere dei punti o linee doppie, e sono state studiate le rigate di 4.° ordine.

Le più notevoli superficie di 4.° ordine finora studiate sono le seguenti:

La superficie di Kummer contenente 16 punti doppi, formanti una rimarchevole configurazione; le altre superficie (dette anche di Kummer) aventi la proprietà di possedere infinite coniche; fra queste sono notevoli la quartica a conica doppia, e la superficie romana di Steiner; e finalmente le rigate, delle quali fu fatta la classificazione completa da Cremona e Cayley.

Nei prossimi paragrafi tratteremo separatamente di queste diverse superficie.

Ecco una tabella di numeri caratteristici riguardanti la superficie generale di 4.° ordine, e quelle con coniche doppie o cuspidali, o con 12 punti doppi o nodi (v. Salmon-Fiedler. *An. G. d. R.*, II, § 512-516).

	Superf. generale di 4.° ordine	Superf. con 12 nodi	Superf. con conica doppia	Superf. con conica cuspidale
$a=a'$	12	12	8	6
δ	12	24	4	0
$\varkappa$	24	24	12	8
n'	36	12	12	6
$\varkappa'$	24	24	12	8
b'	480	24	26	0
k'	102400	196	320	0
t'	3200	0	40	0
ρ'	320	32	36	0
c'	96	24	24	8
h'	4016	200	180	24
r'	128	56	36	8
σ'	32	32	16	8
β'	320	32	52	0

§ 2. — Le superficie quartiche a punti doppi.

L'esistenza di un punto doppio per una superficie di 4.° ordine equivale a 4 condizioni semplici, quindi parrebbe che, poichè una tal superficie dipende da 34 coefficienti, essa può contenere al massimo otto punti doppi *assegnati arbitrariamente*; però si riconosce che ciò non è possibile e che *se una superficie di 4.° ordine, non degenere, contiene otto punti doppi, questi devono avere fra loro una speciale configurazione; solo sette di essi sono arbitrari* (Cayley, *Proc. Lond. math. Soc.* III).

Fra le superficie di 4.° ordine a punti doppi, è specialmente importante, abbiamo già detto, quella con 16 di tali punti; il Cayley (op. cit.) ha fatto uno studio anche su quelle ad un numero minore di punti doppi, mentre Kummer avea già accennato a quelle con 11, 12, 13, 14, 15 punti doppi (*Berl. Abhand.* 1866) a proposito delle sue ricerche sui sistemi di raggi, o congruenze di 2.° ordine (v. Cap. XIV).

Per costruire l'equazione di una quartica che abbia 4 punti doppi dati, si facciano passare per questi, 6 quadriche $X_1 = 0, \ldots X_6 = 0$; *una funzione omogenea di 2.° grado delle X, eguagliata a zero, rappresenterà una quartica della specie richiesta. Essa conterrà 18 costanti indipendenti.*

Se i punti dati sono cinque, si facciano passare per essi cinque quadriche $X_i = 0$, e *una forma di 2.° grado nelle X, eguagliata a zero, rap-*

presenterà la quartica a cinque punti doppi, con 14 costanti.

Nel caso che i punti dati sieno sei, *la quartica generale avente per punti doppi i sei dati è data dalla equazione (contenente appunto 10 costanti):*

$$(X_1, X_2, X_3, X_4)^2 + \lambda J(X_1 X_2 X_3 X_4) = 0$$

dove le $X_i = 0$ sono le equazioni di 4 quadriche passanti per i 6 punti dati, $(X_1, X_2, X_3, X_4)^2$ rappresenta una forma di 2.° grado nelle X, e J è la superficie Jacobiana del sistema delle quattro quadriche.

Fra le superficie a sei punti doppi, è rimarchevole quella di equazione

$$J(X_1, X_2, X_3, X_4) = 0$$

cioè la Jacobiana del sistema di 4 quadriche.

Essa si chiama la superficie di Weddle, perchè considerata prima da quest'autore (*Cambridge J.*, V, 1850), *ed è il luogo dei vertici dei coni quadrici che passano per sei punti dello spazio.*

La superficie di Weddle *contiene 25 rette le quali sono le congiungenti dei 6 punti a due a due, e le 10 rette d'intersezione del piano che passa per 3 punti col piano che passa per gli altri tre.*

Il cono tangente col vertice in un punto doppio, taglia la superficie nelle cinque rette che congiungono quel punto agli altri cinque, e nella cubica gobba individuata dai 6 punti dello spazio.

La superficie di Weddle fu anche studiata da Cayley (*Compt. Rend.*, LII, 1861), da Hierholzer (*Math. Ann.*, II, IV) da Hunyady (*Crelle*, XCII), Caspary (*Compt. Rend.*, 1891), ecc. *Essa*

è una superficie le coordinate dei cui punti si esprimono per mezzo di funzioni iperellittiche di due parametri.

Il CAYLEY (*Proc. L. math. Soc.*, IV) studiò altre superficie analoghe per la loro definizione geometrica, ma non più di 4.° ordine.

Per costruire l' equazione più generale della quartica con 7 punti doppi, si facciano passare per essi tre quadriche $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, $X_3 = 0$; indi anche una superficie di 3.° ordine $Y = 0$ che passi per tutti i 7 punti e abbia quattro di essi per punti doppi, e infine il piano passante per gli altri tre $Z = 0$. *L'equazione*

$$(X_1, X_2, X_3)^2 + \lambda . YZ = 0$$

contiene sei costanti ed è quella della richiesta superficie.

Per costruire l'equazione della quartica che ha otto punti doppi *(non arbitrari)* si può procedere nel seguente modo: si considerino tre quadriche

$$X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 0$$

le quali si interseghino in 8 punti, e si formi una funzione quadratica omogenea delle tre X e si eguagli a zero. *Si avrà una superficie quartica con 8 punti doppi situati su tre quadriche.* Questa però non è il tipo generale di una superficie di 4.° ordine a 8 punti doppi; *ne esiste, secondo* CAYLEY, *anche un altro tipo.*

Uno studio sulla prima di tali superficie è quello di CAYLEY (*Quart. J.*, X, 34; XI, 111; *Opere*, VII, 304; VIII, 25).

Si possono trovare poi delle superficie di 4.° ordine con 9 e 10 punti doppi, dei quali 7 sono scelti ad arbitrio.

È notevole però questo teorema:

Una superficie di 4.° ordine non può avere più di 10 punti doppi, se 7 di essi sono scelti ad arbitrio.

Una superficie di 4.° ordine con 10 punti doppi è il cosiddetto *simmetroide*, la cui equazione è la seguente:

Si abbiano 10 funzioni lineari delle variabili

$$f_{11}\, f_{12} \cdots f_{44}$$

colle condizioni $f_{ij} = f_{ji}$ e si formi il determinante *simmetrico*

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{12} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{13} & f_{23} & f_{33} & f_{34} \\ f_{14} & f_{24} & f_{34} & f_{44} \end{vmatrix} = 0.$$

Questa è l'equazione del *simmetroide.*

I minori di 3.° ordine di tal determinante, eguagliati a zero, danno delle superficie cubiche le quali hanno 10 punti comuni, che sono i punti doppi del simmetroide.

Il cono col vertice in un punto doppio e circoscritto al simmetroide si scinde in due coni di 3.° ordine, i quali si intersecano secondo le 9 rette che congiungono quel punto doppio cogli altri nove.

Se in una superficie di 4.° ordine a 10 punti doppi, uno di questi ha la proprietà indicata dal precedente teorema, anche gli altri hanno la stessa proprietà.

Oltre del simmetroide esiste un'altra superficie di 4.° ordine con 10 punti doppi, colla proprietà però, che il cono di 6.° ordine col vertice in uno di essi e circoscritto alla superficie non si scinde in due coni di 3.° ordine.

L'Hessiana di una superficie cubica è un simmetroide; infatti allora le f sono le derivate seconde del primo membro dell' equazione della cubica.

Se $f_{11} = 0$, *il simmetroide ha ancora un 11.mo punto doppio; se è ancora* $f_{22} = 0$, *esso ha anche un 12.mo punto doppio; se è* $f_{33} = 0$ *ancora un 13.mo e se è finalmente* $f_{44} = 0$ *ancora un 14.mo.*

Sono state classificate le superficie di 4.° ordine con 11, 12, 13, 14, 15 punti doppi considerando i coni circoscritti ad esse e col vertice in un punto doppio; secondochè tali coni di 6.° ordine si scindono in un modo o in un altro in altri coni di ordine inferiore, si distinguono varie specie di quartiche. Questi studi sono stati fatti da Kummer, Cayley (op. cit.) e poi da Rohn in una Mem. premiata all'Acc. di Lipsia nel 1886 (v. anche *Math. Ann.*, XXIX, 1887). Il Cayley e gli autori inglesi introdussero, come sogliono fare, delle numerose e complicate denominazioni per alcune delle superficie sopraindicate, e specialmente per quelle a 8, 9, 10 punti doppi; però non ho mai capito se quelle denominazioni servano piuttosto a complicare le cose che a semplificarle.

Alcune delle superficie a 11, 12, . . . 15 punti doppi si presentano ancora come superficie focali di una congruenza quadratica (v. più avanti il Cap. XIV).

§ 3. — La superficie di Kummer.

Come abbiamo già detto, la *superficie di Kummer* è la superficie di 4.° ordine contenente 16 punti doppi isolati.

Questa superficie è di 4.ª classe; la sua equazione generale contiene 18 costanti indipendenti.

Il cono di 6.° ordine tangente alla superficie e col vertice in un punto doppio, si scinde in 6 piani.

Ciascuno di questi 6 piani tocca la superficie lungo una conica, sulla quale sono situati ancora altri cinque punti doppi.

Di tali piani singolari ve ne sono 16; si hanno dunque 16 punti singolari e 16 piani singolari colla importante proprietà che ogni piano passa per sei punti situati su di una conica, e per ogni punto passano 6 piani.

La superficie di Kummer si presenta specialmente nella *Geometria della retta;* essa può essere definita come *la superficie focale di una congruenza di 2.° ordine e 2.ª classe* (Kummer, *Berl. Abhand.*, 1866) ovvero come *la superficie di singolarità del complesso quadratico generale*, ovvero anche come *la superficie di singolarità di infiniti complessi quadratici confocali* (Klein, *Math. Ann.*, II) (v. più avanti il capitolo XIV sulla *Geom. della retta).*

Una proprietà importante di questa superficie è d'essere reciproca a sè stessa in sei polarità.

L'equazione della superficie di Kummer è stata messa sotto varie forme da KUMMER stesso, da CAYLEY e da altri.

Se $X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 0, X_4 = 0$ *sono le equazioni di 4 piani singolari tali che i loro 4 punti d'incontro sono nello stesso tempo anche punti nodali della superficie, l'equazione di questa può scriversi:*

$$\Phi^2 = 16\,k\,X_1\,X_2\,X_3\,X_4$$

dove k è una costante e Φ *rappresenta una forma quadratica nelle X; propriamente*

$$\begin{aligned} \Phi = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 \\ + 2\,a\,(X_2\,X_3 + X_1\,X_4) + \\ + 2\,b\,(X_3\,X_1 + X_2\,X_4) + \\ + 2\,c\,(X_1\,X_2 + X_3\,X_4), \\ k = a^2 + b^2 + c^2 - 2\,a\,b\,c - 1 \quad (\text{KUMMER}) \end{aligned}$$

Una forma irrazionale per l'equazione della medesima superficie è la seguente (CAYLEY, *Crelle*, LXXIII, 292; *Opere,* VII, 126)

$$\sqrt{\alpha\,x_1\left(\gamma'\,\gamma''\,x_2 - \beta'\,\beta''\,x_3 - \frac{x_4}{\alpha}\right)} +$$

$$+ \sqrt{\beta\,x_2\left(\alpha'\,\alpha''\,x_3 - \gamma'\,\gamma''\,x_1 - \frac{x_4}{\beta}\right)} +$$

$$+ \sqrt{\gamma\,x_3\left(\beta'\,\beta''\,x_1 - \alpha'\,\alpha''\,x_2 - \frac{x_4}{\gamma}\right)} = 0$$

colle condizioni

$$\alpha + \beta + \gamma = 0$$
$$\alpha' + \beta' + \gamma' = 0$$
$$\alpha'' + \beta'' + \gamma'' = 0.$$

Altre forme si ottengono permutando fra loro circolarmente il sistema α, β, γ nel sistema α', β', γ' ovvero nel sistema α'', β'', γ''.

Ridotta a forma razionale la precedente equazione diventa

$$\begin{aligned} x_4^2 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2 x_2 x_3 - 2 x_3 x_1 - 2 x_1 x_2) + \\ + 2 x_4 \Big[\alpha \alpha' \alpha'' (x_2^2 x_3 - x_3^2 x_2) + \\ + \beta \beta' \beta'' (x_3^2 x_1 - x_1^2 x_3) + \\ + \gamma \gamma' \gamma'' (x_1^2 x_2 - x_2^2 x_1) + \theta x_1 x_2 x_3 \Big] \\ + (\alpha \alpha' \alpha'' x_2 x_3 + \beta \beta' \beta'' x_3 x_1 + \gamma \gamma' \gamma'' x_1 x_2)^2 = 0 \end{aligned}$$

dove per brevità si è messo

$$\theta = (\beta - \gamma) \alpha' \alpha'' + (\gamma - \alpha) \beta' \beta'' + (\alpha - \beta) \gamma' \gamma''.$$

Si osservi che anche in questa espressione di θ si possono fare le permutazioni circolari sopraindicate, il valore restando sempre il medesimo.

I 16 piani singolari sono dati dalle equazioni:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0$$

$$\frac{x_1}{\alpha} + \frac{x_2}{\beta} + \frac{x_3}{\gamma} = 0$$

$$\frac{x_1}{\alpha'} + \frac{x_2}{\beta'} + \frac{x_3}{\gamma'} = 0$$

$$\frac{x_1}{\alpha''} + \frac{x_2}{\beta''} + \frac{x_3}{\gamma''} = 0$$

$$\gamma' \gamma'' x_2 - \beta' \beta'' x_3 - \frac{x_4}{\alpha} = 0$$

$$\gamma'' \gamma \, x_2 - \beta'' \beta \, x_3 - \frac{x_4}{\alpha'} = 0$$

$$\gamma \, \gamma' x_2 - \beta \, \beta' x_3 - \frac{x_4}{\alpha''} = 0$$

$$\alpha' \alpha'' x_3 - \gamma' \gamma'' x_1 - \frac{x_4}{\beta} = 0$$

$$\alpha'' \alpha \, x_3 - \gamma'' \gamma \, x_1 - \frac{x_4}{\beta'} = 0$$

$$\alpha \, \alpha' \, x_3 - \gamma \, \gamma' \, x_1 - \frac{x_4}{\beta''} = 0$$

$$\beta' \beta'' x_1 - \alpha' \alpha'' x_2 - \frac{x_4}{\gamma} = 0$$

$$\beta'' \beta \, x_1 - \alpha'' \alpha \, x_2 - \frac{x_4}{\gamma'} = 0$$

$$\beta \, \beta' \, x_1 - \alpha \, \alpha' \, x_2 - \frac{x_4}{\gamma''} = 0.$$

Un'altra forma della equazione della superficie di Kummer è la seguente (Rohn, *Op. cit.*, e *Math. Ann.*, XVIII)*:

---

* Si noti che a pag. 142 del lavoro citato di Rohn, al coefficiente di $x_1 x_2 x_3 x_4$ c'è un 4 invece di un 8.

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 + A\, x_1\, x_2\, x_3\, x_4 - \\ - 2\, A_{3456}\,(x_1^2\, x_2^2 + x_3^2\, x_4^2) - \\ - 2\, A_{5612}\,(x_1^2\, x_3^2 + x_2^2\, x_4^2) - \\ - 2\, A_{1234}\,(x_1^2\, x_4^2 + x_2^2\, x_3^2) = 0$$

dove

$$A = \frac{8}{(k_1 - k_2)(k_3 - k_4)(k_5 - k_6)} \Big[k_1\, k_2\,(k_3 + k_4 - k_5 - k_6) + \\ + k_3\, k_4\,(k_5 + k_6 - k_1 - k_2) + \\ + k_5\, k_6\,(k_1 + k_2 - k_3 - k_4) \Big]$$

$$A_{ijhl} = \frac{(k_i - k_h)(k_j - k_l) + (k_i - k_l)(k_j - k_h)}{(k_i - k_j)(k_h - k_l)}.$$

I coefficienti di questa equazione dipendono, come si vede, dalle 6 quantità k, che si possono intendere come le radici di una sestica binaria. Di qui comincia ad apparire una possibile relazione esistente fra le superficie di Kummer e le sestiche binarie; si trova propriamente che quella superficie ha una speciale relazione colle funzioni iperellittiche di genere 2, relative ad una sestica binaria.

Fu il Klein (*Math. Ann.*, V) il primo a riconoscere la possibilità di esprimere le coordinate di un punto della superficie di Kummer mediante quattro speciali funzioni iperellittiche a due argomenti; poi si successero su questo soggetto i lavori di Cayley (*Crelle*, LXXXIII), Borchardt (Id. id.); Weber (Id., LXXXIV); Rohn (*Math. Ann.*, XV, XVIII); Reichardt (*Nova Acta der Leop. Carol. Akad.*, L, Halle, 1887), ecc.

Ecco qualche indicazione su ciò: Esistono come si sa 16 funzioni ϑ di genere 2 (v. *Repert.* I, Capitolo XVII, § 3), a ciascuna delle quali corrisponde una *caratteristica*; di queste ve ne sono 10 pari e 6 dispari (v. Id., pag. 466). Ora nell'aggruppamento di tali caratteristiche si distinguono le cosiddette quaterne di Göpel (*Crelle*, XXXV) o le quaterne di Rosenhain (*Mém. des sav. étrang.*, XI, Paris, 1846). Una quaterna di Göpel (di cui ne esistono 60) è l'assieme di quattro caratteristiche, o *tutte pari*, o *due pari e due dispari*, e la cui somma sia zero; una quaterna di Rosenhain (di cui ne esistono 80) è invece l'assieme di quattro caratteristiche la cui somma è anche zero, ma esse sono o *una dispari e tre pari*, o *tre dispari e una pari*. Si ha allora il teorema:

Fra i quadrati delle 4 funzioni ϑ corrispondenti alle caratteristiche di una quaterna di Göpel, o di Rosenhain, sussiste sempre una relazione razionale omogenea di 4.° grado, e prendendo tali ϑ^2 come coordinate omogenee di un punto dello spazio, tale relazione rappresenta una superficie di Kummer. Nel caso della quaterna di Göpel, i piani del tetraedro fondamentale delle coordinate sono quattro piani singolari della superficie, ma nessun vertice di tale tetraedro è un nodo della superficie; nel caso invece della quaterna di Rosenhain, i quattro piani del tetraedro delle coordinate sono quattro piani singolari, e i quattro vertici sono quattro punti singolari.

In tale rappresentazione le altre ϑ^2 vengono a corrispondere a ciascuno degli altri piani singolari.

Un'altra equazione della superficie di Kummer si può trovare prendendo le mosse da un altro punto di vista. Si dimostra che scegliendo per coordinate omogenee di un punto dello spazio certe quattro funzioni iperellittiche denominate Σ da KLEIN, si può trovare un'equazione della superficie in modo che i coefficienti sieno *invarianti razionali* di una sestica binaria che corrisponde, nel modo sopra accennato, alla superficie di Kummer; una tale equazione si suol chiamare *l'equazione razionale della superficie*. Per maggiori dettagli vedi su ciò PASCAL (*Ann. di matematica*, XVIII, XIX).

Sulla configurazione dei 16 punti e piani singolari della superficie di Kummer sono state fatte molte ricerche. Citeremo CAPORALI (*Lincei*, 1878); SCHROETER (*Crelle*, C); DE PAOLIS (*Lincei*, 1890).

I 16 punti fondamentali congiunti a due a due, o i 16 piani fondamentali intersecantisi a due a due formano 120 rette che CAPORALI chiamò *rette R*.

I 16 punti fondamentali a tre a tre danno luogo a 240 piani non fondamentali (*piani* Π), *e i 16 piani fondamentali a tre a tre danno 240 punti non fondamentali (punti P).*

I piani Π *passano a 6 a 6 per le rette R, e i punti P vi giacciono a 6 a 6. Viceversa le rette R passano a 3 a 3 pei punti P, e giacciono a 3 a 3 nei piani* Π.

I punti P sono situati 45 a 45 nei piani fondamentali, e i primi Π *passano 45 a 45 pei punti fondamentali.*

Si hanno 80 tetraedri che hanno per vertici e facce, punti e piani fondamentali (essi corrispondono alle 80 quaterne di caratteristiche, di Rosenhain, v. sopra).

Si hanno 60 tetraedri che hanno per facce piani fondamentali e per vertici punti P (essi corrispondono alle 60 quaterne di Göpel).

Di questa ultima proprietà si può poi naturalmente enunciare la proprietà *duale*.

I 240 punti P e piani Π *compongono 15 nuove configurazioni di Kummer.*

Segando con un piano una superficie di Kummer *si può avere* una curva piana di 4.° ordine generale, propriamente:

Per ogni quartica piana generale passano ∞^4 *superficie di Kummer.*

I 16 piani singolari sono intersecati dal piano segante in 16 bitangenti della quartica; queste 16 bitangenti sono precisamente quelle che restano dalle 28 quando si sopprimono le 12 bitangenti, non comuni, di due sistemi di Aronhold che hanno una sola retta in comune; in altri termini quelle 16 bitangenti formano fra loro la configurazione simile a quella delle 16 bitangenti di una quartica piana con un punto doppio, quando non si tien conto delle 6 tangenti partenti dal punto doppio (v. Cap. VIII, pag. 280).

Le quattro bitangenti che provengono dalla sezione di un tetraedro di Göpel (v. sopra) *sono quattro bitangenti pei cui 8 punti di contatto passa una conica.*

Fondati su queste relazioni fra le bitangenti della quartica e i piani e punti singolari della su-

perficie di Kummer, sono alcuni recenti lavori di Ciani (*Ann. di mat.*, serie 3.ª, II; *Rend. Istit. Lomb.* 1898).

Si può trovare una notazione per i 16 piani e punti singolari della superficie di Kummer; si indichi uno dei piani col simbolo 0, e i sei punti su di esso situati, coi simboli 1, 2, 3, 4, 5, 6; *gli altri 15 piani possono essere rappresentati dai simboli binari 12, 13, 14,... 56; e gli altri 10 punti fondamentali dai simboli ternari*

$$\begin{pmatrix}123\\456\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}124\\356\end{pmatrix} \cdots$$

Pel punto $\begin{pmatrix}123\\456\end{pmatrix}$ *passano i sei piani* 12, 23, 31, 45, 56, 64, *e così di seguito; pel punto* (1) *passano i sei piani* (0), (12), (13), (14), (15), (16)

Un'altra notazione per i 16 piani singolari è data dalla corrispondenza sopranotata fra essi e le caratteristiche di genere 2.

Indichiamo perciò ogni piano col simbolo $(a\, bc\, d)$ dove a, b, c, d, non possono prendere altri valori che i valori 0 e 1. [Per maggiore semplicità invece di indicare la caratteristica col simbolo $\begin{pmatrix}a\,b\\c\,d\end{pmatrix}$ la indichiamo col simbolo $(a\,b\,c\,d)$.]

Allora i 16 piani sono rappresentati dai simboli della tabella

(0000) (1000) (0100) (1100)
(0010) (1010) (0110) (1110)
(0001) (1001) (0101) (1101)
(0011) (1011) (0111) (1111).

I 6 piani concorrenti in un punto sono quei 3 che in questa tabella sono nella medesima linea orizzontale con un dato elemento, e quegli altri 3 che sono nella stessa linea verticale col medesimo elemento; propriamente i sei piani concorrenti in un punto sono quelli indicati coi simboli

$$(a,\ b,\ c,\ d+1)$$
$$(a,\ b,\ c+1,\ d)$$
$$(a,\ b,\ c+1,\ d+1)$$
$$(a+1,\ b,\ c,\ d)$$
$$(a,\ b+1,\ c,\ d)$$
$$(a+1,\ b+1,\ c,\ d)$$

Le sostituzioni del gruppo di sostituzioni che lasciano inalterata la configurazione sono in numero di 6 ! 16.

L'equazione di 16.^{mo} grado da cui dipende la determinazione dei 16 piani o punti singolari della superficie di Kummer, diventa abeliana dopo la risoluzione di un' equazione di 6.° grado, e propriamente, dopo tale risoluzione, essa si risolve risolvendo quattro equazioni di 2.° grado (JORDAN.)

Di tali problemi si occupò JORDAN (*Crelle*, LXX; v. anche *Traité des subst.* Paris, 1870).

Le linee assintotiche * *sulle superficie di Kummer sono in generale curve di 16.^{mo} ordine e di 16.^{ma} classe.*

---

* Le *assintotiche (Haupttangentencurven)* sono quelle linee per le quali il piano osculatore in ogni punto coincide col piano tangente alla superficie (v. più avanti, *Geom. diff.*). Le tangenti all' assintotica sono rette osculatrici per la superficie.

Esse hanno 16 cuspidi nei 16 punti singolari della superficie, 16 piani stazionari che sono i piani singolari della superficie, e 96 tangenti stazionarie (v. Cap. IX, § 4).

Il loro rango è 48, il numero dei punti doppi apparenti è 72, l'ordine della curva doppia della sviluppabile è 952, e il genere è 17.

Vi sono 6 speciali linee assintotiche di cui l'ordine e la classe sono ridotte a metà cioè a 8; ciascuna di esse è da contarsi due volte. Esse non hanno cuspidi e piani stazionari, e hanno 40 tangenti stazionarie; il loro rango è 24; il numero dei loro punti doppi apparenti è 16, l'ordine della curva doppia della sviluppabile è 200, e il genere è 5.

Per le linee assintotiche di una superficie di Kummer passa un fascio di superficie del 4.° ordine (Reye).

La curva parabolica della superficie di Kummer è una curva di 32.mo ordine spezzata in 16 coniche che sono le coniche situate nei 16 piani singolari.

Delle linee assintotiche della superficie di Kummer si occuparono specialmente Klein e Lie (*Math. Ann.*, XXIII); Reye (*Crelle*, IIC); Segre (*Id. Id.*), ecc.

Sulla classificazione delle superficie di Kummer dal punto di vista della realità o meno dei punti e piani singolari c'è un lavoro di Rohn (*Math. Ann.*, XVIII); sulla classificazione delle stesse dal punto di vista della specializzazione che esse possono ricevere quando alcuni dei 16 punti sin-

golari si riuniscono fra loro c'è un lavoro di WEILER (*Math. Ann.*, VI). Ambedue partono dalla considerazione dei 6 valori $k_1 \ldots k_6$, radici di una sestica, che, come abbiamo detto sopra, hanno relazione coll' equazione della superficie di Kummer; supposto che tali 6 valori si particolarizzino in quanto alla loro realità o meno, e in quanto alla loro grandezza, si hanno tutti i casi possibili.

Alcuni dei risultati di ROHN sono i seguenti:

I. Le sei quantità k sono reali:

I. *a*) La superficie di Kummer ha 16 punti singolari reali e 16 piani singolari reali;

I. *b*) La superficie è reale ma ha tutti i punti e piani singolari immaginari. Considerando in un piano tangente alla superficie la quartica sezione, le sei tangenti a questa condotta dal punto doppio sono tutte reali;

I. *c*) La superficie è immaginaria e ha tutti i punti e piani singolari immaginari.

II. Due delle quantità k sono immaginarie coniugate, e le altre reali:

II. *a*) La superficie ha 8 punti singolari reali e altrettanti piani singolari reali;

II. *b*) La superficie è reale, ma tutti i punti e piani singolari sono immaginari. Essa però non è la stessa di quella del caso I. *b*), perchè le sei tangenti definite come nel caso I. *b*) sono quattro reali e due immaginarie.

III. Due coppie delle quantità k sono immaginarie coniugate e le altre due sono reali.

La superficie ha 4 punti singolari reali e 4 piani singolari reali, ognuno dei quali passa per due

punti reali, e propriamente due piani passano pei medesimi due punti e gli altri due per gli altri due punti.

IV. Le 6 quantità k sono a due a due immaginarie coniugate:

IV. *a*) La superficie è reale con 4 punti e 4 piani singolari reali. Essa però ha una diversa figura di quella del caso III, perchè nessun piano reale passa per un punto reale;

IV. *b*) La superficie è immaginaria, ma possiede 4 punti e 4 piani singolari reali.

Sono interessanti i modelli in gesso di superficie di Kummer editi da L. Brill in *Darmstadt* (v. il suo *Catalog.*, ecc.). Essi sono anche posseduti dell'Istituto matematico dell'Università di Pavia.

§ 4. — Il tetraedroide di Cayley e la superficie delle onde.

Caso particolare della superficie di Kummer è la superficie detta da Cayley, *tetraedroide*, e che a sua volta, specializzandosi, dà luogo alla cosiddetta *superficie delle onde* di Fresnel.

Il *tetraedroide* è una superficie di Kummer, di cui i 16 piani singolari hanno la proprietà di dividersi in 4 gruppi di 4 ciascuno, in modo che i piani di un medesimo gruppo passano per uno stesso punto; si hanno così i 4 vertici di un tetraedro fondamentale, donde la superficie prende il suo nome.

Questa superficie è una trasformazione omografica della *superficie delle onde* di cui tratteremo più sotto; questa cioè non è che un tetraedroide metricamente specializzato.

L'equazione del tetraedroide, riferita al tetraedro fondamentale, è la seguente:

$$\begin{vmatrix} 0 & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^2 & 0 & a_{12}^2 & a_{13}^2 & a_{14}^2 \\ x_2^2 & a_{12}^2 & 0 & a_{23}^2 & a_{24}^2 \\ x_3^2 & a_{13}^2 & a_{23}^2 & 0 & a_{34}^2 \\ x_4^2 & a_{14}^2 & a_{24}^2 & a_{34}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Le equazioni dei 16 piani singolari sono allora le seguenti:

$$\begin{array}{rrrrl}
 & a_{34}\,x_2 & -\,a_{24}\,x_3 & +\,a_{23}\,x_4 & =0 \\
a_{23}\,x_1 & -\,a_{13}\,x_2 & -\,a_{12}\,x_3 & & =0 \\
-\,a_{24}\,x_1 & -\,a_{14}\,x_2 & & +\,a_{12}\,x_4 & =0 \\
a_{34}\,x_1 & & +\,a_{14}\,x_3 & +\,a_{13}\,x_4 & =0 \\
-\,a_{34}\,x_1 & & +\,a_{14}\,x_3 & +\,a_{13}\,x_4 & =0 \\
a_{24}\,x_1 & +\,a_{14}\,x_2 & & +\,a_{12}\,x_4 & =0 \\
-\,a_{23}\,x_1 & +\,a_{13}\,x_2 & -\,a_{12}\,x_3 & & =0 \\
 & -\,a_{34}\,x_2 & -\,a_{24}\,x_3 & +\,a_{23}\,x_4 & =0 \\
a_{24}\,x_1 & -\,a_{14}\,x_2 & & +\,a_{12}\,x_4 & =0 \\
-\,a_{34}\,x_1 & & -\,a_{14}\,x_3 & +\,a_{13}\,x_4 & =0 \\
 & a_{34}\,x_2 & +\,a_{24}\,x_3 & +\,a_{23}\,x_4 & =0 \\
-\,a_{23}\,x_1 & -\,a_{13}\,x_2 & +\,a_{12}\,x_3 & & =0 \\
-\,a_{23}\,x_1 & -\,a_{13}\,x_2 & -\,a_{12}\,x_3 & & =0 \\
 & a_{34}\,x_2 & -\,a_{24}\,x_3 & -\,a_{23}\,x_4 & =0 \\
-\,a_{34}\,x_1 & & +\,a_{14}\,x_3 & -\,a_{13}\,x_4 & =0 \\
a_{24}\,x_1 & -\,a_{14}\,x_2 & & -\,a_{12}\,x_4 & =0.
\end{array}$$

Questa equazione si ricava da quella generale per la superficie di Kummer data da CAYLEY (v. § 3), *ponendo*

$$\frac{\gamma}{\beta} = \frac{a_{24}}{a_{34}}, \quad \frac{\alpha'}{\gamma'} = \frac{a_{34}}{a_{14}}, \quad \frac{\beta''}{\alpha''} = \frac{a_{14}}{a_{24}}$$

$$\alpha\,\alpha'\,\alpha'' = -\frac{a_{23}}{a_{14}}, \quad \beta\,\beta'\,\beta'' = -\frac{a_{13}}{a_{24}}, \quad \gamma\,\gamma'\,\gamma'' = -\frac{a_{12}}{a_{34}}$$

donde

$$\alpha'\,\beta''\,\gamma = \alpha''\,\beta\,\gamma'.$$

Da ciascuna delle 4 facce del tetraedro fondamentale il tetraedroide è tagliato in una coppia di coniche rispetto a ciascuna delle quali il triangolo contenuto nella corrispondente faccia del tetraedro, è un triangolo autoconiugato (v. Cap. IV, § 2, pag. 130).

Si hanno così 4 coppie di coniche nelle quattro facce del tetraedro; *i 16 punti d'incontro di queste 4 coppie di coniche sono i 16 punti singolari della superficie, i quali dunque si trovano a quattro a quattro sulle facce del tetraedro fondamentale.* Quest'ultima proprietà risulta evidente ricordando la proprietà della superficie di Kummer di essere reciproca a sè stessa (§ 3).

Su ciascuna faccia del tetraedro i quattro punti singolari si trovano a 2 a 2 su 6 rette le quali a 2 a 2 passano a loro volta per i tre vertici del triangolo che costituisce la faccia del tetraedro.

Nel caso del tetraedroide, la equazione di 6.° grado da cui, come abbiamo detto nel § 3, dipende, secondo JORDAN, *la determinazione dei 16 punti*

singolari della superficie di Kummer generale, è risolubile algebricamente.

La superficie delle onde è un tetraedroide particolare; essa può definirsi nei seguenti modi:

Essa è il luogo dei punti estremi dei raggi che partono dal centro di un ellissoide, e le cui lunghezze sono eguali ai due semidiametri principali della sezione dell'ellissoide fatta con un piano perpendicolare al raggio stesso; su ogni raggio esistono perciò quattro punti della superficie, due da una parte e due dall'altra (Fresnel).

La superficie risulta di due falde una dentro l'altra, e le quali si toccano in punti doppi della stessa.

Considerando l'ellissoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad a > b > c$$

la equazione della superficie delle onde è

$$\xi^2 \eta^2 - \zeta^2 + a^2 b^2 c^2 = 0$$

dove

$$\xi^2 = x^2 + y^2 + z^2$$
$$\eta^2 = a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2$$
$$\zeta^2 = a^2 (b^2 + c^2) x^2 + b^2 (c^2 + a^2) y^2 + c^2 (a^2 + b^2) z^2$$

(Fresnel).

Questa equazione si ottiene da quella del tetraedroide ponendo fra i coefficienti a_{12}^2, a_{13}^2 ... speciali relazioni (v. Salmon-Fiedler, *Geom. d. R. II*, pag. 473-474).

La equazione di Fresnel *può porsi sotto le due forme seguenti*:

$$\frac{x^2}{\xi^2 - a^2} + \frac{y^2}{\xi^2 - b^2} + \frac{z^2}{\xi^2 - c^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{\eta^2 - b^2 c^2} + \frac{y^2}{\eta^2 - b^2 a^2} + \frac{z^2}{\eta^2 - a^2 c^2} = 0.$$

Il tetraedro fondamentale della superficie delle onde considerata come un tetraedroide, è quello formato dai tre piani principali dell' ellissoide e dal piano all' infinito.

La sezione della superficie delle onde con uno dei tre piani principali dell' ellissoide, è formata d'un'ellisse e d'un cerchio.

I 16 punti singolari della superficie sono 4 all'infinito, 4 reali su di uno dei piani principali, e gli $4+4$ *sono immaginarî e distribuiti sugli altri due piani principali.*

Naturalmente anche dei piani singolari solo 8 sono reali (v. § 3).

Il tetraedroide fu studiato prima da Cayley (*J. de Liouville*, XI, 1846; *Op.*, I, 302; *Crelle*, LXV, LXXXVII).

La superficie delle onde fu studiata per la prima volta da Fresnel (*Mem. de Paris*, t. VII, 1827) in una Memoria sulla doppia rifrazione, e cioè a proposito del problema fisico della trasmissione della luce attraverso i corpi rifrangenti; se ne occuparono subito Ampère (*Ann. de Chim. e Phys.*, XXXIX, 1828); Cauchy (*Exerc. de math.*, V, Paris, 1830; *Compt. Rend.* XI, XII, XVIII) e

Plücker (*Crelle*, XIX, 1839) e altri. Una lista estesa di lavori sulla superficie delle onde si trova nell'op. più volte citata di Loria (*Teorie geom.*, Torino, 1896, p. 114-115).

Un'altra generazione della superficie fu data da Böklen (*Schlömilch Zeits.*, XXIV, XXV, XXVII, 1879-82), e un'altra generazione mediante due superficie sviluppabili fu data da Cayley (*Quart. J.*, III, 1860; *Op.*, IV, 420, 432; *Ann. di mat.*, XX, 1892).

Si può immaginare un caso ancora più particolare della superficie di Kummer, e cioè quando essa può considerarsi come un tetraedroide non in un modo solo, ma in più modi; di tali superficie particolari si occuparono Rohn (*Leipz. Berich.*, 1884), Segre (*Id.*, *Id.*), e più recentemente Bertini (*Ist. Lomb.*, 1898).

Alcuni modelli in gesso di *superficie delle onde (Wellenflächen)* sono compresi nella raccolta edita da L. Brill, e sono posseduti dall'Istituto matematico dell'Università di Pavia.

§ 5. — Superficie di 4.° ordine contenenti infinite coniche.

Il Kummer (*Berl. Monatsb.* 1863; *Crelle*, LXIV) studiò le superficie di quart'ordine le quali contengono infinite coniche. Riferiremo in questo paragrafo i principali risultati da lui trovati.

Non esistono superficie di 4.° ordine di cui le sezioni prodotte da tutti i piani dello spazio, o da

tutti quelli di una stella, risultino ciascuna composta di due coniche.

Esistono superficie di 4.° ordine di cui le sezioni prodotte con certi infiniti piani che non sono piani tangenti risultano composte di due coniche ; esse sono :

1. *Le superficie di 4.° ordine con una conica doppia e con due punti doppi, la cui congiungente non incontra la conica; ogni piano del fascio il cui asse è tale congiungente, incontra la superficie in due coniche, i cui punti d'incontro sono naturalmente punti doppi per la stessa e quindi stanno sulla conica doppia. L'equazione di una superficie di tale specie è*

$$\varphi^2 = 4\, p^2\, q\, r$$

dove φ *è una forma di 2.° grado, e* p, q, r *di 1.° grado.*

2. *La superficie di 4.° ordine con una retta doppia ; ogni piano per questa taglia la superficie ancora in una conica. L'equazione di una tal superficie è*

$$p^2\, S + 2\, p\, q\, S_1 + q^2\, S_2 = 0$$

dove p, q *sono forme di 1.° grado, e* $S\, S_1\, S_2$ *di 2.° grado.*

3. *La superficie di 4.° ordine con due tacnodi, cioè punti in cui si toccano due falde della superficie (Selbstberührungspunkte) ; ogni piano per la congiungente tali due punti taglia la superficie secondo due coniche che si toccano nei medesimi.*

L'equazione della superficie è

$$\varphi^2 = (p, q)^4$$

dove φ *è una forma quadratica,* p, q *sono due forme lineari, e* $(p, q)^4$ *rappresenta una forma di 4.° grado in* p, q.

In tutti questi casi i piani che tagliano la superficie nel modo richiesto formano un fascio.

Vi sono superficie di 4.° ordine di cui le sezioni prodotte da piani tangenti (tutti o alcuni) risultano di due coniche. Esse sono:

1. *La superficie avente tre rette doppie che si incontrano in un punto (superficie romana di* STEINER); *le sezioni fatte da qualunque piano tangente risultano di due coniche.*

2. *La superficie con una conica doppia e un punto doppio; ogni piano tangente pel punto doppio, taglia la superficie secondo due coniche. La equazione di tale superficie è*

$$\varphi^2 = 4\, p^2\, \psi$$

dove φ, ψ *sono forme quadratiche e* p *è forma lineare, e propriamente* $\psi = 0$ *rappresenta un cono di 2.° ordine, il cui vertice è sulla quadrica* $\varphi = 0$.

Vi sono superficie di 4.° ordine di cui ogni piano bitangente le taglia in due coniche. Esse sono:

1. *Le superficie con una conica doppia.*
2. *Le superficie rigate.*

Nei paragrafi seguenti tratteremo separatamente delle principali specie di superficie qui enumerate, cioè:

a) Le superficie a conica doppia;

b) Le superficie a retta doppia;
c) La superficie di Steiner;
d) Le superficie rigate.

In quanto alla superficie *a due tacnodi*, esse non sono state finora molto studiate.

§ 6. — Le superficie di 4.° ordine a conica doppia o cuspidale.

Per i numeri caratteristici relativi a questa superficie si vegga il § 1, Cap. XII.

Ogni piano dello spazio taglia tale superficie in una curva di 4.° ordine con due punti doppi; ogni piano tangente la taglia in una curva di 4.° ordine con tre punti doppi, ogni piano bitangente in due coniche, e ogni piano tritangente in una conica e in due rette.

Per un punto possono condursi 10 piani che tagliano la superficie in coppie di coniche.

Sulla conica doppia vi sono quattro punti uniplanari o cuspidali; i piani tangenti in questi passano per uno stesso punto.

L'equazione generale di tale superficie è

$$\varphi^2 - 4p^2\psi = 0$$

dove $\varphi = 0$, $\psi = 0$ *rappresentano due quadriche, e* $p = 0$ *un piano, la cui intersezione con* $\varphi = 0$ *è la conica doppia della superficie.*

La curva parabolica della superficie (di ord. 32) si compone della conica doppia contata 8 volte, della intersezione di $\varphi = 0$ *e* $\psi = 0$ *contata due volte, e di un' altra curva di 8.° ordine.*

La superficie contiene 16 rette (che si appoggiano naturalmente alla conica doppia) ognuna delle quali è tagliata da cinque altre. La configurazione di queste 16 rette è la stessa di quella delle 16 rette che restano dalle 27 di una superficie di 3.° ordine, quando di queste si sopprime una retta e tutte le 10 che la incontrano.

Ogni piano condotto per una delle 16 rette taglia ancora la superficie in una cubica con un punto doppio.

Vi sono 40 piani tritangenti per la superficie, ognuno dei quali contiene 2 rette.

I piani bitangenti della superficie inviluppano cinque coni di 2.° ordine, che si chiamano i cinque coni di KUMMER. *Questi cinque coni formano dunque la sviluppabile bitangente della superficie (di 10.° ordine).*

I 40 piani tritangenti della superficie formano fra loro la stessa configurazione che i 40 piani restanti dai 45 di una superficie cubica, quando si sopprimano i 5 piani passanti per una retta fissa.

Uno qualunque dei coni di Kummer è toccato dalle 16 rette della superficie; queste si distribuiscono a due a due in otto piani tangenti ad un cono di Kummer. Quindi rispetto a ciascuno dei cinque coni, le 16 rette si distribuiscono diversamente in 8 coppie; questa distribuzione è la medesima di quella colla quale le medesime rette, considerate come appartenenti ad una superficie cubica, si distribuiscono rispetto a ciascuno dei cinque piani soppressi; propriamente se, per fissare le idee, chiamano a, b le due rette di un piano

soppresso, le 16 rette si distribuiscono in 8 coppie tali che le due di ciascuna coppia si tagliano fra loro e tagliano o la retta a o la retta b.

Si stabilisce così una corrispondenza fra i 5 coni relativi a S_4 e i 5 piani soppressi relativi a S_3.

La tangente in un punto P della conica doppia di S_4, *e le congiungenti P coi vertici dei 5 coni, sono le generatrici di un cono quadrico.*

I coni di Kummer passano pei punti cuspidali situati sulla linea doppia; i piani tangenti ai coni in tali punti segano la superficie in due coniche tangenti.

Colle 16 rette della superficie si possono formare DUE *diverse specie di aggruppamenti gobbi di 4 rette, cioè aggruppamenti di 4 rette che a due a due non si tagliano; un aggruppamento della 1.ª specie è tale che ogni altra delle 12 rette restanti taglia sempre almeno una delle 4 rette dell'aggruppamento; un aggruppamento della 2.ª specie è tale che fra le 12 rette restanti ve ne è sempre una e una sola che non taglia alcuna delle 4 rette.* Tali aggruppamenti si chiamano rispettivamente *quadruple di 1.ª e 2.ª specie. Di 1.ª specie ve ne sono 40 e di 2.ª specie ve ne sono 80.*

Ad ogni quadrupla ne corrisponde un' altra della stessa specie, colla proprietà che ciascuna delle 4 rette di questa taglia una e una sola delle rette della prima.

Le due quadruple si chiamano *coniugate*, e insieme formano una *biquadrupla (Doppelvier* di Clebsch).

Ad ogni biquadrupla di 2.ª specie ne corrispondono quattro altre in modo che le rette contenute

nella prima e in una delle altre sono tutte le 16 rette della superficie.

Colle 16 rette si possono formare 16 quintuple gobbe, cioè assiemi di 5 rette che a due a due non si incontrano, e non si possono formare assiemi gobbi composti con un numero maggiore di rette.

Il gruppo delle sostituzioni fra le 16 rette ha per ordine 5! 16.

Le radici dell'equazione di 16.° grado da cui dipende la determinazione delle 16 rette della superficie di 4.° ordine a conica doppia, sono funzioni razionali delle radici di una certa equazione di 10.° grado, la quale a sua volta si scinde in 5 fattori quadratici colla risoluzione di un' equazione di 5.° grado.

Sono stati poi anche diffusamente studiati i *poliedri* formati coi 40 piani tritangenti (v. le citazioni più sotto).

Dalle cose sopraddette risulta che i piani delle coniche della superficie sono tangenti ai coni di Kummer, e naturalmente in ogni piano vi sono due coniche. *Si hanno dunque 10 sistemi di coniche appartenenti alla superficie*, e ad ogni sistema ne corrisponde un altro che può dirsi ad esso *coniugato*, perchè una conica del primo sta sempre nello stesso piano con una certa conica del secondo.

Per ogni punto della superficie (non situato sulla curva doppia) passa una conica di ciascuno dei 10 sistemi.

Facendo astrazione dalle intersezioni che possono aver luogo in punti della curva doppia, si ha: *Le coniche appartenenti ad uno stesso sistema*

non si incontrano; due coniche qualunque appartenenti a due sistemi coniugati si incontrano in due punti; e due appartenenti a due sistemi diversi (non coniugati) si incontrano in un punto.

Segando con un piano qualunque il cono, col vertice in un punto P della curva doppia, e tangente alla superficie, si ha, oltre le tracce dei due piani tangenti, una curva piana GENERALE *di 4.° ordine* (ZEUTHEN, 1879; v. *Ann. di mat.*, XIV, pag. 34).

Questa curva di 4.° ordine ha per tangenti doppie, le tracce dei due piani tangenti alla superficie, le tracce dei dieci piani che da P si possono condurre a segare la superficie in una coppia di coniche (v. sopra), *e le tracce dei 16 piani che passano per P e per le 16 rette della superficie.*

Le coniche della superficie si proiettano in coniche quadritangenti alla curva di 4.° ordine.

Se P è uno dei 4 punti cuspidali situati sulla curva doppia (v. sopra) *la proiezione del contorno della superficie avrà un punto doppio sulla traccia del piano tangente in P.*

Proiettando ora invece la superficie dal vertice di uno dei coni di Kummer, il contorno di essa si proietta nella traccia del cono contata due volte, e in una curva di 4.° ordine con due punti doppi, toccata in quattro punti sia dalla predetta traccia, sia dalla proiezione della conica doppia (ZEUTHEN, *Id.*)

Dei precedenti teoremi lo ZEUTHEN si servì per classificare le quartiche a conica doppia, dal punto di vista della realità delle sue rette e dei coni di Kummer.

I principali suoi risultati sono i seguenti:

Esistono i seguenti tipi di quartiche reali a conica doppia reale:

A) Le 16 rette sono reali e i 5 coni sono reali. I dieci sistemi di coniche sono reali, ognuno con 4 coppie di rette reali;

B) Otto rette sono reali e 3 coni sono reali; le altre 8 rette sono immaginarie senza punti reali; sei sistemi di coniche sono reali, e nessuna coppia di rette coniugate;

C) Quattro rette sono reali e un cono è reale. Due sistemi di coniche sono reali, ognuno con due coppie di rette reali e due coppie di rette coniugate. Dalle 12 rette immaginarie quattro hanno un punto reale, e le altre no.

D) Nessuna retta è reale, e i cinque coni sono tutti reali. Sei sistemi di coniche sono reali, e non contengono alcuna coppia di rette reali o coniugate. Tutte le 16 rette sono immaginarie senza punti reali;

E) Nessuna retta è reale, e i cinque coni sono tutti reali. Tutte le 16 rette sono immaginarie ma con un punto reale. Due sistemi di coniche sono reali, ad ognuno dei quali appartengono quattro coppie di rette immaginarie coniugate;

F) Nessuna retta è reale e solo tre coni sono reali; delle 16 rette, otto hanno un sol punto reale e otto no. Due sistemi di coniche sono reali ognuno con due coppie di rette coniugate.

La superficie S_4 di cui trattiamo fu studiata prima da CLEBSCH mediante la sua rappresentazione piana (v. Cap. IX, § 7).

Secondo questa rappresentazione ad una retta di S_4 corrisponde nel piano una conica passante per 5 punti fondamentali; alle 5 rette che tagliano quella, corrispondono i cinque punti fondamentali, e alle altre 10 rette corrispondono le rette che congiungono questi a due a due.

A ciascuna coppia di sistemi coniugati di coniche di S_4 corrispondono le coniche passanti per 4 dei 5 punti fondamentali, e le rette passanti pel 5.° punto.

Le immagini delle sezioni piane di S_4 sono ∞^3 cubiche di un sistema lineare di cubiche passanti pei 5 punti fondamentali.

L'immagine della conica doppia di S_4 è una cubica del medesimo sistema.

Una proprietà importante la quale dà anche un mezzo per studiare la superficie è quella che mette in relazione, per mezzo di una trasformazione birazionale dello spazio, questa superficie con una superficie generale di 3.° ordine. Tale ricerca fu fatta da Geiser (*Crelle,* LXX) e Cremona (*Rend. Ist. Lomb.*, 1871).

Colla trasformazione

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = y_1^2 : y_1 y_2 : y_1 y_3 : y_2 y_4 - y_3^2$$

ovvero

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = x_1 x_2 : x_2^2 : x_2 x_3 : x_1 x_4 + x_3^2$$

ad una superficie generale di 3.° ordine S_3 passante per la conica $x_2 = 0$, $x_1 x_4 + x_3^2 = 0$ dello spazio (x), ma non toccata in $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, dal piano $x_1 = 0$, corrisponde nello spazio (y) una superficie S_4 di 4.° ordine a conica doppia (Cremona).

La conica doppia è propriamente

$$y_1 = 0, \quad y_2 y_4 - y_3^2 = 0.$$

Alle 27 rette di S_3 *corrispondono:* 1) *le 16 rette di* S_4, 2) *10 coniche di* S_4 *passanti per*

$$y_1 = y_2 = y_3 = 0$$

e in tal punto toccate dal piano $y_2 = 0$, 3) *il punto* $y_1 = y_2 = y_3 = 0$.

Con questi principi si può anche ricavare la rappresentazione piana di S_4 dalla rappresentazione piana di S_3.

Un caso particolare della superficie che qui consideriamo è quello in cui la conica doppia si scinda in due rette che si taglino.

L'equazione della superficie può allora ridursi alla forma

$$x_1^2 x_2^2 + 2m\, x_1 x_2 x_3 x_4 + x_4^2 \varphi = 0$$

dove φ *è una forma quadratica. Le due rette doppie sono contenute nel piano* $x_4 = 0$ *e sono le intersezioni di questo cogli altri due piani*

$$x_1 = 0, \; x_2 = 0.$$

In questo caso la superficie ha ancora 16 rette, di cui otto si appoggiano ad una delle rette doppie, e otto all'altra; ognuna fra le prime otto è tagliata da quattro rette dell'altro sistema.

Su ciascuna delle due rette doppie vi sono due punti uniplanari o cuspidali.

I coni di Kummer si riducono propriamente a quattro; il quinto è composto dall'assieme delle

due rette doppie, considerato come inviluppo di piani.

Un altro caso notevole è quello in cui la conica invece d'essere *doppia* sia *cuspidale;* ogni suo punto cioè sia *uniplanare.*

Per i numeri caratteristici relativi a questo caso v. la tabella del § 1.

In tal caso i piani tangenti alla superficie nei punti della conica cuspidale passano tutti per uno stesso punto.

Esiste allora un piano tangente alla superficie, che la tocca lungo una conica, la quale incontra in due punti la conica cuspidale.

Un piano qualunque passante per uno di questi taglia la superficie in una curva avente quel punto per tacnodo (punto in cui si toccano due rami, Selbstberührungspunkt, close-point).

La superficie possiede due quaterne di rette; le quattro rette di una quaterna passano tutte per uno dei due tacnodi, e stanno nel piano delle tangenti in questo alle due coniche, la cuspidale e l'altra. Chiamiamo π, π' i due piani delle due quaterne; si ha allora:

La superficie ha solo tre coni di Kummer, i cui vertici sono nella retta d'intersezione dei due piani π e π'; *quei tre coni passano per la conica cuspidale.*

Sono poi stati considerati i casi in cui la superficie abbia, oltre la conica doppia o cuspidale anche dei punti doppi isolati.

Una superficie di 4.° ordine a conica doppia non può avere più che quattro di tali punti doppi isolati.

Tali superficie furono studiate specialmente da KORNDÖRFER (*Math. Ann.*, I, II) e più tardi da SEGRE (*Id.*, XXIV) insieme a molti altri casi particolari.

Se un punto doppio isolato va a cadere sulla conica doppia, si ha una superficie che il CREMONA (*Rend. Ist. Lomb.*, 1871) dimostrò potersi derivare da una quadrica, per mezzo della trasformazione birazionale cui abbiamo sopra accennato.

Altri casi analoghi sono trattati da SEGRE (*cit.*)

Supposta la conica DOPPIA *e non degenere si distinguono, in rapporto agli altri punti doppi che la superficie può avere, 18 diverse specie di superficie.*

Le superficie di 4.° ordine a conica doppia furono cominciate a studiare da KUMMER nel 1863 (*Crelle*, LXIV). Indi, partendo da altri punti di vista, MOUTARD, DARBOUX e CASEY si occuparono moltissimo di un caso speciale e assai notevole di tali superficie, il caso cioè delle *ciclidi* (di cui tratteremo nel prossimo paragrafo), in cui la conica doppia è il cerchio immaginario all'infinito (i casi particolari del *toro* e della *ciclide* di DUPIN erano già conosciuti da molto tempo).

Nel 1868 il CLEBSCH (*Crelle*, LXIX) a proposito delle ricerche sulla rappresentazione piana delle superficie, riprese gli studi sulle superficie di 4.° ordine a conica doppia generale, e i suoi lavori furono seguiti da quelli di CREMONA, KORNDÖRFER (*cit.*); CAYLEY (*Quart. J.*, X, XI, 1870-71).

Tralasciando di citare i lavori sulle ciclidi, di cui tratteremo nel seguente paragrafo, citeremo ancora come importante il lavoro di Zeuthen del 1879 (scritto in danese, e tradotto in italiano da Loria, *Ann. di mat.*, XIV) in cui l'autore si propose specialmente la classificazione delle superficie in discorso nel senso da noi sopra già riferito.

Nel 1884 il Segre, in un esteso lavoro contenuto nel vol. XXIV dei *Math. Ann.*, si propose di trattare tutta la teoria di siffatte superficie da un nuovo punto di vista, e cioè considerandole come proiezioni nello spazio a 3 dimensioni, dell'intersezione di due varietà quadratiche a tre dimensioni situate nello spazio a 4 dimensioni.

Il lavoro del Segre è ricco di moltissimi risultati, alcuni già conosciuti, altri nuovi, e contiene infine una dettagliata classificazione di tutte le varie specie di superficie a conica doppia o cuspidale, degenere o no, con o senza altri punti doppi isolati.

Le superficie a conica cuspidale erano già state considerate da Cremona (*Acc. Bologna*, 1872), e Tötössy (*Math. Ann.*, XIX).

In quanto poi ad uno studio particolareggiato della configurazione delle 16 rette o dei 40 piani tritangenti della superficie citeremo i lavori di Berzolari (*Ann. di mat.*, XIII) e Pereno (*Id.*, XXI) e per maggiori particolari storici e bibliografici si può vedere l'introduzione al citato lavoro del Segre, e il libro più volte citato di Loria (*Teorie geometriche*, ecc.).

§ 7. — Le ciclidi. La ciclide di Dupin.

Le *ciclidi* sono superficie di 4.° ordine che hanno per conica doppia il cerchio immaginario all' infinito. Il nome di *ciclidi* fu dato a tali superficie, da Darboux e Casey, mentre Cayley le chiamò *superficie bicicliche*, o *bicircolari.*

La ciclide è l' inviluppo di una sfera che taglia ortogonalmente una data sfera, mentre il suo centro descrive una data quadrica (Casey, *Phil. Trans.,* CLXI, 1871).

L'equazione di una ciclide può scriversi in vari modi.

Sieno $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, $X_3 = 0$, $X_4 = 0$ le equazioni di quattro sfere; *la equazione di una ciclide potrà scriversi:*

$$\varphi_2 (X_1, X_2, X_3, X_4) = 0$$

dove φ_2 *rappresenta una forma generale di 2.° grado.*

La sfera fissa per la generazione della ciclide è la Jacobiana di queste 4 sfere, ognuna delle quali rappresenta una posizione della sfera mobile ortogonale alla fissa.

L'equazione della ciclide può anche ridursi alla forma (in coordinate cartesiane)

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 + S_2 = 0$$

dove $S_2 = 0$ *è l'equazione di una quadrica.*

L'equazione di una ciclide può anche esprimersi

mediante le equazioni di cinque sfere

$$X_1 = 0, \ldots X_5 = 0$$

le quali si taglino fra loro ortogonalmente, con una qualunque delle formole

$$a_1 \ X_1{}^2 + a_2 \ X_2{}^2 + a_3 \ X_3{}^2 + a_4 \ X_4{}^2 = 0$$
$$a'_1 \ X_2{}^2 + a'_2 \ X_3{}^2 + a'_3 \ X_4{}^2 + a'_4 \ X_5{}^2 = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_1^{IV} X_5{}^2 + a_2^{IV} X_1{}^2 + a_3^{IV} X_2{}^2 + a_4^{IV} X_3{}^2 = 0$$

dove le a sono coefficienti costanti; queste forme sono tutte fra loro equivalenti perchè fra i quadrati delle cinque X sussiste una relazione lineare identica, la quale corrisponde alle condizioni di ortogonalità delle cinque sfere a due a due.

Tale relazione è

$$\frac{X_1{}^2}{r_1{}^2} + \frac{X_2{}^2}{r_2{}^2} + \frac{X_3{}^2}{r_3{}^2} + \frac{X_4{}^2}{r_4{}^2} + \frac{X_5{}^2}{r_5{}^2} = 0$$

dove $r_1 \ldots r_5$ *sono i raggi delle cinque sfere.*

In ciascuna delle cinque equazioni di sopra, la sfera fissa per la generazione della ciclide appare rispettivamente $X_5 = 0, X_1 = 0 \ldots X_4 = 0$, *e le altre quattro rappresentano posizioni diverse della sfera mobile. La stessa superficie appare dunque generata in cinque modi diversi.*

Una proprietà importante delle ciclidi è quella *di essere superficie* ANALLAMATICHE, *cioè che si trasformano in sè stesse con una trasformazione per raggi vettori reciproci (inversione).*

Le anallamatiche di 4.° ordine sono le ciclidi (MOUTARD).

La sfera fondamentale per la inversione è quella a cui è ortogonale la sfera mobile che genera la ciclide nel modo suddetto. Il centro di tale sfera è il vertice di uno dei cinque coni di Kummer relativi alla superficie secondo la teoria generale del § 6.

Una ciclide è una superficie anallamatica rispetto a cinque inversioni diverse, e ciò naturalmente in corrispondenza coi cinque coni di Kummer.

Questo teorema è in relazione con quello già riferito di sopra, che cioè una medesima ciclide si può generare in cinque modi diversi.

Una proprietà caratteristica per le ciclidi, è che *i piani bitangenti (i piani tangenti ai coni di Kummer) anzichè segare la superficie in una coppia di coniche (come nel caso del paragrafo precedente) la segano in una coppia di cerchi.* Quindi anche possiamo dire:

Per ogni punto dello spazio passano dieci piani che segano la superficie in una coppia di cerchi. Di qui il nome di *superficie bicircolari* dato da Cayley.

Supponiamo assegnata una ciclide generata nel modo sopraddetto da una sfera mobile che taglia ortogonalmente una sfera fissa $X_i = 0$, mentre il suo centro descrive una quadrica $S_i = 0$.

Conduciamo dal centro della sfera X il cono i cui piani tangenti sieno perpendicolari alle generatrici del cono assintotico della quadrica S_i; *tal cono è uno dei cinque coni di Kummer.*

Ad ogni cono di Kummer corrisponde nel modo sopraddetto una quadrica S_i.

Le cinque quadriche S_i *sono confocali.*

La intersezione della quadrica $S_i = 0$ colla corrispondente sfera $X_i = 0$ è una curva che si chiama una *curva focale* della ciclide; *vi sono quindi cinque curve focali.*

A questo proposito osserviamo che la definizione di *curve focali* per una superficie qualunque fu data da Darboux (*Compt. Rend.*, 1864) come estensione della definizione data da Chasles e altri per le quadriche.

Si considera la sviluppabile circoscritta alla superficie e i cui piani tangenti sieno anche tangenti al cerchio immaginario all'infinito; *la curva doppia di tale sviluppabile si chiama la curva focale della superficie. Per ciascuna tangente della focale si possono condurre due piani tangenti comuni alla superficie e al cerchio all'infinito.*

Se poi il cerchio all'infinito appartiene alla superficie allora oltre le focali ordinarie si possono anche considerare le *focali cosiddette singolari* (Laguerre); *le quali sono le linee doppie della sviluppabile circoscritta alla superficie lungo i punti del cerchio immaginario all'infinito.*

È importante il seguente teorema sulle focali singolari della ciclide: (Laguerre, De la Gournerie):

Le focali singolari della ciclide sono le focali ordinarie di ciascuna delle 5 quadriche che servono, nel modo sopraddetto, alla generazione della ciclide, le quali cinque quadriche hanno poi (come si è sopra detto) *le medesime linee focali.*

In un fascio di sfere vi sono 12 sfere che toccano una data ciclide; in un fascio di piani ve ne sono 12 che toccano una ciclide, e in una stella

di rette ve ne sono 12 che sono normali ad una data ciclide.

Le ciclidi rappresentate dall'equazione

$$\frac{X_1^2}{\lambda - a_1} + \frac{X_2^2}{\lambda - a_2} + \frac{X_3^2}{\lambda - a_3} + \frac{X_4^2}{\lambda - a_4} + \frac{X_5^2}{\lambda - a_5} = 0,$$

dove λ *è un parametro variabile, sono tutte confocali; esse si tagliano fra loro ortogonalmente; e per un punto dello spazio passano tre ciclidi di tal sistema, le quali perciò formano un cosiddetto sistema triplo ortogonale* (v. *Geom. differenziale).* I tre corrispondenti valori di λ possono assumersi come *coordinate di un punto dello spazio.*

Due ciclidi del sistema si tagliano secondo le loro linee di curvatura, le quali perciò sono curve algebriche (v. *Idem*).

Le linee di curvatura delle ciclidi formano un sistema ortogonale isotermo (v. *Id.*).

Supponendo delle particolarità metriche nella quadrica che serve a costruire la ciclide, si hanno ciclidi a forme speciali.

Se quella quadrica è una sfera, la ciclide è la superficie di rivoluzione generata dalle ovali di Cartesio (vedi più avanti) *che rotano intorno al loro asse focale. In tal caso il cerchio immaginario all'infinito è cuspidale per la superficie.*

Se quella quadrica è di rivoluzione la focale ordinaria della ciclide è doppiamente tangente al cerchio all'infinito. Darboux chiamò tali ciclidi *ciclidi di Cartesio.*

Se infine la quadrica è priva di centro (paraboloide), allora una delle focali singolari va al-

l'infinito, e la ciclide si scompone in una superficie di 3.° ordine, che passa pel cerchio immaginario all'infinito, e nel piano all'infinito stesso.

Si ha allora la cosiddetta *ciclide di 3.° ordine o parabolica.*

Questa contiene evidentemente una retta nel piano all'infinito, per la quale passano cinque piani tritangenti della superficie; i punti di contatto di questi sono i cinque vertici dei cinque coni di Kummer; ciascuno di questi si riduce ad una coppia di rette, situate sulla superficie, e ogni piano passante per una delle 10 rette così formate taglia naturalmente la superficie secondo cerchi.

Da una ciclide generale si ottiene una ciclide di 3.° ordine trasformandola per raggi vettori reciproci e ponendo il centro d'inversione sulla superficie stessa.

Supponendo ora che la quadrica S e la sfera direttrice X abbiano speciale posizione l'una rispetto all'altra, p. es. sieno tangenti, si hanno *le ciclidi a punti doppi.*

Come le superficie studiate nel paragrafo precedente, così anche le ciclidi possono avere da 1 sino a 4 punti doppi isolati.

Le ciclidi a punti doppi possono sempre considerarsi come le superficie inverse (le trasformate per un'inversione) di superficie di 2.° ordine.

L'inversa di una quadrica generale è una ciclide con un punto doppio; quella di un cono quadrico generale è una ciclide con due punti doppi; quella di una quadrica di rotazione è una ciclide con tre punti doppi, e finalmente l'inversa

di un cono di rotazione è una ciclide e quattro punti doppi isolati (la ciclide di Dupin).

La ciclide con un sol punto doppio si ha quando nella sopraindicata generazione della ciclide, la quadrica S_i è tangente in un sol punto alla sfera X_i (sfera direttrice) ovvero quando questa si riduce ad un punto.

Una tal ciclide può anche definirsi come la cosiddetta *podaria* di una quadrica per rapporto ad un punto *O* della stessa, cioè come *il luogo dei piedi delle normali abbassate da O ai piani tangenti della quadrica.*

Se la quadrica *S* è *bitangente* alla sfera *X*, si ha il caso della *ciclide a due punti doppi*, che, come abbiamo detto, è la superficie inversa di un cono quadrico generale.

Il caso in cui tali due punti doppi cadano sul cerchio immaginario all'infinito fu studiato da De La Gournerie (*J. Ec. Polytech.*, XXIII, 1863; *J. de Liouville*, 2.ᵉ s. X, 1865) e Cayley (*Quart. J.*, X, XI, 1870).

La superficie generata da una conica che rota intorno ad una retta non situata nel suo piano, è in generale una ciclide con soli due punti doppi situati sul cerchio immaginario all'infinito; essi sono propriamente i due punti ciclici nel piano perpendicolare all'asse di rotazione.

Passiamo infine alla ciclide di Dupin (a quattro punti doppi).

Nella ciclide di Dupin due almeno dei punti doppi sono sempre immaginari, e le 16 rette sono, in generale, tutte immaginarie; delle 6 congiungenti i punti doppi, quattro almeno sono sempre immaginarie.

Dei cinque coni di Kummer uno solo non degenera, e i suoi piani tangenti tagliano quindi la superficie in cerchi; gli altri quattro degenerano in quattro piani tangenti singolari, (tangenti alla superficie lungo tutta una curva) dei quali almeno due sono sempre immaginari.

Le linee di curvatura della ciclide di Dupin sono cerchi.

La ciclide di Dupin si può definire come l'inviluppo di una sfera il cui centro si muove in un piano, e che tocca due date sfere; ovvero, *come l'inviluppo di una sfera il cui centro si muove su di una conica e che tocca una data altra sfera*, ovvero, *come l'inviluppo di una sfera il cui centro si muove su di una conica e che taglia ortogonalmente un' altra sfera.*

La definizione data da Dupin, cioè *l'inviluppo di una sfera che tocca tre date sfere*, non individua una sola ciclide, ma ne determina *quattro.*

È evidente inoltre che il *toro* (la superficie generata da un cerchio, che rota intorno ad una retta del suo piano) *è una speciale ciclide di Dupin.*

Se i 4 punti doppi sono immaginari una forma della ciclide è la cosiddetta *ciclide anulare (Ringcyclide)* di cui è caso particolare il *toro.*

Se due soli dei punti doppi sono reali (altri casi non sono possibili, v. sopra) due forme di ciclidi sono, la *ciclide a corno (Horncyclide)* formata di due falde esterne l'una all'altra, terminanti a punte, e riunite per i due punti doppi, e la *ciclide a fuso (Spindelcyclide)* formata di due falde interne l'una all'altra e riunite in due punti.

Come per le ciclidi generali, così anche per le

ciclidi Dupin, si può immaginare che la conica che deve contenere i centri delle sfere mobili il cui inviluppo è la ciclide, diventi una *parabola;* ipotesi analoga a quella che dà luogo per le ciclidi generali, alle ciclidi di 3.° grado o paraboliche.

Si hanno allora le *ciclidi di Dupin paraboliche, le quali sono superficie solo di 3.° ordine*, perchè si stacca il piano all'infinito.

Di tali ciclidi se ne possono costruire dei seguenti tipi, e cioè *la ciclide parabolica a corno (Parabolische Horncyclide)* in cui due punti doppi sono reali; *la ciclide parabolica ad anello (Parabolische Ringyclide)* in cui i 4 punti doppi sono tutti immaginari.

Queste superficie hanno falde che si estendono all'infinito; ad esse appartengono una retta all'infinito, e alcune altre rette reali.

Di tutte queste ciclidi sono stati costruiti modelli in gesso (v. il *Catalog math. Modelle* von Brill in Darmstadt); esemplari di questi modelli sono anche posseduti dall'Istituto matematico dell'Università di Pavia.

La classificazione delle ciclidi fu fatta in modo completo per la prima volta da Loria (*Acc. Torino*, 1884) il quale *distinse 18 specie diverse di ciclidi, in rapporto alle altre singolarità che la superficie può possedere;* queste 18 specie corrispondono naturalmente alle 18 specie delle quartiche a conica doppia generale studiate, insieme ad altre, poco tempo dopo da Segre (v. paragrafo precedente). Quest'ultimo autore dimostrò

poi anche che *delle 18 specie di ciclidi, solo dieci corrispondono a ciclidi reali (aventi equazioni a coefficienti reali)* (v. *Math. Ann.*, XXIV, p. 439).

La più antica ciclide studiata è quella a 4 punti doppi (Dupin, *Applic. de Geom.*, 1822) di cui è caso particolare il *toro*. Nel 1860 Mannheim (*Nouv. Ann.*, 1860) fece vedere che con una inversione ogni ciclide di Dupin si potea trasformare in toro.

Poco dopo le ciclidi furono cominciate a studiare, come superficie anallamatiche (v. sopra) da Moutard (*Nouvelles Ann. de math.*, 2.e s., III, 1864), da Darboux (*Ann. Ec. norm.*, 1865 e seg., 1872), Maxwell (*Quart. J.*, IX, 1867) che ne tentò una classificazione, e più tardi da Casey (*Phil. Trans.*, CLXI, 1871) in un'estesa Memoria.

Sulla teoria di tali superficie il Darboux pubblicò più tardi una monografia a parte (*Sur une classe remarquable de courbes et surfaces algebriques*, Paris, 1873, 2.a edit. 1896) a cui rimandiamo il lettore per ulteriori particolari. Finalmente il Loria nel 1884 (*Acc. Torino*, Mem., XXXVI) intraprese lo studio delle ciclidi partendo da un altro punto di vista e profittando di idee già introdotte da Lie, Klein, Reye egli fece servire la cosiddetta geometria delle sfere, in cui si considera la sfera come elemento dello spazio e dei complessi e congruenze di queste ultime, a stabilire la classificazione in 18 specie. (Vedi più avanti il Cap. XIV.)

§ 8. — Le superficie di 4.° ordine con una retta doppia.

L'equazione di una tal superficie può scriversi nel seguente modo (Kummer)

$$p^2 S + 2 p q S_1 + q^2 S_2 = 0$$

dove p, q *sono funzioni lineari e le* S *funzioni quadratiche delle coordinate. L'intersezione dei piani* $p = 0$, $q = 0$ *è retta doppia per la superficie.*

La medesima equazione può anche scriversi (Cayley)

$$\varphi_4 (x_1 x_2) + \varphi_3 (x_1 x_2) x_3 + \psi_3 (x_1 x_2) x_4 +$$
$$+ \varphi_2 (x_1 x_2) x_3^2 + \psi_2 (x_1 x_2) x_3 x_4 + \chi_2 (x_1 x_2) x_4^2 = 0$$

dove le φ_4, φ_3, $\psi_2 \ldots$ *sono funzioni di* $x_1 x_2$, *dei gradi* 4, 3, ...

L'intersezione dei piani $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ *è la retta doppia della superficie.*

La superficie è in generale di 20.ª classe.

La superficie contiene 16 rette, oltre la retta doppia; inoltre vi sono 64 piani tritangenti che segano la superficie ciascuno in due coniche; uno dei quattro punti d'incontro di queste sta sulla retta doppia, e gli altri tre sono i tre punti di contatto del piano tritangente.

Le 16 rette a due a due sono in un medesimo piano colla retta doppia; si aggruppano perciò in 8 coppie, e ciascuna di esse incontra sempre la retta doppia.

Si hanno così 64 coppie di coniche e 8 coppie di rette; ogni coppia di coniche rispetto ad ogni coppia di rette, è tale che una conica della coppia taglia una sola retta della coppia, e l'altra conica taglia l'altra retta.

Le principali particolarità che può presentare questa superficie sono le seguenti:

Uno dei piani tangenti nei punti della linea doppia può essere sempre il medesimo; *ciò si ha quando le tre funzioni φ_2, ψ_2, χ_2 dell'equazione precedente, hanno un fattore comune.*

In tal caso una delle 16 rette della superficie viene a coincidere colla retta doppia.

Ambedue i piani tangenti in ciascun punto della retta doppia possono essere sempre i medesimi; *ciò si ha quando le tre medesime predette funzioni sono diverse solo per un fattore costante.*

I punti della retta doppia possono essere tutti uniplanari; *allora la retta è una retta cuspidale della superficie;* il piano tangente in ciascun punto, varia però da punto a punto. *Ciò si ha quando i tre ultimi termini sono riducibili alla forma*

$$(x_1 x_3 + x_2 x_4)(x_3 \varphi_1 + x_4 \psi_1)$$

dove φ_1 ψ_1 sono funzioni lineari in x_1 e x_2.

Infine può accadere che i piani tangenti nei punti della retta cuspidale, sieno sempre i medesimi; *ciò si ha quando i tre ultimi termini si riducono ad una forma dei due tipi; $x_1^2 x_3 x_4$ ovvero $x_1^2 x_3^2$.*

Nel caso che la retta è cuspidale la classe della superficie è la 12.ª

Una superficie di 4.° ordine a retta doppia può avere sino a 8 altri punti doppi isolati.

L'equazione di una superficie di 4.° ordine a retta doppia e quattro punti doppi, può scriversi nel seguente modo: si abbiano tre quadriche aventi una retta in comune, $S=0$, $S'=0$, $S''=0$. Esse avranno ancora 4 punti comuni, e *una forma quadratica di* S, S', S'' *eguagliata a zero, è la equazione d'una tal superficie.*

In tal caso vi sono quattro piani che passano per la retta doppia, e per ciascuno dei punti doppi, e in ciascuno dei piani sono situate due rette della superficie che si intersecano nel punto doppio.

La superficie di 4.° ordine, a retta doppia, e 8 punti doppi ha per equazione

$$\begin{vmatrix} 0 & x_1 & x_2 & 1 \\ x_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ x_2 & a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ 1 & a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

dove a_{11}, a_{22}, a_{12} *sono forme quadratiche in* x_3 *e* x_4; a_{23}, a_{13} *sono forme lineari, e* a_{33} *è una costante.*

Vi sono 4 piani passanti per la retta doppia, e tangenti alla superficie lungo un'altra retta, su cui sono situati due punti doppi.

Gli otto punti doppi sono a 4 a 4 in 8 piani, e per ognuno di essi passano 4 di tali piani.

Questa superficie si presentò a Plücker (*Neue Geom.*, I, n. 213) nella teoria dei *complessi di rette* (v. *Geom. della retta*, Cap. XIV.)

Per la teoria delle superficie di cui abbiamo trattato in questo paragrafo si può vedere SALMON-FIEDLER (*Gem. d. R.*, II, § 335 e seg.) di cui ci siamo specialmente serviti; indi anche KUMMER (op. cit., al § 5), CLEBSCH (*Math. Ann.*, I, p. 260). Un modello in gesso d'una quartica a retta doppia si trova anche fra quelli editi da L. BRILL a Darmstadt.

§ 9. — LA SUPERFICIE ROMANA DI STEINER.

La superficie di STEINER *ha la proprietà fondamentale d'essere segata in una coppia di coniche da ogni suo piano tangente.*

Essa possiede tre rette doppie che si intersecano in un punto, che è naturalmente triplo per la superficie.

I quattro punti d'incontro delle due coniche in cui la superficie è segata da un suo piano tangente, sono: uno il punto di contatto, e gli altri tre sono ciascuno su una delle tre rette doppie.

La superficie di Steiner è di 3.ª classe; e il cono tangente condotto da un punto qualunque è del 6.° ordine.

Questa superficie appartiene a quelle studiate da KUMMER (*Berl. Monatsb.*, 1862, 66, 72) *le quali hanno la proprietà di avere quattro piani tangenti singolari che le toccano lungo una conica e che hanno per equazione*

$$S^2 - \lambda X_1 X_2 X_3 X_4 = 0$$

dove $S=0$ è una quadrica, e

$$X_1=0,\ X_2=0,\ X_3=0,\ X_4=0$$

sono le equazioni dei 4 piani tangenti singolari.

Specializzando la forma S in modo opportuno rispetto alle forme X, si hanno varie superficie con proprietà diverse; così da questa equazione generale si può avere l'equazione della superficie di Kummer a 16 punti nodali (v. § 3); specializzandola invece in altro modo, si ha la superficie di STEINER.

Propriamente l'equazione di tal superficie può ridursi alla forma

$$[X_1^2+X_2^2+X_3^2+X_4^2-2X_1X_2-2X_2X_3-2X_3X_1-$$
$$-2X_1X_4-2X_2X_4-2X_3X_4]^2-64X_1X_2X_3X_4=0$$

la quale può scriversi anche (CAYLEY)

$$\sqrt{X_1}+\sqrt{X_2}+\sqrt{X_3}+\sqrt{X_4}=0.$$

Essa è la superficie polare reciproca della superficie di 3.° ordine con 4 punti doppi (che è appunto di 4.ª classe, v. Cap. XI, § 1) *cioè della cosiddetta superficie di Cayley.*

Scegliendo per piani coordinati, i tre contenenti a due a due le rette doppie, e un altro piano, la equazione della superficie di Steiner può ridursi alla forma

$$x_2^2x_3^2+x_3^2x_1^2+x_1^2x_2^2-2x_1x_2x_3x_4=0$$

dove le tre rette doppie sono gli spigoli del triedro $x_1=0,\ x_2=0,\ x_3=0$ (KUMMER).

Una proprietà specialmente interessante della superficie di Steiner e che serve alla sua rappresentazione piana, è quella attribuita a WEIERSTRASS, che cioè *le coordinate omogenee dei suoi punti si possono esprimere per mezzo di forme ternarie quadratiche.*

CAYLEY e CLEBSCH dimostrano poi (v. op. sottocitata) che *anzi essa è la più generale superficie di genere zero le cui coordinate sieno rappresentabili in tal modo.*

Partendo dalla prima delle surriferite forme dell'equazione della superficie, *le formole per tale rappresentazione sono riducibili sempre alle seguenti:*

$$\begin{aligned} x_1 &\equiv (y_1 + y_2 + y_3)^2 \\ x_2 &\equiv (y_1 - y_2 - y_3)^2 \\ x_3 &\equiv (-y_1 + y_2 - y_3)^2 \\ x_4 &\equiv (-y_1 - y_2 + y_3)^2. \end{aligned}$$

Partendo invece dalla seconda delle forme dell'equazione, *si hanno le formole:*

$$\begin{aligned} x_1 &\equiv 2\, y_2 y_3 \\ x_2 &\equiv 2\, y_3 y_1 \\ x_3 &\equiv 2\, y_1 y_2 \\ x_4 &\equiv y_1^2 + y_2^2 + y_3^2. \end{aligned}$$

Mediante queste formole si può studiare *la rappresentazione piana* della superficie, ciò che fu fatto da CLEBSCH e poi da altri. In quanto a tale rappresentazione piana, *la superficie ha la proprietà di potersi rappresentare univocamente, senza punti eccezionali* (CLEBSCH, *Math. Ann.*, V).

Per un punto della superficie di Steiner passano ∞ *coniche. Oltre le quadriche e le rigate cubiche la superficie di Steiner è l'unica superficie che goda di tale proprietà.* (DARBOUX, *Bull. scienc. math.*, II, 1880).

Due coniche della superficie di Steiner si segano in un sol punto, e per due punti passa in generale una sola conica.

In ogni piano dello spazio vi sono 6 rette osculatrici alla superficie, e 4 rette bitangenti. Per un punto dello spazio passano poi 9 rette osculatrici.

Ogni curva algebrica situata sulla superficie è di ordine pari.

Tutte le sezioni piane della superficie sono curve razionali, ed essa è l'unica superficie, non rigata, di tal natura (PICARD, *Crelle*, C; v. anche GUCCIA, *Rend. Palermo*, I).

Un'altra proprietà importante della superficie di STEINER è quella enunciata da KRONECKER e dimostrata da CASTELNUOVO (*Rend. Lincei*, 1894):

Oltre le rigate, la superficie di Steiner è l'unica superficie irriduttibile, la quale sia segata in curve riduttibili da ogni piano di un certo sistema doppiamente infinito.

Le coppie di piani tangenti alla superficie nei punti di una retta doppia formano un'involuzione, cui appartengono i piani passanti per le altre due rette doppie.

In ogni retta doppia vi sono due punti cuspidali.

Le quattro coniche di contatto dei piani singolari si intersecano a due a due nei punti cuspidali; le medesime quattro coniche stanno su d'una

quadrica la quale taglia le rette doppie nei punti cuspidali.

Le curve assintotiche della superficie di Steiner sono quartiche gobbe di 2.ª specie (Clebsch, Cremona).

I 4 piani singolari della superficie sono i quattro piani stazionari per tutte le curve assintotiche.

Tutte le quartiche assintotiche possiedono 3 corde comuni che concorrono nel punto triplo della superficie, e per ciascuna di esse si può condurre a ciascuna quartica due piani osculatori.

Le curve assintotiche sono tagliate sulla superficie da infinite quadriche che hanno 8 punti comuni.

Ciascuna delle 4 coniche lungo cui un piano singolare tocca la superficie, è tangente a tre spigoli del tetraedro dei piani singolari; due di esse si segano su di uno spigolo (Beltrami).

Esistono ∞^3 *quadriche che segano la superficie secondo quattro coniche.*

La superficie detta *superficie romana di Steiner* fu scoperta verso il 1838 da Steiner durante il suo soggiorno a Roma; egli però nulla lasciò scritto su di essa, e fu il Kummer, nel 1863, che, a proposito della sua Memoria sulle superficie di 4.° ordine contenenti infinite coniche, ne trattò per la prima volta attribuendola a Steiner.

Indi ne trattarono Schröter (*Berl. Monatsb.*, 1863; *Crelle*, LXIV), Cremona (*Crelle*, LXIII; *Rend. Ist. Lomb.*, 1867), Lampe (*Diss.*, Berlino, 1864), Cayley (*Crelle*, LXIV; *Proc. London math. Soc.*, III, V, 1873), Clebsch (*Crelle*, LXVII), Reye (*Geom. der Lage*, II, 246) e altri.

Lo Sturm (*Math. Ann.*, III) trattò della stessa superficie considerandola come particolare superficie di 3.ª classe, e generandola quindi mediante un fascio di quadriche e una retta punteggiata ad esso proiettiva.

Per la proprietà importante di questa superficie, d'essere reciproca di quella di 3.º ordine, a 4 punti conici (v. Cap. XI, § 1) essa è stata molte volte studiata insieme a questa, ricavando le proprietà dell'una da quelle dell'altra.

Alcune proprietà della medesima superficie e della sua reciproca, furono trovate da Beltrami sin dal 1863 (*Giorn. di Batt.*, I; *Acc. Bologna*, X, 1879).

Più recente lavoro è quello di Gerbaldi (opuscolo separato, Torino, 1881), il quale si propose di stabilire tutte le proprietà della superficie partendo dalla sua rappresentazione piana più generale, mediante le forme ternarie quadratiche.

Si noti però che alla rappresentazione speciale data dal Clebsch è riducibile, come abbiamo accennato, sempre anche il caso più generale (vedi anche il capitolo IV, pag. 41 e seg. del lavoro di Gerbaldi); infine noteremo un recente lavoro di Wahlen (*Acta math.*, XIX).

Cayley considerò i casi in cui due o tutte tre le linee doppie coincidono (*Proc. L. math. Soc.*, III), e trovò che allora la superficie diventa la reciproca delle superficie di 3.º ordine speciali

$$x_1 x_3 x_4 + (x_1 + x_3) x_2^2 = 0,$$

ovvero

$$x_1 x_3 x_4 + x_2^2 x_3 + x_1^3 = 0.$$

Nel più volte citato catalogo di L. Brill esistono modelli di superficie di Steiner; essi fanno anche parte della raccolta posseduta dall'Istituto matematico dell'Università di Pavia.

§ 10. — Le rigate di 4.° ordine.

Una sviluppabile di 4.° ordine ha per *spigolo di regresso* una cubica storta; per la relazione intima che c'è fra le curve storte e le loro sviluppabili osculatrici (v. Cap. IX), la teoria della sviluppabile di 4.° ordine si riduce quindi a quella delle cubiche storte di cui abbiamo trattato al Cap. X, § 2.

Possiamo aggiungere qui solo poche osservazioni.

Una sviluppabile di 4.° ordine è sempre di genere zero, cioè è zero il genere di una sua qualunque sezione piana.

Indicando con $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, $X_3 = 0$, $X_4 = 0$ le equazioni di 4 piani, *la equazione del piano che inviluppa la sviluppabile può scriversi:*

$$X_1 t^3 + 3 X_2 t^2 + 3 X_3 t + X_4 = 0$$

e la sviluppabile stessa avrà per equazione generale

$$(X_1 X_4 - X_2 X_3 {}^2 - 4 (X_2^2 - X_1 X_3)(X_3^2 - X_2 X_4) = 0.$$

I piani che toccano due coniche situate in piani diversi, e che hanno una tangente comune, inviluppano una sviluppabile di 4.° ordine.

Se due quadriche hanno una retta comune, la superficie sviluppabile circoscritta ad esse è di 4.° ordine.

Le coordinate di un punto dello spigolo di regresso, si esprimono colle formole

$$X_1 : X_2 : X_3 : X_4 = 1 : -t : t^2 : -t^3.$$

Passiamo ora alle *rigate gobbe di 4.° ordine.*

Una rigata gobba di 4.° ordine è anche di 4.ª classe; essa è o di genere zero o di genere uno; nel primo caso avrà una curva doppia gobba di 3.° ordine, degenere o no, (in particolare una retta tripla), e la sua sviluppabile bitangente sarà di 3.ª classe; nel 2.° caso avrà una curva doppia di second'ordine degenere, e la sua sviluppabile bitangente è di 2.ª classe.

Cremona e Cayley hanno fatta la classificazione di queste superficie in 12 specie, *di cui 10 appartengono al genere 1, e 2 al genere zero.*

a) (Superficie con una retta tripla.) *Sulla retta tripla vi sono 4 punti nei quali due dei piani tangenti coincidono.*

L'equazione della superficie può ridursi alla forma (meno che nel caso IV, v. sotto).

$$k\, x_1^2\, x_2^2 = x_1^2\, x_3\, (a\, x_1 + b\, x_2) + x_2^2\, x_4\, (c\, x_1 + d\, x_2)$$

dove $x_1 = 0,\ x_2 = 0$ *è la retta tripla, i punti* $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, *e* $x_1 = x_2 = x_4 = 0$ *sono due dei punti in cui coincidono due dei piani tan-*

genti, e $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ *sono i piani tangenti doppi in tali punti.*

Per ciascuno dei 4 punti aventi la sopraindicata proprietà, passa una retta (generatrice singolare) per ciascun punto di cui il piano tangente alla superficie è sempre il medesimo.

La superficie è sempre di genere zero.

Si possono distinguere i seguenti 4 sottocasi:

I. *(8.ª specie di Cremona; 9.ª specie di Cayley.) Tutte le rette della superficie incontrano la retta tripla R.*

Le tre generatrici passanti per un punto di R non stanno in uno stesso piano; determinano tre piani, il cui inviluppo è una sviluppabile propria di 3.ª classe e 4.° ordine e che è la sviluppabile bitangente alla superficie.

Questa superficie è il luogo di una retta che si muove incontrando una retta fissa e toccando in due punti una data sviluppabile di 4.° ordine.

L'equazione della superficie è quella precedentemente scritta, dove k sia essenzialmente diverso da zero.

II. *(9.ª specie di Cremona, 3.ª di Cayley). Vi è una retta R' della superficie che non incontra la retta tripla R.*

Ciascun piano per R' contiene tre generatrici concorrenti in un punto di R, e in ogni punto di R si incrociano generatrici situate in uno stesso piano con R'; da ciascun punto di R' parte una sola generatrice.

Questa superficie si può costruire come luogo delle rette che uniscono i punti corrispondenti di una corrispondenza proiettiva (1, 1) *fra i punti*

di una retta R e quelli di una cubica piana con un punto doppio O, corrispondenza stabilita però in modo che al punto d'incontro A di R col piano della cubica, corrisponda il punto d'incontro della retta A O colla cubica stessa.

La equazione della superficie è quella di sopra in cui sia $k = 0$.

La retta R' è l'inviluppo dei piani TRITANGENTI *della superficie; essa, contata tre volte, fa le veci della sviluppabile bitangente.*

III. *(3.ª specie di Cremona; 12.ª di Cayley.) Se per ogni punto di R passano tre generatrici di cui una coincide con R, allora la sviluppabile bitangente è formata da R, e da un cono quadrico.*

Questa superficie si genera come luogo delle rette che congiungono i punti corrispondenti di una retta R e di una conica C che stieno fra loro in corrispondenza (1, 2), *cioè ad ogni punto di r ne corrispondano due di C, e ad ogni punto di C ne corrisponda uno di R; colla condizione però che la retta e la conica abbiano un punto comune il quale non sia punto unito in tale corrispondenza.*

L'equazione di tal superficie si ricava dall'equazione generale ponendo $a\,d = b\,c$, *in modo che i due termini del secondo membro abbiano un fattore comune* $a\,x_1 + b\,x_2$.

IV. *(10.ª specie di Cremona, 6.ª di Cayley.) Se per ciascun punto di R passano tre generatrici di cui due coincidono con R, allora la sviluppabile bitangente è formata dalla medesima retta R contata tre volte.*

Su R vi sono DUE PUNTI *tali che tutte tre*

le generatrici che vi passano, coincidono con R stessa.

La superficie si può generare nello stesso modo che nel caso II, *purchè si fanno coincidere i punti A e O.*

La equazione della superficie può ridursi alla forma

$$x_1^2 x_2^2 = (a x_1^2 + b x_1 x_2 + c x_2^2)(x_1 x_3 + x_2 x_4).$$

b) (Superficie aventi per curva doppia una curva storta di 3.° ordine non degenerata.) *Se una superficie di 4.° ordine contiene per curva doppia una curva storta, essa è in generale una rigata; fa eccezione solo il caso in cui la linea doppia sia l'assieme di tre rette passanti per un punto (Superficie di Steiner*, v. § 9).

Se la curva doppia è una cubica storta *non* degenere, si hanno da distinguere solo i due casi:

V. *(1.ª specie di Cremona, 10.ª di Cayley.) La superficie è generata dalle rette che congiungono i punti corrispondenti di due coniche situate comunque nello spazio in piani diversi, e tali che fra i punti dell'una e quelli dell'altra vi sia una corrispondenza biunivoca* (1, 1).

L'inviluppo dei piani bitangenti è una sviluppabile generale di 3.ª classe e 4.° ordine.

Vi sono quattro generatrici singolari, pei cui punti il piano tangente è costante.

La cubica gobba doppia ha 4 punti cuspidali, per ciascuno dei quali passa una delle generatrici singolari.

La superficie è di genere zero.

L'equazione della superficie si può ridurre alla forma

$$a_{11} X_1^2 + a_{22} X_2^2 + a_{33} X_3^2 + 2 a_{23} X_2 X_3 + \\ + 2 a_{31} X_3 X_1 + 2 a_{12} X_1 X_2 = 0$$

dove

$$X_1 = x_2 x_4 - x_3^2$$
$$X_2 = x_2 x_3 - x_1 x_4$$
$$X_3 = x_1 x_3 - x_2^2.$$

La superficie può anche definirsi come il luogo delle rette che tagliano in due punti una cubica gobba, e che appartengono ad un complesso lineare generale (v. Cap. XIV); ovvero:

come il luogo di quelle rette che tagliano in due punti una cubica gobba, e in un punto una conica propria la quale ha due punti comuni colla cubica; ovvero:

come il luogo di quelle rette del complesso lineare le quali sono intersezioni di due piani osculatori della cubica gobba.

VI. *(7.ª specie di Cremona; 8.ª di Cayley.)* Se supponiamo che il complesso lineare di cui si parla nei precedenti teoremi sia l'assieme delle rette che tagliano una retta fissa, si ha la specie che chiamiamo specie VI.

La superficie sarà generata dalle rette che tagliano in due punti una cubica gobba, e che si appoggiano ad una retta data R.

La retta contata tre volte, rappresenta la sviluppabile bitangente.

La superficie è ancora di genere zero.

La superficie può generarsi come luogo delle congiungenti i punti corrispondenti di una retta R, e una cubica piana con un punto doppio, quando fra i punti della retta e della cubica si sia stabilita una corrispondenza biunivoca (1, 1).

L'equazione di tale superficie è della stessa forma dell'equazione del caso precedente, quando si suppone che fra i coefficienti sussista la relazione

$$a_{22}^2 + 2\, a_{22}\, a_{13} - 4\, a_{23}\, a_{12} + a_{11}\, a_{33} = 0.$$

c) (SUPERFICIE AVENTI PER LINEA DOPPIA UNA CONICA E UNA RETTA CHE LA TAGLI.) *Queste superficie sono di genere zero.*

Si distinguono due casi:

VII. *(2.ª specie di Cremona; 7.ª di Cayley.)* Questa superficie è il luogo delle rette congiungenti i punti corrispondenti di una conica C e di una retta R che sieno in corrispondenza (2, 1) e non aventi alcun punto comune.

La retta R è la retta doppia.

La sviluppabile bitangente è formata da un cono quadrico e dalla retta R.

L'equazione di una tal superficie può sempre ridursi a

$$(x_1\, x_3 - x_2^2)^2 + m\, x_2\, x_4\, (x_1\, x_3 - x_2^2) + \\ + x_4^2\, (a\, x_1\, x_2 + b\, x_2^2) = 0$$

dove sia b diverso da zero. La conica doppia è quella nel piano $x_4 = 0$, *e la retta doppia è*

$$x_1 = x_2 = 0.$$

La superficie può anche generarsi come luogo

delle rette che congiungono i punti corrispondenti di una conica H e una retta R in corrispondenza (2, 2), *e che si taglino, purchè al loro punto di incontro corrisponda solo sè stesso. Allora la conica H e la retta R sono le curve doppie.*

VIII. *(4.ª specie di Cremona; 11.ª di Cayley.)* Se nelle generazioni del caso precedente si suppone che la conica C e la retta R si incontrino, e che il loro punto d'incontro come punto di C coincida con uno dei due corrispondenti in R, si ha la superficie VIII.

La sviluppabile bitangente è la retta R contata tre volte.

La conica C diventa allora la conica doppia della superficie (ciò che non è nel caso VII).

L'equazione della superficie si ottiene da quella del caso precedente ponendo $b = 0$.

Sulla conica vi è un punto cuspidale e due ve ne sono sulla retta.

d) (Superficie aventi per linee doppie, tre rette.) Sono da distinguersi i seguenti due casi *(ambedue appartengono al genere zero)*:

IX. *(5.ª specie di Cremona; 2.ª di Cayley.)* Una delle tre rette seghi le altre due, le quali non si incontrino a loro volta. Questo caso può considerarsi come derivato dai casi (*c*) quando la conica doppia si scinde in due rette distinte.

La superficie è il luogo della congiungente i punti corrispondenti di due rette sghembe R, R' in corrispondenza (2, 2), colla condizione che ciascuno dei punti in cui R, R' è incontrata da una terza R'', corrisponda a due punti riuniti nell'altra.

Su ciascuna delle rette R, R' vi sono due punti cuspidali.

La sviluppabile osculatrice è composta delle tre rette R, R', R''.

Per ogni punto di R passano due generatrici il cui piano passa per R'; e similmente per ogni punto di R' partono due generatrici il cui piano passa per R.

I soli piani passanti per R'' segano la superficie secondo coniche proprie, e i soli punti di R'' sono vertici di coni quadrici circoscritti.

La medesima superficie si può ottenere come luogo delle rette che si appoggiano a due rette sghembe R, R' e ad una conica C la quale non abbia punti comuni colle rette; ovvero:

come il luogo delle rette che si appoggiano a due rette R R', e ad una cubica gobba la quale tagli in un punto ciascuna delle rette; ovvero:

come il luogo delle rette che congiungono i punti corrispondenti di due coniche in corrispondenza (1, 1); *purchè ai punti in cui una di esse sega la retta d'intersezione dei due piani delle coniche, corrispondano i punti ove l'altra conica taglia la medesima retta, la quale risulta così una retta doppia;* ovvero:

come luogo delle rette che congiungono i punti corrispondenti di una retta R e di una conica C non aventi punti comuni, e in corrispondenza (1, 2), *purchè al punto r di R, in cui R incontra il piano di C corrispondano in C due punti r' r'' in linea retta con r. Questa retta è allora la retta doppia R'' delle costruzioni precedenti; la retta R' incontra il piano della conica in un punto O pel*

quale passano tutte le corde della conica che congiungono le coppie di punti corrispondenti ad un medesimo punto di R.

La equazione della superficie è riducibile alla forma

$$x_1^2 x_3^2 + m x_1 x_2 x_3 x_4 + x_4^2 (a x_1 x_2 + b x_2^2) = 0.$$

Le tre rette doppie sono

$$(x_1 = 0 , \quad x_4 = 0)$$
$$(x_3 = 0 , \quad x_4 = 0)$$
$$(x_1 = 0 , \quad x_2 = 0).$$

X. *(6.ª specie di Cremona e 5.ª specie di Cayley.)* Supponiamo in particolare che la retta R'' venga a coincidere colla retta R; allora si ha un'altra specie di superficie rigate; essa può definirsi come quella che si deduce colla stessa ultima costruzione del caso precedente, quando si suppone che il punto r coincida con O, cioè col punto comune a tutte le corde che congiungono le coppie di punti corrispondenti ad un medesimo punto di R.

Tale superficie può dunque anche definirsi nel seguente modo:

Si stabilisca una corrispondenza (1, 1) *fra i punti di una retta R, e i piani passanti per R; questi taglino una conica C in due punti i quali congiunti col corrispondente punto di R, danno le generatrici della superficie.*

La sviluppabile bitangente è rappresentata dalla retta R, contata due volte, e da una altra retta R' che incontra R nel punto in cui R incontra il piano di C.

Anche la curva doppia è rappresentata dalle medesime rette.

L'equazione di una tal superficie può ridursi alla forma

$$(x_2 - \alpha x_1)^2 u_2 + (x_2 x_4 - x_1 x_3)(x_2 - \alpha x_1) u_1 + \\ + (x_2 x_4 - x_1 x_3)^2 = 0$$

dove u_2, u_1 *sono forme di gradi 2, 1 in* $x_1 x_2$.

La retta R' doppia è

$$x_2 - \alpha x_1 = 0, \qquad \alpha x_4 - x_3 = 0$$

e la retta R doppia e da contarsi due volte è

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 0.$$

La sezione della superficie è in generale una curva di 4.° ordine con un tacnodo nel punto in cui questa ultima retta taglia il piano segante.

e) (SUPERFICIE RIGATE AVENTI PER LINEE DOPPIE DUE RETTE.) *Queste superficie sono di genere uno;* sono da distinguersi i due casi:

XI. *(11.ª specie di Cremona, 1.ª di Cayley.)* Le due rette non si incontrano. *Questa superficie può generarsi come luogo delle rette che si appoggiano ad una curva piana di 4.° ordine con due punti doppi, e a due rette R, R', passanti ciascuna per uno di tali punti doppi.*

La superficie può anche generarsi come luogo delle rette che congiungono i punti corrispondenti di due rette R, R' in corrispondenza (2, 2).

Da ogni punto di R partono due generatrici situate in un piano passante per R', e viceversa.

La sviluppabile bitangente è costituita dalle rette R, R'.

La stessa superficie può generarsi come luogo delle rette che si appoggiano a due rette R, R' e ad una cubica piana generale, incontrata in un punto da ciascuna delle due rette R, R'.

La equazione generale di tal superficie può ridursi alla forma

$$x_1^2 (a x_3^2 + 2 b x_3 x_4 + c x_4^2) +$$
$$+ 2 x_1 x_2 (a' x_3^2 + 2 b' x_3 x_4 + c' x_4^2) +$$
$$+ x_2^2 (a'' x_3^2 + 2 b'' x_3 x_4 + c'' x_4^2) = 0.$$

Le due rette doppie sono

$$(x_1 = 0 , \quad x_2 = 0)$$
$$(x_3 = 0 , \quad x_4 = 0).$$

Su ciascuna retta doppia vi sono 4 punti cuspidali.

XII. *(12.ª di Cremona, e 4.ª di Cayley.)* Supponiamo invece che le due rette doppie vengano a coincidere. La superficie può allora ricavarsi dalla precedente immaginando che la curva piana di 4.° ordine acquisti un *tacnodo*, riunendosi in uno i due punti doppi.

Questa superficie è il luogo delle rette che congiungono i punti corrispondenti di una retta e di una cubica piana generale avente un punto comune O colla retta, e che sia in una corrispondenza (2, 1) *colla retta; propriamente quando tale corrispondenza è stabilita nel seguente modo: la punteggiata sulla retta sia proiettiva al fascio di raggi col vertice in O, e al punto O della retta corrisponda la tangente in O alla cubica; i due punti della cubica che allora corrispondono ad un*

punto della retta, sieno quei due altri nei quali il raggio corrispondente sega la cubica.

Questa superficie ha per curva doppia una retta contata due volte, e per sviluppabile bitangente la medesima retta contata due volte.

L'equazione di una tal superficie può scriversi

$$u_4 + (x_2 x_4 - x_1 x_3) u_2 + (x_2 x_4 - x_1 x_3)^2 = 0$$

dove u_4, u_2 *sono forme di gradi 4, 2 in* x_1 *e* x_2, *e la retta doppia (da contarsi due volte) è*

$$x_1 = 0 \,, \qquad x_2 = 0.$$

Delle rigate gobbe di 4.° ordine si occuparono Chasles (*Compt. Rend.*, 1861) e Cayley in una prima Memoria (*Phil. Trans.*, 1864) in cui questi distinse solo 8 specie; indi Cremona (*Mem. di Bologna*, VIII, 1868) ne fece, con metodi di geometria pura, la classificazione completa in 12 specie, e l'anno seguente il Cayley (*Phil. Trans.*, 1869) ripigliò il medesimo argomento, e ritrovò di nuovo le 12 specie di Cremona.

Lo studio delle rigate dal punto di vista della realità e meno di certi elementi fu intrapreso da Rohn (*Math. Ann.*, XXIV, XXVIII) il quale ha trattato anche altri problemi analoghi, p. es. quello relativo alla superficie di Kummer (v. il nostro § 3, Cap. XII). Sulle rigate gobbe di 4.° ordine con tre rette doppie c'è un altro più recente lavoro di Segen (*Crelle*, CXII).

Nel più volte citato libro di Salmon-Fiedler sono riportati i principali risultati del Cayley.

Nella collezione di modelli di Brill in Darmstadt è compresa un'intera serie di modelli di rigate di 4.° ordine.

Altre superficie di 4.° ordine che sono state specialmente studiate, oltre quelle di cui abbiamo già trattato, sono le seguenti:

Superficie di 4.° ordine con punti tripli (Lampe, *Diss.*, Berlin, 1864; Rohn, *Math. Ann.*, XXIV).

Superficie di 4.° ordine con un numero finito di rette (Sturm, *Math. Ann.*, IV; Schur, *Math. Ann.*, XX).

Quattro superficie di 4.° ordine razionali (Cremona, *Collect. math.*, 1881; Noether, *Math. Ann.*, XXXIII), ecc.

In quanto a queste ultime si dimostra dal Noether, che *esse sono le uniche superficie quartiche razionali prive di curve multiple.*

CAPITOLO XIII.

Superficie di ordine superiore al quarto. Superficie rigate.

§ 1. — Superficie di 5.° ordine non rigate.

Fra le superficie di 5.° ordine finora studiate una delle più notevoli è quella *contenente una curva doppia del 5.° ordine.* Eccone le principali proprietà:

La curva del 5.° ordine che è doppia per la superficie possiede un punto triplo, che è tale anche per la superficie.

La superficie possiede 10 rette che sono corde della curva doppia.

La configurazione di queste 10 rette è la medesima di quella delle 10 rette che restano dalle 16 di una superficie di 4.° ordine a conica doppia quando se ne sopprime una e le altre cinque che incontrano questa; ovvero, ciò che è lo stesso, *quella configurazione è la stessa dalle 10 rette che restano delle 27 di una superficie di 3.° ordine, quando di queste se ne sopprimono due formanti un assieme gobbo, e le altre 15 che incontrano l'una o l'altra delle due rette soppresse.* Quindi:

Ognuna delle 10 rette ne incontra altre tre; le 10 rette sono distribuite a due a due in 15 piani, e si incontrano in 15 punti; per ogni retta passano tre piani; in ognuno di questi vi sono 5 punti d'incontro di rette, e per ognuno di questi passano cinque piani.

Vi sono 5 quaterne gobbe di rette (assiemi di 4 rette che a due a due non si incontrano).

La superficie è rappresentabile sul piano.

Sulla curva doppia vi sono 8 punti cuspidali.

È evidente che sulla superficie esistono 10 sistemi di quartiche piane, sezioni della superficie con piani passanti per una delle 10 rette.

Ciascuna quartica di un sistema incontra in due punti FISSI *la curva doppia; e questi due punti sono quelli in cui la retta corrispondente a quel sistema di quartiche incontra la curva doppia; la quartica incontra poi la curva doppia ancora in tre punti che sono naturalmente punti doppi per la quartica.*

In ogni sistema vi sono due quartiche che toccano la retta a cui quel sistema è coordinato; i piani delle due quartiche sono piani tangenti stazionari; i punti di contatto sono punti parabolici.

Due quartiche appartenenti a due sistemi diversi hanno 4 o 3 punti comuni secondochè le rette che sono coordinate ai due sistemi si incontrano o no.

In corrispondenza colle cinque quaterne gobbe di rette, vi sono cinque sistemi di coniche sulla superficie; propriamente: *una conica di un sistema incontra le 4 rette di una quaterna, e non le 6 rimanenti.*

Ogni conica incontra in 4 punti la curva doppia; due coniche dello stesso sistema non si incontrano; due coniche di sistemi diversi si incontrano in generale in un punto.

La superficie possiede in tutto 35 piani tritangenti, 20 dei quali segano la superficie secondo due coniche e una retta, e 15 secondo due rette e una cubica; per ogni retta della superficie passano due della prima specie e tre della seconda.

I principali numeri caratteristici per la superficie sono i seguenti: (v. Cap. IX, § 1).

$a = 10$ (ordine del cono circoscritto ecc.),

$\delta = 12$ (numero delle generatrici doppie di tal cono),

$\varkappa = 18$ (numero delle generatrici di regresso di tal cono),

$n' = 12$ (classe della superficie),

$b' = 25$ (classe della sviluppabile bitangente),

$c' = 24$ (classe della sviluppabile dei piani stazionari),

$\sigma' = 20$ (ordine della curva parabolica).

Per un punto della superficie passano 4 tangenti doppie e 12 rette osculatrici.

In un piano qualunque vi sono 15 rette osculatrici e 20 rette bitangenti. Fra le tangenti in un punto alla superficie, ve ne sono 4 che la toccano altrove.

Una costruzione proiettiva della superficie è la seguente:

Congiungendo i punti corrispondenti di due sistemi piani omografici, e trovando i punti d' in-

contro di queste congiungenti coi piani di una stella correlativa a quei sistemi piani, si ottiene la superficie in discorso; il punto triplo è il centro della stella (Del Re).

Della superficie in discorso fu fatta menzione da Clebsch (*Math. Ann.*, III) e Cremona (*Id.*, IV). Indi ne trattò più diffusamente lo Sturm (*Id.*, IV), e ad essa è dedicato l'importante lavoro di laurea di Caporali (*Ann. di mat.*, VII). Una varietà della superficie è il luogo dei punti di contatto dei piani condotti da un punto fisso alle quadriche di un fascio, luogo studiato da Darboux (*Bull. des sciences math.*, 1872); ma tal superficie ha la particolarità che sei delle sue rette passano per il punto triplo. Altri lavori sulla stessa superficie sono quelli di Del Re, cui si deve la generazione proiettiva sopra enunciata (*Acc. Napoli*, 1886; *Rend. Lincei*, 1890; *Acc. Torino*, 1893).

Un'altra superficie di 5.° ordine studiata, come la precedente, specialmente per mezzo della sua rappresentazione piana, è quella *con una curva doppia di 3.° ordine.*

Questa superficie contiene 11 rette le quali a due a due non si tagliano e sono corde della cubica doppia; contiene inoltre 55 coniche, ciascuna delle quali taglia in un punto due delle rette. Due delle coniche si tagliano o no secondochè le coppie di rette cui esse sono coordinate (secondo la precedente relazione) non hanno rette comuni o l'hanno.

La superficie ha 220 piani tritangenti che passano a 20 a 20 per ciascuna delle rette della su-

perficie; ha poi altri 55 piani tritangenti, che sono quelli passanti per le 55 coniche; e ha infine altri piani tritangenti che segano la superficie secondo curve di 5.° ordine NON *degenerate.*

Si conduca per una retta della superficie il fascio di piani; ciascuno di questi taglia la superficie ancora in una quartica piana la quale taglia la retta in due punti fissi e due punti mobili, i quali ultimi formano un' involuzione; vi sono perciò due piani particolari pei quali la quartica è tangente alla retta. I due punti fissi d' incontro della quartica colla retta, sono quelli nei quali la retta taglia la cubica doppia.

Sulla cubica doppia vi sono 10 punti cuspidali per la superficie.

Questa superficie fu considerata da CLEBSCH (*Math. Ann.*, I) che ne studiò la rappresentazione piana, e da STURM (*Id.*, IV). Altri lavori più recenti sullo stesso soggetto sono quelli di DEL RE (*Lincei*, 1892-93; *Acc. Modena*, IX, 1893).

La superficie del 5.° ordine con una quartica doppia di 1.ª specie fu considerata da CLEBSCH (*Gött. Abhand.*, XV; *Math. Ann.*, III), NOETHER (*Math. Ann.*, III), STURM (*Id*, IV); di una superficie di 5.° ordine con retta tripla trattò il CREMONA nella Memoria sulle *Trasf. biraz. dello spazio* (*Rendic. Istit. Lomb.*, 1871) e più recentemente DEL RE (*Lincei*, 1891), e di una superficie di 5.° ordine con due rette sghembe doppie trattò, sempre mediante la rappresentanza piana, CLEBSCH (*Math. Ann.*, I).

§ 2. — Sviluppabili di 5.° ordine.

Una sviluppabile di 5.° ordine è di 4.ª classe, ha una generatrice d'inflessione, e una curva doppia di 2.° ordine.

Una sua sezione piana è sempre di genere zero, e quindi è di genere zero la superficie.

Essa ha per spigolo di regresso una quartica gobba di 1.ª specie, con un punto cuspidale, che è triplo per la superficie.

Essa è la sviluppabile circoscritta a due quadriche aventi fra loro un contatto stazionario in un punto.

La sviluppabile di 5.° ordine è l'inviluppo dei piani tangenti comuni a due coniche aventi un punto comune, e tali che una di esse sia tangente nel punto comune all'intersezione dei piani delle due coniche (Cremona).

Ogni generatrice della superficie ne incontra un'altra che Cremona chiamò *coniugata* alla prima; il luogo dei punti d'incontro di due generatrici coniugate è naturalmente la conica doppia K. Nello stesso modo chiamiamo *coniugati i punti* in cui due generatrici coniugate toccano la curva cuspidale C, e *piani coniugati* quelli tangenti alla sviluppabile lungo due generatrici coniugate.

Tutte le rette che congiungono due punti coniugati della quartica gobba passano per uno stesso punto che è il punto C in cui la generatrice di inflessione della sviluppabile taglia il piano oscu-

latore della quartica nel punto stazionario A; tutte le medesime rette formano le generatrici di un cono quadrico S.

Il piano che contiene due generatrici coniugate è tangente al medesimo cono quadrico S. La retta intersezione di due piani coniugati è sempre tangente alla conica doppia K, e quindi sta in un piano fisso.

La generatrice d'inflessione è tagliata dalle coppie di piani coniugati in coppie di punti di una involuzione, di cui i punti doppi sono il punto B in cui la quartica è toccata dalla generatrice di inflessione, e il punto C in cui la stessa retta taglia il piano osculatore della quartica in A.

I punti coniugati sulla quartica sono coniugati armonici rispetto al vertice del cono quadrico S (di cui si parla sopra) e al piano della conica doppia K. E analoga proprietà per i *piani coniugati.*

Per *rapporto anarmonico di 4 punti della quartica gobba* si intende il rapporto anarmonico dei 4 piani che passano per i 4 punti e per la retta che congiunge il punto stazionario A della quartica al punto D in cui la generatrice della sviluppabile passante per A taglia il piano tangente a questa lungo la generatrice d'inflessione.

Analogamente *per rapporto anarmonico di 4 piani tangenti della sviluppabile* si intenderà quello dei 4 punti in cui essi tagliano la retta che congiunge il punto B, in cui la quartica è toccata dalla generatrice d'inflessione, col punto C in cui questa generatrice taglia il piano osculatore della quartica in A.

Si ha allora:

La conica doppia K è l'inviluppo di un piano che incontra la curva storta in 4 punti formanti un gruppo equianarmonico.

Il cono quadrico S è il luogo di un punto da cui si possono condurre alla sviluppabile 4 piani tangenti formanti un gruppo equianarmonico.

Il luogo di un punto da cui possono condursi quattro piani tangenti armonici alla sviluppabile è una superficie di 3.° ordine e 4.ª classe.

L'inviluppo di un piano che taglia la quartica gobba in 4 punti armonici è una superficie di 4.° ordine e 3.ª classe.

Indicando con $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, $X_3 = 0$, $X_4 = 0$ quattro piani, l'equazione della sviluppabile di 5.° ordine può scriversi

$$X_1^3 X_4^2 - 18 X_1^2 X_3 X_4 + 54 X_1 X_2^2 X_3 X_4 + \\ + 81 X_1 X_3^4 - 27 X_2^4 X_4 - 54 X_2^2 X_3^3 = 0$$

(SCHWARZ)

dove $X_4 = 0$ è un piano stazionario, il punto

$$X_1 = X_2 = X_3 = 0$$

è il punto triplo della superficie, cioè il punto cuspidale della curva di regresso; la generatrice di inflessione è la retta $X_3 = X_4 = 0$, e la conica doppia è $X_2 = 0$, $X_1 X_4 - 9 X_3^2 = 0$.

Il piano tangente alla superficie si esprime colla formola

$$X_1 t^4 + 4 X_2 t^3 + 6 X_3 t^2 + X_4 = 0$$

dove t è un parametro arbitrario; il piano contenente due generatrici è dato da:

$$X_1 t^4 - 6 X_3 t^2 - 3 X_4 = 0$$

e il cono S inviluppato da tale piano è

$$X_1 X_4 - 3 X_3^2 = 0.$$

Il piano

$$X_1 t^3 + 3 X_2 t + 3 X_3 = 0$$

passa per le generatrici della sviluppabile, e inviluppa il cono quadrico

$$3 X_2^2 - 4 X_1 X_3 = 0$$

su cui sta anche la quartica, la quale risulta come intersezione dei due ultimi coni, i quali hanno comune il piano tangente $X_1 = 0$, *e il vertice del secondo sta sul primo, cioè la congiungente i vertici è una generatrice del primo.*

Le coordinate X_1, X_2, X_3, X_4 *di un punto dello spigolo di regresso si esprimono colle formole*

$$X_1 : X_2 : X_3 : X_4 = 3 : -2t : t^2 : -t^4.$$

Delle sviluppabili di 5.° ordine si occuparono Cayley (*Camb. J.*, V, 1850; *Quart. J.*, 1863), Chasles (*Comptes Rendus*, 1862, pag. 317, 418, 715), Cremona (*Id.*, pag. 604), Schwarz (*Crelle*, LXIV). Per una trattazione analitica dei teoremi dati da Cremona, v. D'Ovidio e Dino (*Giorn. di Batt.*, III).

§ 3. — Rigate gobbe di 5.° ordine.

Le rigate gobbe di 5.° ordine possono essere o di genere zero, o di genere 1, o di genere 2.

Quelle di genere zero contengono tutte una curva doppia del 6.° ordine degenerata o no. *

Quelle di genere 1 contengono una curva doppia del 5.° ordine degenerata o no.

Quelle di genere 2 contengono una curva doppia di 4.° ordine degenerata.

Lo Schwarz (*Crelle*, LXVII) *ne ha classificate 10 specie di genere zero, 4 di genere 1, e una di genere 2.*

Quelle di genere zero e di genere 1 contengono un sistema infinito di curve piane di 3.° ordine, salvo quelle superficie di genere zero le quali contengono una retta direttrice pei cui punti passa sempre una sola *altra generatrice.*

Le rigate gobbe di genere zero possono generarsi in uno *dei due seguenti modi:*

I. *Si facciano corrispondere biunivocamente i punti di una retta e quelli di una quartica piana di genere zero; il luogo delle rette che congiungono i punti corrispondenti è in generale una rigata gobba di genere zero, e di 5.° ordine.*

II. *Si facciano corrispondere biunivocamente*

* Considerando anche una retta *quadrupla* come 6 rette doppie coincidenti, e quindi come una speciale degenerazione di una curva doppia del 6.° ordine.

i punti di due cubiche piane di genere zero, aventi un punto comune che corrisponda a sè stesso; il luogo delle rette congiungenti i punti corrispondenti è una rigata gobba di genere zero e di 5.° ordine.

In luogo di questa seconda generazione si può poi anche considerare quest'altra:

II *a. Si facciano corrispondere biunivocamente i punti di una conica e quelli di una cubica di genere zero; il luogo delle rette congiungenti i punti corrispondenti è la rigata gobba razionale di 5.° ordine.*

In quest'ultima costruzione la conica potrà decomporsi in una retta doppia, e allora si considererà una corrispondenza (2, 1) fra i punti della retta e quelli della cubica.

L'equazione di una superficie generata nel primo modo si può formare eliminando t fra due equazioni del tipo

$$X_1 t^4 + X_2 t^3 + X_3 t^2 + X_4 t + X_5 = 0$$
$$X_6 t + X_7 = 0$$

dove le $X = 0$ rappresentano piani dello spazio.

L'equazione di una superficie generata nel secondo modo si può in generale formare eliminando t fra le due equazioni

$$X_1 t^3 + X_2 t^2 + X_3 t + X_4 = 0$$
$$X_5 t^2 + X_6 t + X_7 = 0$$

(in luogo della seconda di queste equazioni si può sostituire naturalmente una combinazione lineare delle due, e quindi una seconda equazione cubica in t).

Colla prima costruzione si ha una rigata gobba razionale con una retta quadrupla (la retta $X_6 = X_7 = 0$) *(tipo I di* Schwarz).

Colla seconda costruzione si hanno in generale rigate gobbe aventi per linea doppia una sestica con un punto triplo, e di genere 1 (tipo II).

Questa sestica può degenerare e si hanno allora i seguenti altri casi: *La curva doppia è formata:*

III. *da una retta tripla e da una cubica gobba che ha due punti comuni colla retta tripla.*

Tutte le generatrici si appoggiano alla retta tripla (retta direttrice).

IV. *da una retta tripla direttrice, da una conica e da una retta.*

V. *da una retta tripla e una doppia ambedue direttrici, e da due rette doppie.*

VI. *da una retta direttrice, e una curva gobba di 5.° ordine con un punto triplo e tre punti doppi apparenti; questa ha due punti comuni colla retta.*

VII. *da una retta direttrice, una quartica gobba con un punto doppio, e un'altra retta; la quartica taglia in un punto la retta direttrice.*

VIII. *da una conica e una quartica gobba con un punto doppio; la conica passa per questo e per altri due punti della quartica.*

IX. *da tre coniche, con un punto comune, e che si tagliano a due a due ancora in un punto.*

X. *da una retta direttrice, e una quintica gobba con un punto doppio.*

Le rigate gobbe di 5.° ordine di genere 1 si possono generare nel seguente modo:

Si immagini in un piano una curva di 3.° ordine generale, e si assuma su essa un punto, da

cui si proiettino gli altri punti della curva; *questi verranno allora associati in coppie*; *si immagini che la curva si sdoppi in due*, *separandone i piani*, *e che un punto dell'una corrisponda a quello dei due punti dell'altra con cui esso non coincideva prima dello sdoppiamento; il luogo delle congiungenti i punti corrispondenti è la rigata gobba di genere 1* (Schwarz).

Sono da distinguersi allora le seguenti specie:

XI. *Sup. con una curva di 5.° ordine doppia; per ogni punto di questa passano due generatrici*, *di cui ciascuna taglia la curva doppia ancora in due punti.*

Per ogni punto dello spazio passano 5 piani, *di cui ciascuno ha due rette comuni colla superficie.*

Per ogni punto della sup. passano due cubiche piane giacenti sulla superficie.

XII. *Sup. con una retta direttrice tripla*, *e una conica doppia.*

XIII. *Sup. con una retta direttrice tripla*, *una retta direttrice doppia*, *e una retta doppia.*

XIV. *Sup. con una retta direttrice doppia*, *e una quartica gobba doppia.*

Le rigate gobbe di 5.° ordine e genere 2 si possono infine, generare nel seguente modo:

Si consideri una quartica piana con un punto doppio, *e il fascio di raggi partenti da questo; si immagini una retta punteggiata (a) riferita proiettivamente al fascio*, *e in modo che un punto della retta coincida con uno dei due punti d'incontro del raggio ad esso corrispondente*, *colla quartica; il luogo delle rette che congiungono ciascun punto della retta*, *coi due punti variabili in*

cui il raggio ad esso corrispondente taglia la quartica, è una rigata di 5.° ordine di genere 2.

La retta (a) è retta tripla direttrice per la superficie, sulla quale esiste poi anche un'altra retta doppia direttrice.

Per altri dettagli si vegga il lavoro citato di SCHWARZ da cui noi abbiamo presi tutti questi risultati.

§ 4. — SUPERFICIE DI 6.° ORDINE, O CLASSE.

Una superficie di 6.ª *classe* fu considerata da S. KANTOR (*Wien. Berichte*, 1879, II, pag. 768); essa è generata nel seguente modo:

Si considerino tre punti $A_1\,A_2\,A_3$ nello spazio e una quadrica F_2. Da un punto variabile P di questa si proiettino i punti A sulla quadrica; il piano dei tre punti proiezioni inviluppa la superficie di 6.ª classe.

Questa superficie è rappresentabile sul piano; essa ha un piano quadritangente (il piano dei tre punti A), il quale oscula la superficie in ciascuno dei punti di contatto.

Due piani tangenti alla superficie che si tagliano in una retta a del piano quadritangente, sono separati armonicamente da questo e dal piano passante per il polo di esso rispetto alla quadrica.

Alla superficie è doppiamente circoscritto un cono di 3.ª classe col vertice nel polo anzidetto.

Nel piano quadritangente vi sono 3 rette (i lati del triangolo $A_1\,A_2\,A_3$) per ciascuna delle quali passano infiniti piani bitangenti alla superficie.

La superficie duale a questa è naturalmente di 6.° ordine, ha un punto quadruplo, 3 rette doppie passanti per questo, e una curva doppia di 3.° ordine piana.

Il medesimo autore ha considerato (loc. cit.) anche la seguente altra superficie:

Si considerino 4 punti $A_1\, A_2\, A_3\, A_4$ e una quadrica F_2; da un punto di questa proiettando su sè stessa i 4 punti si hanno altri 4 punti

$$A'_1\, A'_2\, A'_3\, A'_4;$$

i due tetraedri (A) (A') sono omologici; *il loro piano di omologia inviluppa una superficie di 6.ª classe.*

Un'altra superficie di 6.° ordine è quella considerata da Weyr (*Wiener Berichte*, 1882, II, pagina 515), ed è formata nel seguente modo:

Su di una cubica gobba si consideri una involuzione di 4 punti; *i lati del tetraedro dei quattro punti di ciascun gruppo generano una superficie* RIGATA *di 6.° ordine, avente la cubica per curva tripla. Le facce del tetraedro sono piani osculatori di una curva di 3.ª classe.*

Il cono circoscritto alla superficie e col vertice in un punto arbitrario dello spazio è di 6.ª classe e possiede per piani tangenti tripli, i tre piani osculatori della sopraindicata curva di 3.ª classe e passanti pel punto dato.

Un'altra superficie di 6.° ordine è quella considerata da NOETHER (*Math. Ann.*, III, pag. 203 e seg.). *Essa possiede per curva doppia una cubica gobba e una retta che non taglia la cubica.*

La sua equazione si può scrivere

$$\Sigma A_{ik} y_i y_k \qquad (i, k = 1, 2, 3)$$

dove

$$y_1 = L_2 M_3 - L_3 M_2$$
$$y_2 = L_3 M_1 - L_1 M_3$$
$$y_3 = L_1 M_2 - L_2 M_1$$

essendo le L, M funzioni omogenee lineari nelle coordinate $x_1 x_2 x_3 x_4$, e le A date dalle formole

$$A_{ik} = \alpha_{ik} x_3^2 + 2 \beta_{ik} x_3 x_4 + \gamma_{ik} x_4^2.$$

Ogni piano del fascio

$$x_4 - \lambda x_3 = 0$$

taglia la superficie in una curva variabile di 4.° ordine razionale (con tre punti doppi), oltre che nella retta, asse del fascio, contata due volte.

La equazione della superficie contiene 18 costanti, perchè la esistenza della cubica doppia e della retta doppia assorbe 66 costanti, come il NOETHER dimostra.

Oltre la retta doppia, la superficie possiede 10 rette.

La superficie possiede 12 coniche e 32 cubiche gobbe.

A due a due queste sono situate insieme alla cubica doppia su di un medesimo iperboloide, e passano per gli stessi due punti della retta doppia.

Ognuna di esse ha cinque punti comuni colla

cubica doppia, e non incontrano nessuna delle 10 rette.

Ciascuna delle 32 cubiche è coordinata a 6 coniche, ciascuna delle quali essa taglia in un punto.

Ordinando le 12 coniche in sei coppie, col porre in una coppia quelle che passano per gli stessi punti della retta doppia, e prese cinque coniche arbitrariamente in cinque coppie, esiste sempre una delle 32 cubiche storte che taglia in un punto le cinque coniche scelte; la sesta conica tagliata dalla medesima cubica resta così in modo unico determinata.

Questa superficie è di genere zero, e perciò rappresentabile sul piano. Tale rappresentazione piana, insieme a molte altre proprietà, sono studiate dal Noether *(sopracit.)*

Altre superficie sestiche sono quelle cosiddette *di contatto* alla superficie di Kummer, e il cui studio scaturisce da quello delle funzioni iperellittiche di genere 2. *Esse toccano la superficie di Kummer lungo una curva di 12.° ordine.*

Per la loro equazione, cosiddetta *razionale*, perchè *i suoi cofficienti sono invarianti razionali della sestica binaria*, v. Pascal (*Ann. di mat.* XIX).

Altre superficie di 6.° ordine sono considerate da Pieri *(Acc. Torino*, 1889), Humbert (*Compt. Rend.*, 1895), ecc.

Diremo finalmente qualcosa sulle *sviluppabili di 6.° ordine.*

La curva di regresso di una tal superficie non può essere di ordine superiore al 6.°, nè inferiore al 4.°

La superficie è sempre di genere zero, cioè è zero il genere di una sua sezione piana.

Vi sono tre specie di superficie sviluppabili di 6.° ordine; cioè:

1. *Quella il cui spigolo di regresso è una quartica gobba, la quale può essere o di 1.ª o di 2.° specie. Nel primo caso ha un punto doppio effettivo e due punti doppi apparenti; è cioè la intersezione di due quadriche che hanno un contatto in un punto; nel secondo caso ha tre punti doppi apparenti.*

I numeri caratteristici sono (v. Cap. IX, § 4 *per il significato dei simboli):*

$$m=6,\quad \alpha=4,\quad \beta=0,\quad x=6,\quad y=4,\quad g=6,$$
$$\lambda=4,\quad \tau=0,\quad k=6,\quad R=6.$$

La sezione piana è una curva di 6.° ordine e classe, con 4 cuspidi, 6 punti doppi, 4 tangenti di flesso, e 6 tangenti doppie.

Per altre proprietà vedi il Cap X, § 4, p. 373.

2. *Quella il cui spigolo di regresso è una quintica storta con due cuspidi, e 4 punti doppi apparenti.*

I numeri caretteristici sono:

$$m=5,\quad \alpha=2,\quad \beta=2,\quad x=5,\quad y=5,\quad g=4,$$
$$\lambda=2,\quad \tau=0,\quad k=4,\quad R=6.$$

Una sezione piana di questa superficie è di 6.° ordine e 5.ª classe, con 5 punti doppi, 5 cuspidi, due flessi, 4 tangenti doppie.

3. *Quella il cui spigolo di regresso è una sestica storta con 4 cuspidi, e 6 punti doppi apparenti.*

I numeri caratteristici sono:

$$m=4,\quad \alpha=0,\quad \beta=4,\quad x=4,\quad y=6,\quad g=3,$$
$$\lambda=0,\quad \tau=0,\quad k=3,\quad R=6.$$

I quattro piani tangenti lungo le 4 generatrici cuspidali passano per uno stesso punto.

La sezione piana è di 6.° ordine e 4.ª classe, con 6 cuspidi, 4 punti doppi, 3 tangenti doppie, e nessun flesso.

L'equazione generale della sviluppabile di 6.° ordine può scriversi nel seguente modo:

Sieno $X_1=0, \ldots X_5=0$ le equazioni di cinque piani; le forme X sono allora naturalmente legate da una relazione lineare che scriveremo

$$a_1 X_1 + 4 a_2 X_2 + 6 a_3 X_3 + 4 a_4 X_4 + a_5 X_5 = 0.$$

L'equazione della sviluppabile sestica può scriversi (Cayley)

$$(X_1 X_5 + 4 X_2 X_4 + 3 X_3^2)^3 - \\ - 27 (X_1 X_3 X_5 - X_1 X_4^2 - X_2^2 X_3 + \\ + 2 X_2 X_3 X_4 - X_3^3)^2 = 0.$$

Lo spigolo di regresso è dato dall'intersezione (parziale o totale) delle due superficie

$$X_1 X_5 - 4 X_2 X_4 + 3 X_3^2 = 0$$
$$X_1 X_3 X_5 - X_1 X_4^2 - X_2^2 X_3 + 2 X_2 X_3 X_4 - X_3^3 = 0.$$

La curva doppia o nodale è data dalle equazioni

$$\frac{X_1 X_3 - X_2^2}{X_1} = \frac{X_1 X_4 - X_2 X_3}{2 X_2} =$$
$$= \frac{X_1 X_3 + 2 X_2 X_4 - 3 X_3^2}{6 X_3} = \frac{X_2 X_5 - X_3 X_4}{X_4} = \frac{X_3 X_5 - X_4^2}{2 X_5}$$

e i punti d'incontro della curva nodale e dello spigolo di regresso sono dati dalle equazioni:

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{X_2}{X_3} = \frac{X_3}{X_4} = \frac{X_4}{X_5}.$$

Le varie specie di sviluppabili sestiche, si distinguono secondo la natura dei cofficienti $a_1 \ldots a_5$; cioè dalla natura delle radici dell'equazione di 4.° grado avente per coefficienti tali numeri (Cayley). Propriamente:

se tali radici sono disuguali si ha la sviluppabile corrispondente ad uno spigolo di regresso di 6.° ordine;

se due radici sono eguali, si ha quella corrispondente allo spigolo di regresso di 5.° ordine;

se due paia di radici sono eguali si ha la sviluppabile corrispondente allo spigolo di regresso di 4.° ordine e 2.ª specie;

se le quattro radici formano un gruppo armonico, si ha la sviluppabile corrispondente allo spigolo di regresso di 4.° ordine e 1.ª specie;

se tre o quattro radici sono eguali la sviluppabile degenera rispett. in altre di 5.° o di 4.° ordine.

Delle sviluppabili di 6.° ordine si occuparono Cayley (*Camb. Math. J.*, V, 1850; *Quart. J.*, VII, 1865; IX, 1867; *Ann. di mat.*, II (1868) pag. 99 e 219, ecc.), Salmon (*Camb. Math. J.*, 1850), Chasles (*Compt. Rend.*, LIV, 1862), Schwarz (*Crelle*, LXIV).

Delle rigate gobbe del 6.° ordine si sono occupati Bergstedt (*Diss.,* Lund, 1886), Fink (*Diss.*

Realsch. Würtemb., 1887), Wiman (Lund, 1892) (v. una nota in calce ad un lavoro di Wiman (*Acta math.*, XIX)).

§ 5. — Sviluppabili di 7.° ordine.

La curva di regresso per una sviluppabile di 7.° ordine può essere o di 5.° o di 6.° o di 7.° ordine.

Si può enunciare un teorema che vale per tutte le sviluppabili di ordine dispari.

In ogni superficie sviluppabile di ordine dispari, il numero dei piani tangenti inflessionali è dispari, ed è dispari il numero delle cuspidi della curva di regresso (Schwarz).

Tutte le sviluppabili sino all'ordine 7.° incl. sono di genere zero, inquantochè le loro sezioni piane sono di tal genere; ciò porta che è costante per esse la somma dell'ordine dello spigolo di regresso e dell'ordine della curva nodale.

Tutte tali superficie (sino al 7.° ordine incl.) si possono generare come inviluppi di piani nelle cui equazioni entra razionalmente *un parametro t; cioè piani rappresentati da equazioni della forma*

$$X_1 t^n + X_2 t^{n-1} + \ldots = 0$$

dove n è un numero intero positivo, e le X sono espressioni lineari nelle coordinate.

Tali sviluppabili sono quelle che il Cayley chiamò *planari*, e ad esse è dedicato il lavoro dello Schwarz (*Crelle*, LXIV).

I numeri caratteristici per le tre specie di sviluppabili di 7.° ordine sono i seguenti (v. SCHWARZ, *cit.*):

1. *curva di regresso di 5.° ordine:*

$$m = 7,\quad g = 10,\quad h = 5,\quad \alpha = 5,\quad \beta = 1,$$
$$x = 10,\quad y = 8,\quad \lambda = 7,\quad \tau = 2,\quad k = 22,\quad R = 13;$$

2. *curva di regresso di 6.° ordine:*

$$m = 6,\quad g = 7,\quad h = 7,\quad \alpha = 3,\quad \beta = 3,$$
$$x = 9,\quad y = 9,\quad \lambda = 6,\quad \tau = 1,\quad k = 18,\quad R = 12;$$

3. *curva di regresso di 7.° ordine:*

$$m = 5,\quad g = 5,\quad h = 10,\quad \alpha = 1,\quad \beta = 5,$$
$$x = 8,\quad y = 10,\quad \lambda = 5,\quad \tau = 0,\quad k = 15,\quad R = 11.$$

§ 6. — SUPERFICIE RIGATE DI ORDINE QUALUNQUE.

Alle pag. 294-295 abbiamo indicate alcune proprietà generali delle rigate algebriche; a pag. 317-327 abbiamo poi indicate altre proprietà; queste si riferiscono all'ordine, alla classe, al genere, alla curva nodale, alle curve tracciate su di una rigata, ecc. Ora senza ripetere quelle proprietà, ne indicheremo alcune altre interessanti.

Notiamo prima di tutto la proprietà proiettiva: *Ogni piano contenente una generatrice d'una superficie rigata gobba, è tangente in un punto e in uno solo alla superficie; il fascio di piani tangenti è proiettivo colla punteggiata dei punti di contatto lungo la generatrice* (CHASLES).

Notiamo indi le seguenti proprietà metriche:

Segando una superficie rigata con piani paralleli ad un piano fisso, le tangenti delle curve sezioni nei punti di una stessa generatrice, formano un paraboloide.

Un paraboloide è ancora formato dalle normali alla superficie lungo i punti di una generatrice (paraboloide delle normali).

Su di una generatrice si dice *punto centrale*, il piede della perpendicolare comune a quella generatrice, e all'altra infinitamente vicina ad essa; e il luogo di tutti i punti centrali forma la cosiddetta *linea di stringimento* (Chasles).

Il punto centrale di una generatrice è il vertice del paraboloide delle normali.

Si chiama *piano centrale* relativo ad una generatrice, quello che passa per la generatrice, e per la perpendicolare comune ad essa e alla generatrice infinitamente vicina, e si suol poi chiamare *obliquità,* di un piano tangente l'angolo fra esso, e il piano centrale relativo alla generatrice che passa pel punto di contatto.

La tangente dell'obliquità di un piano tangente è proporzionale alla distanza del punto di contatto dal punto centrale.

Il piano centrale è tangente nel punto centrale; il piano centrale e il piano tangente nel punto all'infinito della generatrice sono perpendicolari.

Si chiama *parametro di una generatrice* la distanza del suo punto centrale da quello in cui la obliquità del piano tangente è di $\frac{\pi}{4}$.

Se un piano passa per una generatrice di una superficie gobba, il prodotto delle distanze dal

punto centrale, dei due punti in cui esso è tangente e normale, è costante, *ed è eguale al quadrato del parametro* (Chasles).

Se due superficie gobbe si tagliano sotto angolo costante, in tutti i punti di una generatrice, questa retta ha un medesimo parametro e un medesimo punto centrale considerata come appartenente sia all'una che all'altra superficie, e reciprocamente.

Sulle rigate gobbe sono da notarsi certi punti e certe rette singolari; supponiamo che una certa generatrice incontri quella ad essa infinitamente vicina; allora il punto d'incontro delle due generatrici infinitamente vicine si chiama *punto cuspidale (sommet, Spitze)*, mentre la generatrice su cui tal punto è situato si chiama *singolare* (*arête, Kante, Torsallinie)*, e il piano (tangente) che passa per la generatrice singolare e per quella infinitamente vicina si chiama *piano tangente singolare.* È evidente che il punto cuspidale appartiene alla linea doppia o nodale.

Se n è l'ordine della superficie gobba ed a il suo rango *, *il numero delle generatrici singolari è:*

$$T = 2a - 2n$$

(Sturm, *Math. Ann.*, VI; Schubert, *Id.*, XVII).

Essendo una retta delle spazio determinata da 4 condizioni, si avrà in generale una superficie rigata se noi sottoponiamo la retta alle condizioni

---

* Si suol chiamare *rango* di una superficie l'ordine a del cono circoscritto ovvero la classe a' della sezione piana (v. Cap. IX, § 1, pag. 296).

di appoggiarsi a tre curve date, ovvero di appoggiarsi doppiamente ad una curva e semplicemente ad un'altra, o infine di appoggiarsi triplamente ad una curva.

Si presenta allora il problema di determinare le caratteristiche delle rigate le quali hanno per *direttrici* quelle curve nel modo sopraindicato. Di questo problema si occuparono CAYLEY (*Camb. J.*, VII, 1852; *Phil. Trans.*, CLIII, 1863), SALMON (*Camb. J.*, VIII, 1853; *Trans. Irish. Acad.*, XXIII) e indi RUPP (*Math. Ann.*, XVIII).

Prima di riferire i risultati ottenuti, dobbiamo ancora dire qualche cosa sulle altre varie singolarità che può possedere una rigata.

Per una rigata una generatrice può esser *doppia*, cioè tale che per ogni suo punto esistono due distinti piani tangenti alla superficie; se questi due piani coincidono per ogni punto della generatrice questa sarà una *generatrice stazionaria.*

Una generatrice la quale passa per i punti stazionari di una curva direttrice è una generatrice stazionaria, ed in generale una generatrice stazionaria non può risultare in altro modo.

La linea doppia della rigata può dividersi in varie parti di cui alcune sono linee che sono anche *linee direttrici* per la rigata, e altre no. Indicheremo allora con

D_N la somma degli ordini delle curve doppie (nodali) che sono contemporaneamente direttrici,

R_N la somma degli ordini delle curve doppie, escluse quelle che sono anche direttrici, ed escluse le generatrici doppie,

G_N il numero delle generatrici doppie (escluse le stazionarie),

T_N la somma dei tre numeri precedenti, cioè il numero dei punti doppi (escluse le cuspidi) di una sezione piana della rigata,

G_S il numero delle generatrici stazionarie,

T il numero delle generatrici singolari (v. sopra),

a il rango della rigata (v. sopra).

Si hanno allora i seguenti risultati:

(1.° Caso.) Tre curve direttrici semplici, φ, ψ, χ:

di ordini m_1, m_2, m_3
di classi r_1, r_2, r_3
di generi p_1, p_2, p_3
con h_1, h_2, h_3 *punti doppi apparenti*
con β_1, β_2, β_3 *punti cuspidali.*

Si ha:

$$n = 2\, m_1\, m_2\, m_3 \quad \text{(ordine della rigata)},$$

$$D_N = \frac{1}{2}\, m_1\, m_2\, m_3\, (m_1\, m_2 + m_2\, m_3 + m_3\, m_1)$$

$$G_N = \frac{1}{2}\, m_1\, m_2\, m_3\, (m_1 + m_2 + m_3 - 3) + \\ + m_1\, m_2\, h_3 + m_2\, m_3\, h_1 + m_3\, m_1\, h_2$$

$$R_N = \frac{1}{2}\, m_1\, m_2\, m_3 \Big[4\, m_1\, m_2\, m_3 - \\ - (m_1\, m_2 + m_2\, m_3 + m_3\, m_1) - \\ - 2\,(m_1 + m_2 + m_3) + 5 \Big]$$

$$2\, T_N = 2\, m_1\, m_2\, m_3\, (2\, m_1\, m_2\, m_3 - 2) - \\ - (m_1\, m_2\, r_3 + m_2\, m_3\, r_1 + m_3\, m_1\, r_2) \\ - 3\,(m_1 m_2 \beta_3 + m_2\, m_3\, \beta_1 + m_3\, m_1\, \beta_2)$$

$$G_S = \beta_1 m_2 m_3 + \beta_2 m_3 m_1 + \beta_3 m_1 m_2$$
$$a = 2 m_1 m_2 m_3 + m_1 m_2 r_3 + m_2 m_3 r_1 + m_3 m_1 r_2$$
$$T = 2 (m_1 m_2 r_3 + m_2 m_3 r_1 + m_3 m_1 r_2).$$

(2.° Caso.) La curva φ direttrice doppia, e ψ direttrice semplice:

$$n = m_2 \left[h_1 + \frac{1}{2} m_1 (m_1 - 1)\right]$$

$$D_N = \frac{1}{2} m_2 \left[h_1^2 - h_1 + m_1 m_2 (m_1 - 1)^2 - m_1 (m_1 - 1)\right]$$

$$G_N = h_1 h_2 + \frac{1}{4} m_1 m_2 (m_1 - 1)(m_2 - 1) + + 3 m_2 (m_1 - 2) . \left[h_1 - \frac{1}{6} m_1 (m_1 - 1)\right]$$

$$R_N = m_2 \left[\frac{1}{2} h_1 (m_1 - 2)(m_1 - 3) + + \frac{1}{8} m_1 (m_1 - 1)(m_1 - 2)(m_1 - 3)\right] + + m_2 (m_2 - 1) \left[\frac{1}{2} h_1^2 + \frac{1}{2} h_1 (m_1^2 - m_1 - 1) + + \frac{1}{8} m_1 (m_1 - 1)(m_1^2 - 5 m_1 + 2)\right]$$

$$2 T_N = m_2^2 \left[h_1 + \frac{1}{2} m_1 (m_1 - 1)\right]^2 - m_2 h_1 - - \frac{3}{2} m_1 m_2 (m_1 - 1) - r_1 m_2 (m_1 - 3) - - h_1 r_2 - 3 \beta_2 \beta_1 - 3 \beta_1 m_2 (m_1 - 3)$$

$$G_S = \beta_2 h_1 + \beta_1 m_2 (m_1 - 2)$$
$$a = r_1 m_2 (m_1 - 3) + m_1 m_2 (m_1 - 1) + h_1 r_2 - 3 \beta_1 m_2$$
$$T = r_1 m_2 (2 m_1 - 5) + 2 h_1 r_2 - 3 \beta_1 m_2.$$

(3.° Caso.) La curva φ direttrice tripla, (la rigata in tal caso è quella formata dalle trisecanti di una curva, vedi anche il Cap. IX, § 4, pag. 328).

$$n = (m - 2)\left[h - \frac{1}{6} m (m - 1)\right]$$

$$D_N = \frac{1}{2} m (h - m + 2)(h - m + 1)$$

$$G_N = \frac{1}{4}\left[- m^4 + 18 m^3 - 71 m^2 + 78 m - \right.$$
$$\left. - 48 m h + 132 h + 12 h^2\right]$$

$$R_N = \frac{1}{2} h^2 m (m - 1) -$$
$$- \frac{1}{6} h (m^4 - 5 m^3 + 5 m^2 - 49 m + 120) +$$
$$+ \frac{1}{72} (m^6 - 6 m^5 + 31 m^4 - 270 m^3 +$$
$$+ 868 m^2 - 840 m)$$

$$2 T_N = m^2 h^2 - 4 m h^2 + 6 h^2 -$$
$$- \frac{1}{3} (m^4 - 5 m^3 + 11 m^2 + 14 m - 78) h +$$
$$+ \frac{1}{36} (m^6 - 6 m^5 + 13 m^4 + 90 m^3 -$$
$$- 518 m^2 + 636 m)$$

$$G_S = \beta (h - 2 m + 6)$$

$$a = -2h^2 + h(m^2 + 5m - 24) - \frac{1}{6}(16m^3 - 84m^2 + 104m) - 3\beta(h - 2m + 6)$$

$$T = -4h^2 + 2h(m^2 + 4m - 22) - 5m^3 + 27m^2 - 34m - 6\beta(h - 2m + 6).$$

Si ottiene anche una rigata congiungendo i punti corrispondenti di due curve *(direttrici)* in corrispondenza (α_1, α_2); *se gli ordini delle due curve sono* $m_1\, m_2$, *l'ordine della rigata è* $m_1 \alpha_2 + m_2 \alpha_1$.

Dal punto di vista della *Geometria della retta* (vedi Cap. XIV) le rigate restano definite come le intersezioni di tre complessi di rette; possono però essere o l'intersezione completa, o una parte della intersezione.

Nelle formole seguenti noi supporremo il primo caso.

Se i tre complessi sono di ordini $m_1\, m_2\, m_3$, *l'ordine della rigata è* $n = 2\, m_1 m_2 m_3$, *e il suo rango è*

$$a = 2\, m_1 m_2 m_3 (m_1 + m_2 + m_3 - 2) - 2\, G_N$$

dove G_N, *indica, come sopra, il numero delle generatrici doppie della superficie (si suppone che questa non abbia generatrici stazionarie).*

L'ordine della curva doppia è dato dalla formola

$$D = m_1 m_2 m_3 \left[2\, m_1 m_2 m_3 - (m_1 + m_2 + m_3) + 1 \right]$$

e il genere della superficie da

$$p = m_1 m_2 m_3 (m_1 + m_2 + m_3 - 4) - 1 - G_N.$$

Queste formole possono però subire modificazioni secondo le varie particolarità dei complessi.

Se uno dei complessi dati è lineare ($m_3 = 1$), *allora le curve assintotiche algebriche (Haupttangentencurven) della superficie, cioè quelle le cui tangenti sono osculatrici (hanno un contatto tripunto,* v. pag. 290) *colla superficie sono di classe (rango)*

$$12\, m_1\, m_2\, (m_1 + m_2 - 2)$$

e di ordine

$$2\, m_1\, m_2\, (m_1 + m_2 - 1)$$

Questi numeri però restano modificati se i complessi dati hanno fra loro speciali relazioni; p. es. se anche $m_2 = 1$, questi numeri non più valgono se i due complessi lineari hanno in comune una *congruenza speciale* (v. Voss, *Math. Ann.*, VIII, 82-83).

Vi è sulla superficie una semplice infinità di punti nei quali una tangente alla superficie ha con questa *un contatto quadripunto.*

La curva di tali punti di contatto quadripunto è di ordine

$$2\, m_1\, m_2\, m_3 \left[6\, (m_1 + m_2 + m_3) - 19\right]$$

e contiene

$$8\, m_1\, m_2\, m_3 \left[3\, (m_1 + m_2 + m_3) - 10\right]$$

punti in cui essa è tangente a generatrici della superficie rigata data; tali generatrici sono tangenti stazionarie di una curva assintotica algebrica.

Per le tangenti aventi colla rigata un contatto di 4.° ordine vedi Voss (*cit.*, pag. 99).

Una rigata di ordine n senza generatrici multiple, e di genere zero è di rango $2(n-1)$, *e contiene una curva doppia di ordine* $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$.

Vi sono $2(n-2)(n-3)$ *generatrici tangenti alla curva doppia,* $\frac{1}{6}(n-2)(n-3)(n-4)$ *punti tripli e altrettanti piani tritangenti.*

Vi sono $2(n-2)$ *generatrici singolari nel senso sopra definito.*

La rigata generata dalle tangenti di contatto quadripunto è di ordine $8(n-3)$, *e altrettanto è il numero dei punti in cui la curva di tali punti di contatto è tangente ad una generatrice. Il genere della medesima rigata è* $4n-13$.

Vi sono sulla data rigata $10(n-4)$ *punti in cui una retta tangente ha un contatto di 4.° ordine colla superficie.*

Le linee assintotiche di una rigata d'ordine (n_1+n_2), *di genere zero avente per direttrici due rette* n_1^{ple} *e* n_2^{ple} *rispettivamente, sono curve algebriche e dell'ordine* $2(n_1+n_2-1)$. (Cremona, *Ann. di mat.*, I).

Se le due rette direttrici si avvicinano indefinitamente sino a coincidere, le assintotiche diventano di genere zero e di ordine $2n_1+n_2-2$ (*se* $n_1 \geqq n_2$) (Cremona, *ibid.*).

Le prime e fondamentali proprietà metriche delle rigate furono trovate e studiate specialmente

da Monge, *Add. à la Géom. déscript.*; Hachette, *Crelle*, VIII; Chasles, *Journ. de Liouville*, II, ecc.; v. anche il trattato di *Geometria descrittiva* di De La Gournerie.

Cayley, Salmon, Rupp nelle opere sopracitate si occuparono dei problemi riguardanti i numeri caratteristici delle rigate aventi determinate direttrici.

Le linee assintotiche delle rigate furono studiate da Clebsch (*Crelle*, LXVIII), Cremona *(cit.)*, Voss *(cit.)*, e da altri.

A superficie rigate particolari è consacrato il libro di De La Gournerie (*Rech. sur les surf. réglées tetraédrales symétriques.* Paris, 1867).

Lüroth (*Crelle*, LXVII) e Voss (*Math. Ann.*, VIII) studiarono le rigate che possono considerarsi come intersezioni *complete* di tre complessi di rette.

Le rigate razionali (di genere zero) furono studiate da Cremona *(cit.)*, Armenante (*Annali di mat.*; IV), Clebsch (*Math. Ann.*, V), Noether (*Math. Ann.*, III, pag. 194) il quale ultimo studiò la rigata razionale di ordine n avente una retta multipla di ordine $n-1$.

Ricerche più recenti sulle rigate dal punto di vista della Geometria su di una superficie e della considerazione degli spazi a più dimensioni sono quelle di Segre (*Acc. Torino*, 1884, 1886; *Rend. Lincei*, 1887; *Math. Ann.*, XXXIV).

§ 7. — Superficie razionali.
Superficie a sezioni razionali, o ellittiche, o iperellittiche.

Si dicono *razionali* (o *unicursali*, *omaloidi*) le superficie le quali possono porsi in corrispondenza biunivoca con un piano. Alle considerazioni del § 7, Cap. IX, relative alla rappresentazione piana di tali superficie, aggiungeremo le seguenti altre.

Le condizioni perchè una superficie d'ordine n, con una curva doppia di ordine d, e di genere π, e che possiede t punti tripli che sieno tali contemporaneamente per la superficie e per la curva, sia razionale, sono le seguenti:

1. *che sia zero il genere numerico* (v. Cap. IX, § 4, pag. 316-317)

$$p = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6} - (n-4)\,d + 2t + \pi - 1 = 0\,;$$

2. *che non esistano superficie d'ordine* $2\,(n-4)$ *le quali passino doppiamente per la curva doppia (oltre le superficie che contengono la data).*

Ogni superficie tale che le coordinate di un suo punto qualunque si esprimono in funzione razionale di due parametri, è razionale. Questo teorema analogo ad un altro di Lüroth per le curve, è stato dimostrato da Castelnuovo (*Math. Ann.*, XLIV, XLVIII, pag. 313).

Ogni superficie di 3.° ordine è razionale, eccetto il cono generale di 3.° ordine.

Ogni superficie di 4.° ordine avente delle linee multiple è razionale, meno le superficie rigate di genere maggiore di zero. Fra le superficie di 4.° ordine non aventi linee multiple, ve ne sono solo 4 specie razionali; una di esse fu studiata da CREMONA (*Collect. math.*, Milano, 1881) e le altre, insieme a questa, da NOETHER (*Math. Ann.*, XXXIII).

Ogni superficie che contiene un sistema semplicemente infinito di curve razionali è razionale (teor. di NOETHER, *Math. Ann.*, III). *Se questo sistema è formato di curve piane, allora la superficie è o rigata o è la superficie di 4.° ordine di Steiner (teor. di* PICARD, *Crelle C;* v. anche sopra, Cap. XII, § 9).

Ogni superficie contenente un sistema lineare doppiamente infinito di curve ellittiche o iperellittiche di genere 2, è razionale, ovvero è una superficie rigata di genere 1 o 2. (CASTELNUOVO, *Rend. Lincei*, 1894). *Se le sezioni sono piane, l'ordine della superficie (se si verifica il primo caso) non può essere maggiore di 9.*

Affini a queste ricerche sono quelle altre riguardanti le superficie le quali possono birazionalmente trasformarsi in sè stesse.

Estendendo alle superficie un risultato di SCHWARZ relativo alle curve, i signori CASTELNUOVO ed ENRIQUES hanno dimostrato (*Compt. Rend.*, 1895; v. anche PAINLEVÉ, *Id.*, *Id.*) che:

Ogni superficie che ammette un gruppo continuo transitivo (cioè che da un punto possa passarsi a qualunque altro della superficie) di trasformazioni birazionali in sè stessa, è una superficie razionale

se il gruppo dipende da due parametri, e le trasformazioni non sono permutabili fra loro; se poi il gruppo dipende da più di due parametri, allora la superficie o è razionale, o è trasformabile in una rigata ellittica (di genere 1).

Per un riassunto di tutti questi risultati si vegga l'ultimo capitolo di un lavoro di CASTELNUOVO ed ENRIQUES (*Math. Ann.*, XLVIII).

CAPITOLO XIV.

La geometria della retta nello spazio, e la geometria della sfera.

§ 1. — Generalità. Coordinate di rette nello spazio.

Una retta nello spazio è determinata da 4 condizioni elementari, cosicchè lo spazio rigato (in cui l'elemento è la retta) è da considerarsi come uno spazio a 4 dimensioni *(non lineare ma quadratico)*.

Se $x_1\, x_2\, x_3\, x_4$ sono le coordinate omogenee di un punto dello spazio, e $y_1\, y_2\, y_3\, y_4$ quelle di un altro, formiamo i determinanti di 2.° ordine della matrice

$$\left| \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{matrix} \right|$$

e poniamo

$$p_{ij} = x_i\, y_j - x_j\, y_i\,.$$

I rapporti di due qualunque delle 6 quantità p_{ij}, non si alterano se ad uno o ad ambedue i

punti (x) (y) *sostituiamo un altro qualunque punto della retta che li unisce; le quantità* p_{ij} *si possono scegliere come* COORDINATE OMOGENEE *di una retta dello spazio.*

Fra esse sussiste l'unica relazione identica

$$p_{12}\,p_{34} + p_{13}\,p_{42} + p_{14}\,p_{23} = 0.$$

Per la definizione di queste coordinate la retta è considerata come luogo di punti; esse si sogliono chiamare *radiali* (*Strahlencoordinaten,* Plücker). Considerando invece la retta come inviluppo di piani, si hanno analoghe coordinate che si chiamano *assiali (Axencoordinaten).*

Se (u) (v) sono le coordinate omogenee di due piani passanti per la retta, si considerino i binomi:

$$\pi_{ij} = u_i\,v_j - u_j\,v_i\,.$$

I rapporti di due delle sei π_{ij} *sono indipendenti dalla scelta dei particolari piani* (u) (v) *passanti per la retta; tali* π_{ij} *possono scegliersi come coordinate omogenee assiali di una retta nello spazio; fra esse sussiste la relazione identica*

$$\pi_{12}\,\pi_{34} + \pi_{13}\,\pi_{42} + \pi_{14}\,\pi_{23} = 0.$$

La condizione perchè due rette di coordinate (p) *e* (p') *si incontrino (stieno nello stesso piano) è data da*

$$p_{12}\,p'_{34} + p_{13}\,p'_{42} + p_{14}\,p'_{23} +$$
$$+ p'_{12}\,p_{34} + p'_{13}\,p_{42} + p'_{14}\,p_{23} = 0.$$

Le 6 rette dello spazio per le quali cinque delle 6 coordinate sono zero, sono gli spigoli del tetraedro fondamentale.

Se prendiamo le mosse da coordinate cartesiane *ortogonali* dei punti dello spazio, le coordinate p diventano

$$p_{14}=x-x',\quad p_{24}=y-y',\quad p_{34}=z-z'$$
$$p_{23}=yz'-zy',\ p_{31}=zx'-xz',\ p_{12}=xy'-yx'$$

che noi indichiamo rispettivamente con

$$l,\quad m,\quad n$$
$$L,\quad M,\quad N.$$

Ecco allora alcune formole fondamentali che si riferiscono a proprietà metriche:

L'angolo di due rette (l, m, n, L, M, N), (l', m', n', L', M', N') *è dato dalla formola*

$$\cos(r\,r')=\frac{l\,l'+m\,m'+n\,n'}{\sqrt{(l^2+m^2+n^2)(l'^2+m'^2+n'^2)}}$$

$$\operatorname{sen}^2(r\,r')=\frac{\left\|\begin{matrix} l' & m' & n' \\ l & m & n \end{matrix}\right\|^2}{(l^2+m^2+n^2)(l'^2+m'^2+n'^2)}$$

La distanza fra le due rette è data da

$$\text{dist.}(r\,r')=\frac{l\,L'+m\,M'+n\,N'+L\,l'+M\,m'+N\,n'}{\sqrt{\left\|\begin{matrix} l & m & n \\ l' & m' & n' \end{matrix}\right\|^2}}.$$

Si chiama *momento di due rette* il prodotto del seno del loro angolo per la loro minima distanza (Cayley); dalle formole precedenti risulta allora subito che *il momento delle due rette è dato da* (in coordinate ortogonali)

$$\text{mom.}(r\,r')=\frac{l\,L'+m\,M'+n\,N'+L\,l'+M\,m'+N\,n'}{\sqrt{(l^2+m^2+n^2)(l'^2+m'^2+n'^2)}}.$$

Le sei coordinate omogenee generali di una retta sono proporzionali ai 6 momenti della retta rispetto a ciascuno dei 6 spigoli del tetraedro fondamentale delle coordinate, cioè rispetto alle sei rette dello spazio per le quali cinque delle sei coordinate della retta sono zero.

Le formole precedenti insieme ad altre furono stabilite da CAYLEY (*Camb. Trans.*, XI parte 2.ª); per le formole analoghe, ma in coordinate p_{ij} v. D'OVIDIO (*Giorn. di Batt.*, VIII, XI).

Altro sistema di coordinate di rette è quello considerato da ZEUTHEN (*Math. Ann.*, I); si assumano come coordinate omogenee di retta, i volumi dei 6 tetraedri, ciascuno dei quali abbia per spigoli opposti un segmento (unità) preso sulla retta e uno dei 6 spigoli del tetraedro fondamentale.

Queste coordinate soddisfanno ad una relazione omogenea di 2.° grado a tre termini, simile a quella cui soddisfanno le p_{ij} (v. anche DRACH, *Math. Ann.*, II; D'OVIDIO, *Giorn. di Batt.* X).

Dalle 6 coordinate p_{ij} *noi possiamo passare con una trasformazione lineare, ad un sistema di coordinate* x_i $(i = 1, \ldots 6)$, *facendo in modo che la relazione quadratica cui soddisfanno le* p *si trasformi nella relazione quadratica speciale:*

$$\Sigma x^2_i = 0.$$

Queste 6 coordinate x_i si chiamano allora coordinate di KLEIN (*Math. Ann.*, II, v. anche *Inaug. Diss.* Bonn, 1868, pubbl. in *Math. Ann.*, XXIII).

Una elegante interpretazione geometrica di tale trasformazione è la seguente; si interpretino le

sei p_{ij} come coordinate omogenee di un punto in uno spazio a 5 dimensioni; allora la relazione di 2.° grado cui soddisfanno le p, rappresenta in tale spazio una *quadrica non degenere* (perchè il discriminaute ne è diverso da zero); ogni punto di tale quadrica corrisponde così ad una retta dello spazio, e viceversa; la geometria su tale quadrica corrisponde alla geometria della retta.

Facciamo una trasformazione lineare di coordinate nello spazio a 5 dimensioni, in modo che la equazione di questa quadrica venga ad acquistare la forma

$$\Sigma x^2_i = 0$$

cioè la forma contenente solo i termini coi quadrati delle coordinate (il che può farsi in infiniti modi); le nuove coordinate sono le sopraddette coordinate di Klein. Ora si sa che quando la equazione della quadrica è messa sotto la soprascritta forma, allora gli spazi lineari $x_i = 0$ sono a due a due coniugati rispetto alla quadrica, cioè il polo, rispetto alla quadrica, di uno di essi, sta nell'altro (questa proprietà non è che l'estensione di quella indicata per le coniche a pag. 132, e per le quadriche a pag. 167); quindi abbiamo il risultato che *gli spazi fondamentali nel nuovo sistema di coordinate sono a due a due coniugati rispetto alla quadrica fondamentale.*

Una relazione fra le coordinate di rette, rappresenta una tripla infinità di rette nello spazio; cioè ciò che si suol chiamare un *complesso di rette;* due relazioni fra le coordinate di rette, rappresentano

una doppia infinita di rette, cioè *una congruenza di rette;* e finalmente tre relazioni fra le coordinate di rette, rappresentano *una superficie rigata.*

Quattro relazioni della specie anzidetta rappresentano poi in generale un *numero finito di rette dello spazio.*

Se definiamo *un complesso* come una varietà ∞^3 di rette, e un *complesso algebrico*, come una varietà ∞^3 di rette le cui coordinate sono funzioni algebriche di tre parametri indipendenti, si ha il teorema:

Ogni complesso algebrico può sempre essere rappresentato totalmente da UNA SOLA *relazione algebrica fra le sei coordinate di rette;* in altri termini, nella rappresentazione per mezzo dei punti di una quadrica dello spazio a 5 dimensioni, il teorema si riduce a questo:

Ogni spazio algebrico a tre dimensioni contenuto sulla quadrica fondamentale è sempre intersezione COMPLETA *di questa con un altro spazio algebrico a 4 dimensioni.*

Se la relazione algebrica che rappresenta un complesso algebrico è di grado n, *il complesso si dice di grado n.*

Il grado del complesso è eguale all' ordine del cono formato da tutte le rette appartenenti al complesso e che passano per un punto qualunque dello spazio (cono del complesso).

In un piano esistono ∞^1 rette del complesso, le quali inviluppano una curva *(curva di complesso; Complexcurve); la classe di questa curva è anche il grado del complesso.*

Per un complesso si confondono i concetti di

ordine e di *classe;* si ha un unico numero caratteristico, il *grado*, che è il numero delle rette del complesso passanti per un punto e situate in un piano.

Una congruenza si dice *algebrica* se è data dall'intersezione parziale o totale, di due complessi algebrici.

Per *ordine di una congruenza algebrica* si intende il numero delle sue rette che passano per un punto dello spazio, e per *classe di una congruenza algebrica* si intende il numero delle sue rette che stanno in un piano.

Due complessi di gradi n e n' hanno di comune una congruenza di ordine nn' e anche di classe nn'.

Tre complessi di gradi $n\,n'\,n''$ hanno in comune una rigata di ordine $2\,n\,n'\,n''$.

Quattro complessi di gradi n, n', n'', n''' hanno in generale in comune $2\,n\,n'\,n''\,n'''$ rette.

Due congruenze di ordini n, n' e classi m, m' hanno in comune in generale $n\,n' + m\,m'$ rette (teor. di HALPHEN, *Compt. Rend.*, 1872).

Tutte le rette che tagliano una curva algebrica di ordine n formano un complesso (algebrico) di grado n.

Tutte le rette che tagliano una retta data formano un complesso lineare, ma SPECIALE *(che ammette una direttrice).*

Tutte le rette che si appoggiano a due curve di ordini n_1, n_2 formano una congruenza di ordine e classe eguale a $n_1\,n_2$.

Tutte le rette che tagliano due rette date formano una congruenza di ordine e classe 1 (congruenza lineare).

Tutte le rette che tagliano tre curve algebriche degli ordini n_1, n_2, n_3 *formano una rigata di ordine* $2\,n_1\,n_2\,n_3$ (Cayley, v. anche Cap. XIII, § 6).

Vi sono 2 rette che tagliano contemporaneamente quattro rette date (teor. di Steiner, *System. Entwickel., ecc., Opere* I, pag. 284).

Vi sono $2\,n_1\,n_2\,n_3\,n_4$ *rette le quali si appoggiano a quattro curve algebriche di ordini* n_1, n_2, n_3, n_4.

Tutte le rette tangenti ad una superficie algebrica di ordine n e di rango a (v. Cap. IX, § 1 e Cap. XIII, § 6) *formano un complesso di grado a (complesso speciale).*

Senza tener conto di alcune ricerche antecedenti, fra cui alcune di Cayley, si può dire che la *Geometria della retta* come dottrina a sè, nacque colla *Neue Geometrie des Raumes* (Leipzig, 1868-69) di Plücker, il quale già sin dal 1865 avea pubblicato alcune Memorie sul medesimo soggetto (*Proc. Lond. math. Soc.*, 1865; *Phil. Trans.*, 1865).

Negli anni 1866-68 il Battaglini (*Rend. Acc. Napoli*, 1866; *Atti Acc.* Napoli, III, 1866; IV, 1868; *Giorn. di Batt.*, VI, VII, X) pubblicò sui complessi delle ricerche proprie, stabilì molte proprietà generali, una teoria di un particolare complesso quadratico che ha preso nome da lui, l'inizio di una notazione simbolica che il Clebsch ridusse poi più perfetta (v. § 2), e molteplici applicazioni della Geometria della retta alla meccanica (*Acc. Napoli*, 1869-70).

Fra i lavori più notevoli che si succedettero citeremo quelli di Clebsch (*Math. Ann.*, II, V), di

Klein (*Id.*, II, V, VII, XXII, ecc., *Diss.*, 1868, ristamp. in *Math. Ann.*, XXIII), Lie (*Math. Ann.*, V), di Reye (v. § 4), di Voss (*Math. Ann.*, IX), di Segre (*Acc. Torino*, 1883-84), ecc.

Un trattato sistematico e recente sulla teoria che ci occupa è quello di Sturm (*Die Gebilde I. u. II. Grades der Liniengeometrie*, ecc. Leipzig, 1892-93-96) in tre volumi.

Per maggiori indicazioni bibliografiche, oltre quelle che daremo più sotto volta per volta, rimandiamo all'opera più volte citata di Loria.

Lo Sturm nell'opera sopracit. ha adoperato altre denominazioni per i complessi e le congruenze; propriamente egli chiama il *complesso lineare*, *Strahlengewinde* o semplicemente *Gewinde*; il complesso lineare speciale, *Strahlengebüsch* o semplicemente *Gebüsch*; la *congruenza lineare*, *Strahlennetz*.

Le stesse denominazioni sono state poi adoperate da altri autori tedeschi.

§ 2. — Complesso algebrico generale di grado n. La notazione simbolica di Battaglini e di Clebsch. Forme invariantive del complesso.

Un complesso algebrico di grado n è individuato da

$$\binom{n+5}{5} - \binom{n+3}{5} - 1$$

rette; quindi:

un complesso lineare è individuato da 5 rette; un complesso quadratico è individuato da 19 rette.

Tutte le rette del complesso le quali si appoggiano ad una determinata retta dello spazio, formano naturalmente una congruenza, intersezione del complesso, coll'altro complesso lineare speciale formato dalle rette che si appoggiano alla data; *tutte le rette di questa congruenza sono tangenti ad una medesima superficie* che si chiama *superficie di complesso* (*Complexfläche ;* Plücker).

Secondochè la retta data è al finito o all'infinito, la superficie di complesso fu chiamata *superficie meridiana o eqùatoriale* (Plücker).

Conducendo per la retta data un piano, tutte le rette del complesso situate in esso inviluppano una curva; *la superficie di complesso è il luogo di tali curve-inviluppi.*

Considerando il cono col vertice in un punto della retta e avente per generatrici, rette del complesso, tal cono è circoscritto alla superficie di complesso, *la quale perciò può considerarsi come l'inviluppo dei coni del complesso aventi il loro vertice nei punti della retta.*

Le superficie di un complesso di grado n sono di ordine e di classe eguali a $2n(n-1)$, *ed hanno la retta cui si appoggiano le loro tangenti che fanno parte del complesso, come retta multipla di ordine* $n(n-1)$; *questa retta è multipla per la superficie, considerata sia come luogo che come inviluppo.*

Per un complesso di 2.° grado, le superficie di complesso sono dunque di 4.° ordine e 4.ª classe, con una retta doppia.

Le rette dello spazio cui appartengono superficie di complesso passanti per un medesimo punto, o tangenti ad uno stesso piano, formano un complesso di grado $n(n-1)$.

Vi sono certi punti dello spazio tali che le rette del complesso per essi passanti formano un cono con una generatrice doppia; e vi sono certi piani dello spazio tali che l'inviluppo delle rette del complesso in essi esistenti, hanno una tangente doppia. Quei *punti* e questi *piani* si chiamano *singolari*, *e il luogo dei primi è una superficie che è anche l' inviluppo dei secondi* (Pasch, Diss. Giessen, 1870; *Crelle*, LXXVI) e che si chiama *superficie di singolarità del complesso.*

Se una retta è doppia per il cono uscente da uno dei suoi punti, è anche doppia per l'inviluppo situato in uno dei suoi piani. Quella retta si chiama *retta singolare del complesso.*

Può avvenire che tutti i punti di una retta sieno punti singolari e tutti i piani per la retta sieno piani singolari; allora la retta è una retta doppia del complesso; *ma ciò non può avvenire pel complesso generale.*

La superficie di singolarità di un complesso di grado n è di ordine e classe $2n(n-1)^2$ (Clebsch, *Math. Ann.*, V).

Le rette singolari di un complesso sono date dall'intersezione completa del complesso con un altro di grado $2(n-1)$; *esse formano perciò una congruenza di grado e classe eguale a* $2n(n-1)$.

Notiamo i seguenti teoremi di Clebsch (*Math. Ann.*, V):

I vertici dei coni appartenenti ad un complesso di n.^{mo} grado, e i quali sono tagliati da una retta fissa in n punti pei quali si annulla un certo invariante (binario) di grado k, formano una superficie di ordine k n, che contiene quella retta fissa per retta multipla secondo $\frac{k\,n}{2}$.

Le rette le quali tagliano un cono appartenente ad un complesso di grado n, in punti aventi una determinata proprietà invariantiva (pei quali si annulla un certo invariante binario di grado k) formano un complesso di grado $\frac{k\,n}{2}$.

Di questi due teoremi possono naturalmente enunciarsi anche i teoremi *duali*, considerando, in luogo dei vertici dei coni, i piani delle curve-inviluppi del complesso, in luogo di una punteggiata, un fascio di piani, ecc.

Per $n = 4$ si hanno i teoremi:

I vertici dei coni appartenenti ad un complesso di 4.° grado, e che sono tagliati da una retta fissa in 4 punti equianarmonici o armonici, formano una superficie di 8.° ordine, o di 12.° ordine, la quale ha quella retta per retta 4^{pla} o 6^{pla}.

Le rette che tagliano un determinato cono di un complesso di 4.° grado, in 4 punti equianarmonici o armonici, formano un complesso di 4.° o 6.° grado.

Dato un complesso $C = 0$ di grado n, si possono definire *i complessi polari* di una retta dello spazio, in modo precisamente analogo a quello che

si adopera per la teoria ordinaria della polarità; se p'_{ij} sono le coordinate della retta data, la equazione

$$\Sigma \frac{\partial C}{\partial p_{ij}} p'_{ij} = 0$$

rappresenterà un complesso di grado $n - 1$, che si chiamerà *primo complesso polare del dato*. Così si avranno gli altri complessi polari.

Il Battaglini prima e poi il Clebsch introdussero nella rappresentazione analitica dei complessi un calcolo simbolico analogo a quello che si adopera nella teoria invariantiva delle curve e superficie.

Ecco il calcolo simbolico quale fu perfezionato da Clebsch (*Math. Ann.*, II).

Adoperando coordinate p_{ij}, un complesso algebrico è dato dalla equazione

$$\sum_1^4 a_{ij,kh,lm} \ldots p_{ij}\, p_{kh}\, p_{lm} \ldots = 0.$$

Ora poniamo simbolicamente

$$a_{ij,kh,lm} \ldots \equiv a_{ij}\, a_{kh}\, a_{lm} \ldots$$

Allora il primo membro della precedente equazione si esprimerà come la potenza simbolica di un'espressione lineare, cioè come

$$\left[\sum_1^4 a_{ij}\, p_{ij}\right]^n$$

dove i simboli a_{ij} hanno la proprietà di mutar segno scambiando gli indici i con j.

Ora si dimostra che *si può sempre e in un*

modo solo esprimere il primo membro dell'equazione del complesso come la n.^{ma} potenza simbolica del primo membro dell'equazione di un complesso lineare (simbolico) SPECIALE, *il quale cioè abbia una retta fissa per* DIRETTRICE.

Se chiamiamo $P=0$ l'equazione quadratica cui soddisfanno le p_{ij}, è evidente che l'equazione $F=0$ di ogni complesso di grado $n>1$, può sempre mettersi sotto la forma

$$F+MP=0$$

dove $F=0$ è l'equazione data e M è una forma di grado $n-2$, con coefficienti *arbitrari.*

Se ora nella espressione simbolica superiore poniamo

$$a_{ij}=a_i\,b_j-a_j\,b_i\,, \qquad (i,j=1,\,2,\,3,\,4)$$

il complesso lineare

$$\Sigma\; a_{ij}\,p_{ij}=0$$

diventa quello delle rette appoggiate alla retta che congiunge i due punti $(a_1\,a_2\,a_3\,a_4)$ $(b_1\,b_2\,b_3\,b_4)$; ma questa apposizione simbolica la si può fare a patto che fra i coefficienti effettivi del complesso dato F sussistano poi quelle relazioni lineari che risulteranno identiche quando quei coefficienti effettivi si esprimano mediante prodotti di fattori del tipo

$$a_i\,b_j-a_j\,b_i\,.$$

Ora l'unica relazione esistente fra tali fattori è:

$$(a_1b_2-a_2b_1)(a_3b_4-a_4b_3)+(a_1b_3-a_3b_1)(a_4b_2-a_2b_4)+$$
$$+(a_1b_4-a_4b_1)(a_2b_3-a_3b_2)=0,$$

quindi le *uniche* relazioni *di grado n* nei deter-

minanti del tipo $(a_i b_j - a_j b_i)$ saranno quelle che si ottengono moltiplicando la precedente per una qualunque combinazione monomia di grado $n-2$ dei medesimi determinanti; così facendo, ognuno dei tre termini della precedente relazione diventa un coefficiente *effettivo* del complesso; fra questi deve dunque sussistere la relazione lineare

$$a_{12,34,lm,\ldots} + a_{13,42,lm,\ldots} + a_{14,23,lm,\ldots} = 0$$

Ora, in generale, fra i coefficienti di F non esisteranno relazioni di questa specie; però *può sempre scegliersi, e in un modo solo, M tale che i coefficienti di*

$$F + M P$$

soddisfino a siffatte relazioni. Ciò fu dimostrato da Clebsch (*Math. Ann.*, II).

La forma che in tal modo acquista l'equazione del complesso si chiama la *forma normale,* e il Clebsch fece vedere *che essa è*

$$F - \frac{P}{1 \cdot n+1} \Delta F + \frac{P}{1.2.(n+1).n} \Delta^2 F -$$

$$- \frac{P^3}{1.2.3.(n+1)\, n\, (n-1)} \Delta^3 F + - \ldots = 0$$

dove

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial p_{12}\, \partial p_{34}} + \frac{\partial^2 F}{\partial p_{13}\, \partial p_{42}} + \frac{\partial^2 F}{\partial p_{14}\, \partial p_{23}}$$

e

$$\Delta^2 F = \Delta(\Delta F), \quad \Delta^3 F = \Delta[\Delta(\Delta F)], \text{ ecc.}$$

Lo spazio di rette è trasformato in sè stesso da ogni trasformazione *proiettiva* o *duale* dello spazio di punti e di piani; il gruppo di tutte le trasformazioni lineari fra le p_{ij} per le quali lo spazio di rette si trasforma in sè stesso è quello di tutte e sole le trasformazioni lineari per le quali resta inalterata la relazione

$$P \equiv p_{12}\, p_{34} + p_{13}\, p_{42} + p_{14}\, p_{23} = 0.$$

I coefficienti di un complesso si chiamino $a_{ij,hk},\ldots$ e quelli del complesso trasformato per una di queste trasformazioni lineari $a'_{ij,\,hk},\ldots$; questi si esprimeranno linearmente mediante gli antichi. Il concetto di *invarianti* del complesso risulta immediatamente; si dirà *invariante di grado k (o covariante) del complesso* una funzione razionale intera omogeuea di grado k nelle a (ovvero di grado k nelle a e di un altro qualunque grado nelle p) la quale resti inalterata, a meno di un fattore (potenza del determinante della sostituzione), quando alle a si sostituiscono le a' (ovvero alle a le a', e alle p le coordinate trasformate p').

§ 3. — I complessi lineari.

L'equazione generale di un complesso lineare è

$$\sum_{1}^{4} a_{ij}\, p_{ij} = 0.$$

Supponiamo che i coefficienti a soddisfino alla relazione

$$A \equiv a_{12}\, a_{34} + a_{13}\, a_{42} + a_{14}\, a_{23} = 0.$$

Allora il complesso sarà formato da tutte le rette che si appoggiano ad una data, le cui coordinate sono le a_{ij}; si ha un complesso lineare SPECIALE.

Il complesso lineare ha un solo invariante cioè A.

Dato un punto dello spazio, le rette del complesso lineare passanti per esso stanno in un piano, e sono tutte le rette di quel piano passanti pel punto; viceversa dato un piano, tutte le rette del complesso situate in esso inviluppano un punto.

Per mezzo del complesso si stabilisce dunque una speciale polarità spaziale, e propriamente una di quelle chiamate *polarità nulle, o sistemi nulli* (v. Cap. I, § 4, pag. 62; Cap. X, § 2, pag. 357). Il punto e il piano coniugati nella polarità si possono chiamare anche *coniugati rispetto al complesso.*

Due rette dello spazio che si corrispondono nella polarità nulla si diranno *coniugate rispetto al complesso; le rette del complesso lineare sono le coniugate di sè stesse.*

Due rette coniugate non possono incontrarsi, se non coincidono.

Ogni retta che si appoggia a due rette coniugate appartiene al complesso, e viceversa *ogni retta del complesso che incontra una retta non appartenente ad esso incontra anche la sua coniugata.*

Si chiamano *diametri* del complesso le rette coniugate delle rette all' infinito dello spazio; e *piani diametrali* del complesso, i piani coniugati dei punti all' infinito.

I diametri sono tutti paralleli fra loro e ai piani diametrali.

Le infinite rette del complesso contenute in un piano diametrale sono tutte parallele.

Si dice *asse* del complesso quel diametro unico) perpendicolare ai piani che passano per la retta all'infinito ad esso coniugata.

Per ogni retta del complesso è costante il prodotto della sua minima distanza dall'asse, per la tangente trigonometrica dell'angolo della retta coll'asse; questo prodotto costante si chiama PARAMETRO *del complesso.*

Un complesso lineare è trasformato in sè stesso da ogni movimento elicoidale intorno al proprio asse.

Un complesso lineare si può generare in vari modi, e cioè:

1. *mediante le rette unite della polarità nulla;*

2. *costruendo tutte le rette che si appoggiano alle varie coppie di generatrici coniugate in una qualunque involuzione stabilita fra le generatrici di una quadrica (generazione di* Chasles, *Journ. de Liouville*, 1.ª s., IV);

3. *costruendo tutte le rette che sono segate da due fasci di piani fra loro proiettivi, secondo punteggiate in involuzione;*

4. *costruendo le rette da cui due punteggiate proiettive a sostegni che non si incontrano, sono proiettate secondo un'involuzione di piani;*

5. *costruendo tutte le rette le quali si appoggiano alle coppie di raggi corrispondenti di due fasci di raggi proiettivi, in piani diversi e con centro diverso, aventi però un raggio di comune e che corrisponda a sè stesso (generazione di* Sylvester, *Compt. Rend.*, LII, (1861)).

Per la costruzione di un complesso lineare, date cinque delle sue rette, vedi STURM, cit. I, pag. 107 e seguenti.

§ 4. — FASCI E RETI DI COMPLESSI LINEARI.

Date le equazioni di due complessi lineari, se formiamo una combinazione lineare dei primi membri di tali equazioni, e la eguagliamo a zero, abbiamo l'equazione di *un fascio di complessi lineari.*

Un fascio di complessi lineari contiene in generale DUE *complessi che sono* SPECIALI (v. § 3).

Quindi:

L'intersezione dei due complessi lineari è in generale una congruenza di 1.º ordine e classe (congruenza lineare; congruenza base del fascio) formata da tutte le rette che si appoggiano a due date.

Se i due complessi speciali del fascio sono coincidenti, allora la congruenza intersezione è una congruenza SPECIALE, *avente una sola direttrice.*

Se poi tutti i complessi del fascio sono tutti SPECIALI, *allora la congruenza intersezione è formata dalle rette che stanno in un piano, e da quelle dello spazio che passano per un punto dello stesso piano.*

Gli assi di tutti i complessi lineari di un fascio formano una rigata cubica a direttrici distinte, di cui una direttrice è all'infinito.

L'equazione di tale rigata può ridursi alla forma

$$z(x^2+y^2)-cxy=0. \quad \text{(Plücker)}$$

Il Cayley chiamò *cilindroide* tale rigata.

Date le equazioni di tre complessi lineari

$$C=0, \quad C'=0, \quad C''=0$$

l'equazione

$$C+\lambda C'+\mu C''=0$$

rappresenterà *una rete di complessi lineari.*

L'intersezione dei tre complessi lineari è in generale una rigata di 2.° ordine; le ∞^1 direttrici di tutti i complessi lineari speciali contenuti nella rete, formano il secondo sistema di generatrici della medesima rigata quadrica.

Gli assi di tutti gli ∞^2 complessi della rete, formano una congruenza di 2.° ordine e 3.ª classe, la quale è costituita dalle perpendicolari comuni alle ∞^2 coppie di generatrici della rigata quadrica base.

Il complesso lineare fu cominciato a studiare da Giorgini (*Mem. Società dei quaranta*, XX, 1828), Möbius (*Crelle*, X) e Chasles (*Corr. math.*, VI, 1830; *Journ. de Liouville*, IV, 1839); indi se ne occuparono (oltre Plücker) Reye (*Crelle*, LXIX, LXXXVI, XCV, ecc.), Pasch (*Id.*, LXXV), D'Ovidio (*Acc. Torino*, 1881; *Ann. di mat.*, VII; *Lincei*, III, serie 2.ª), De Paolis (*Mem. Accad. Lincei*, 1885), ecc.

È interessante notare che la teoria delle figure reciproche nella statica grafica ha il più intimo rapporto con quella dei complessi lineari.

Sono stati studiati i sistemi di complessi lineari riferiti proiettivamente fra loro, e gli enti geometrici generati dalle rette comuni ai complessi corrispondenti, (v. su ciò SEGRE, *Acc. Torino*, 1883-84, MONTESANO, *Acc. Napoli*, 1886).

Per lo studio dello spazio rigato e specialmente dei complessi lineari mediante la Geometria delle coniche del piano vedi CREMONA (*Giorn. di Batt.*, VIII), ASCHIERI (*Rend. Istit. Lomb.*, 1879; *Mem. Id.*, 1883), SEGRE (*Acc. Torino*, 1885).

La rappresentazione del complesso lineare sullo spazio punteggiato (di cui la prima idea è dovuta a KLEIN) fu studiata specialmente da CAPORALI (*Mem. Lincei*, 1877-78), DEL PEZZO (*Rend. Palermo*, I).

§ 5. — COMPLESSI LINEARI INVOLUTORI DI KLEIN.

Se due complessi lineari

$$\Sigma\, a_{ij}\, p_{ij} = 0, \qquad \Sigma\, b_{ij}\, p_{ij} = 0$$

sono tali che l'*invariante*

$$a_{12}\, b_{34} + a_{13}\, b_{42} + a_{14}\, b_{23} + a_{34}\, b_{12} + a_{42}\, b_{13} + a_{23}\, b_{14}$$

sia zero, i due complessi si dicono *involutori* (KLEIN, *Math. Ann.*, II).

Ogni complesso lineare speciale è involutorio a sè stesso.

Si possono dare sino a sei complessi lineari, a due a due involutori; si danno ∞^{15} *di tali sestu-*

ple di complessi lineari; ognuna di tali sestuple si compone sempre di complessi tutti non speciali.

Lo studio di tali sestuple si collega con quello delle nuove coordinate di rette introdotte da KLEIN (v. § 1). *Indicando con* $x_i = 0$ *le equazioni dei sei complessi di una sestupla, (complessi fondamentali) la equazione della quadrica fondamentale dello spazio a cinque dimensioni* (v. § 1) *diventa* $\Sigma\, x^2_i = 0$. *Ogni altro complesso lineare è dato da* $\Sigma\, a_i x_i = 0$, *e due complessi* $\Sigma\, a_i x_i = 0$, $\Sigma\, b_i x_i = 0$ *sono involutori quando sia*

$$\Sigma\, a_i b_i = 0.$$

I sei complessi fondamentali si incontrano a due a due in 15 congruenze lineari a direttrici distinte (v. § 4); *le direttrici di una di queste appartengono agli altri 4 complessi fondamentali, e si appoggiano perciò alle 12 direttrici delle 6 congruenze determinate da questi.*

Partendo da questi concetti si hanno configurazioni notevoli, e una configurazione di 16 punti e 16 piani che è la medesima di quella dei punti e piani singolari della superficie di Kummer (v. Capitolo XII).

Per altri particolari si vegga KLEIN *(cit.)*, KOENIGS (*Geom. réglée, ecc. Ann. de Toulouse*, VII, 1893) e l'opera citata di STURM.

Per l'applicazione alla superficie di Kummer si può vedere anche la Memoria di REICHARDT citata al Cap. XII, § 3, pag. 434.

§ 6 — Complessi quadratici in generale.

Un complesso quadratico dipende da 19 costanti; esso è perciò individuato da 19 sue rette.

La superficie di complesso relativa ad una retta data r, è di ordine e di classe eguale a 4; la retta r è retta doppia per essa (v. § 2).

Il luogo dei vertici dei coni del complesso, rispetto a cui due punti sono reciproci, è una superficie di 2.° ordine passante per i due punti (Battaglini).

Su ogni retta r vi sono 4 punti A_1, A_2, A_3, A_4, *tali che i coni del complesso aventi i vertici in essi, si scindono in due piani; e per ogni retta passano 4 piani* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, *tali che le rette del complesso in essi situate inviluppano due punti.*

I punti A sono punti cuspidali per la superficie di complesso relativa ad r (retta doppia della superficie); e i piani α sono i quattro piani per r, di cui i due punti di contatto colla superficie coincidono in uno.

Il rapporto anarmonico dei quattro punti A è eguale a quello dei quattro piani α (Klein, *Math. Ann.*, II, VII).

I punti A e i piani α, generano e inviluppano una medesima superficie di 4.° ordine e classe (superficie singolare del complesso quadratico) (v. § 2). *Tale superficie è una superficie di Kummer.*

Ad ogni punto *A* corrisponde una retta *a* passante per esso (retta doppia del cono di vertice

A) e ad ogni piano α corrisponde una retta a' situata in esso, (retta doppia per l'inviluppo situato in α); le rette a e a' sono *rette singolari del complesso* (v. § 2).

Ogni retta singolare s è coordinata ad un punto singolare S su essa, e ad un piano singolare σ per essa; essa è tangente alla superficie singolare nel punto singolare S, e taglia questa in due altri punti che sono i centri dei due fasci situati nel piano singolare σ. Gli altri due piani tangenti condotti per s sono i due piani formanti il cono di vertice S.

Ogni piano π taglia la superficie singolare in una curva che è tangente in ogni punto in cui la taglia, alla curva del complesso (v. § 1) *situata in π; le rette tangenti comuni sono rette singolari pel complesso, e dualmente.*

I piani tali che le curve di complesso (v. § 1) *in essi situate tagliano due rette date, ovvero tagliano una retta e toccano un piano, ovvero toccano due piani, inviluppano una sviluppabile di classe rispett. 16, ovvero 8, ovvero 4.*

La rigata formata colle rette singolari, le quali incontrano una retta data è di 8.° ordine, e tutte le rette singolari formano una congruenza di 4.° ordine e classe.

Vi sono 16 piani le cui curve di complesso sono formate da due punti infinitamente vicini, e, dualmente, vi sono 16 punti i cui coni di complessi si compongono di due piani coincidenti.

Tali 16 punti e piani sono i punti e piani singolari della superficie di Kummer che è la superficie singolare del complesso.

Quei 16 punti si trovano su tutte le superficie di complesso relative ad una retta qualunque, e i 16 piani toccano le stesse superficie.

Data la superficie di Kummer, il complesso è formato nel seguente modo: in un piano tangente σ della superficie in S, si consideri la retta s singolare del complesso; questa taglia la superficie in due altri punti, e si considerino in σ i due fasci di raggi aventi per centri tali punti; l'assieme di tutti questi ∞^2 fasci che si ottengono facendo variare il piano tangente σ, è il complesso dato.

Consideriamo ora il fascio di raggi col centro in S e situati in σ, e gli ∞^2 fasci di tal natura. Si dimostra che si possono far corrispondere fra loro proiettivamente, in modo che se si assume in uno di essi un raggio qualunque, e tutti i suoi corrispondenti nell'altro, e di questi si considerano gli altri due punti d'incontro colla superficie, e i due fasci di raggi situati rispettivamente nei piani tangenti, e aventi tali 2 punti per centri, tali ∞^2 fasci di raggi formano un altro complesso quadratico, il quale ha la stessa superficie singolare del complesso dato.

Si hanno così ∞^1 complessi quadratici, che si chiamano *confocali* (Klein e Lie), *omofocali* (Segre), *in involuzione* (Schur), ovvero *consingolari* (Sturm).

L'equazione di una superficie di Kummer dipendendo da 18 costanti, e quella del complesso quadratico da 19 costanti, si vede che devono esservi infatti ∞^1 complessi quadratici colla stessa superficie di singolarità.

Per il modo di stabilire la corrispondenza pro-

iettiva cui abbiamo sopra accennato, rimandiamo allo Sturm *op. cit.*, III, pag. 32.

Ogni retta dello spazio appartiene a quattro complessi confocali.

La congruenza formata dalle rette singolari del complesso quadratico si può ritenere come la intersezione del complesso dato con un altro infinitamente poco da esso diverso nella serie dei complessi confocali generata dal dato.

Una retta singolare del complesso, e che sia osculatrice (a contatto tripunto) alla superficie di Kummer si dice *una retta singolare di 2.° ordine* del complesso (Segre); se ha un contatto quadripunto colla superficie di Kummer si dice *una retta singolare di 3.° ordine* (*Id.*).

Le rette singolari di 2.° ordine di un complesso quadratico formano una rigata di 16.° ordine, e quelle di tutti i complessi della serie confocale, formano una congruenza di ordine e classe eguale a 24.

Le rette singolari di 3.° ordine di un complesso quadratico dato sono 32; quelle dei complessi di tutta la serie confocale formano una rigata di 64.° ordine, che si spezza nei 16 inviluppi quadratici contenuti in ciascuno dei piani doppi della superficie di Kummer, e nei 16 coni quadrici uscenti da ciascuno dei 16 punti doppi della stessa superficie.

Se adoperiamo le coordinate di Klein (v. § 1) l'equazione di un complesso quadratico può scriversi

$$\sum_1^6 k_i x^2_i = 0$$

dove le x sono legate dalla relazione

$$\sum_1^6 x^2_i = 0.$$

Le rette singolari di 1.° ordine sono date dall'intersezione del complesso dato coll'altro di equazione:

$$\sum_1^6 k^2_i \, x^2_i = 0.$$

Le rette singolari di 2.° ordine sono date dalla intersezione della precedente congruenza coll'altro complesso

$$\sum_1^6 k^2_i \, x^2_i = 0$$

e infine per le rette singolari di 3.° ordine deve essere ancora

$$\sum_1^6 k^4_i \, x^2_i = 0.$$

L'equazione della serie di complessi confocali è

$$\sum_1^6 \frac{x^2_i}{k_i + \lambda} = 0$$

dove λ è parametro variabile. *

---

* Potrebbe credersi che fra questi ∞ complessi non è compreso quello di equazione $\sum_1^6 k_i \, x_i^2 = 0$; però osservia-

Il primo che si occupò di complessi quadratici fu Battaglini (*Acc. Napoli*, 1866; *Giorn. di Batt.*, VI) il quale studiò un particolare complesso quadratico che da lui prese nome (v. § 7); bisogna però dire che egli avea creduto sul principio che quel complesso fosse il più generale, ciò che poi fu riconosciuto insussistente nel 1868 da Klein (*Diss.* Bonn, 1868). Nell'opera di Plücker si contiene per la prima volta una teoria dei complessi quadratici, che furono poi largamente studiati da altri autori Clebsch, Klein, Lie (v. § 1); ad un' estesa esposizione della loro teoria è dedicato il 3.° volume dell'opera citata di Sturm.

Fra gli altri lavori sui complessi quadratici citeremo quello di Caporali (*Lincei*, *Mem.*, 1878) il

---

mo che questo può scriversi

$$\sum_1^6 (k_i + \mu)\, x_i^2 = 0 \qquad (\text{essendo } \sum x_i^2 = 0)$$

mentre l'altro può scriversi, per la stessa ragione,

$$\sum_1^6 \left(\frac{1}{\mu - \lambda} + \frac{1}{k_i + \lambda}\right) x_i^2 = 0$$

cioè

$$\sum_1^6 \frac{(k_i + \mu)}{(\mu - \lambda)\,(k_i + \lambda)}\, x_i^2 = 0$$

o anche

$$\sum_1^6 \frac{k_i + \mu}{k_i + \lambda}\, x_i^2 = 0$$

e moltiplicando per $k_1 + \lambda$, indi facendo convergere λ a ∞, e osservando che $\lim\limits_{\lambda = \infty} \dfrac{k_1 + \lambda}{k_i + \lambda} = 1$, (per ogni $i = 1, 2 \ldots 6$) resta $\sum\limits_1^6 (k_i + \mu)\, x_i^2 = 0$.

quale ne fece la rappresentazione nello spazio punteggiato, di Schur (*Diss.* Berlin, 1879), di Reye (*Crelle*, LXXXVI, XCIII, XCV, XCVII, XCVIII, di Segre (*Acc. Torino*, 1883-84) il quale ne stabilì la teoria sviluppando l'idea avuta già da Klein (v. § 1), cioè studiando la geometria su di una quadrica nello spazio a cinque dimensioni, di Montesano (*Acc. Napoli*, 1886), ecc.

Della classificazione dei complessi quadratici e dei più notevoli di essi tratteremo nel prossimo paragrafo.

Della teoria della polarità (v. § 2) rispetto ad un complesso quadratico, e di quella (che ne è un caso particolare) dei diametri, dei centri, ecc. trattò specialmente Plücker (v. anche i § 567-585 del III vol. dell'Op. di Sturm).

Il Reye (*Crelle*, XCVIII) fa la classificazione dei complessi generali di 2.° grado dal punto di vista del numero degli elementi immaginari contenuti in esso. Egli li distingue in *iperbolici*, *parabolici*, *ellittici e immaginari.*

§ 7.

Classificazione dei complessi quadratici.

Indicando con $P=0$ (v. § 2) la relazione quadratica identica fra le coordinate di rette, ovvero l'equazione della quadrica fondamentale nello spazio a 5 dimensioni, e con $C=0$ l'equazione dell'altra quadrica nello stesso spazio, tale che la sua intersezione colla prima dia la varietà che corrisponde al complesso quadratico di rette, la classificazione dei complessi si fa considerando il *discriminante della quadrica*

$$P+\lambda C=0$$

che è di 6.° grado in λ, *ed è propriamente un determinante di 6.° ordine* Δ.

Se le radici di tal discriminante sono tutte distinte, *cioè se il fascio di quadriche contiene 6 coni distinti*, si ha il caso del *complesso generale con 19 costanti* (studiato al § 6): *la superficie singolare è allora una superficie di Kummer generale.*

Può avvenire che questa diventi in particolare un *tetraedroide* (v. Cap. XII, § 4); allora si ha il cosiddetto *complesso Battaglini, o complesso armonico*, che contiene come caso particolare il *complesso di Painvin*, in cui la superficie singolare è diventata *una superficie di Fresnel* (v. Cap. XII, § 4, pag. 445).

Sono poi da considerarsi i casi in cui alcune delle radici del discriminante Δ sono eguali, però

nessuna annulla tutti i minori di 5.° ordine del determinante di 6.° ordine. Allora alcuni dei coni quadrici, di cui sopra si è parlato, vengono a coincidere; supposto, per fissare le idee, che vengano a coincidere due di essi, o tre di essi, ecc. i relativi complessi si indicheranno coi simboli

[2, 1, 1, 1, 1] , [3, 1, 1, 1], ecc.

mentre, colla analoga notazione, il complesso generale sarà indicato dal simbolo

[1, 1, 1, 1, 1, 1]

In tali casi il complesso ha delle rette doppie (v. § 3), *e queste sono rette doppie anche per la superficie singolare. Si distinguono 10 casi (oltre il caso generale) e cioè:*

N.	Simbolo	Num. delle costanti	Rette doppie del complesso	Superficie singolare	
2.	[21111]	18	1	Di 4.° ordine e 4.ª classe e con una retta doppia. Essa è la superficie di complesso di un complesso quadr. generale relativa a:	1 retta qualunque, o
3.	[3111]	17	1		del complesso, o
4.	[411]	16	1		singol. di 1.° ord., o
5.	[51]	15	1		singolare di 2.° ord.
6.	[2211]	17	2 rette che si intersecano	Di 4.° ordine e classe con due rette doppie che si incontrano. Superficie di complesso quadr. generale relativa ad una tangente della superficie di Kummer. Le rette sono:	ambedue doppie.
7.	[321]	16			una cuspidale.
8.	[33]	15			due cuspidali.

9.	[222]	16	3 rette situate in un piano, o, dualmente, passanti per un punto. *	Superficie di CAYLEY di 3.° ordine e 4.ª classe e il piano passante per le tre rette, o, dualmente Superficie di STEINER di 4.° ordine e 3.ª classe (v. Cap. XI, XII) e il punto su le tre rette.
10.	[42]	15		
11.	[6]	14		Per il complesso [6] la superficie singolare è una superficie di complesso di un complesso generale relativa ad una retta singolare di 3.° ordine.

* Nel complesso [42] due delle tre rette sono coincidenti, e in [6] sono coincidenti tutte tre. Di qui deriva un'apparente contraddizione fra i risultati dei vari Autori, WEILER (sottoc., pag. 204), SEGRE (§ 164), STURM (pag. 486).
È bene avvertire ciò per evitare confusioni.

Ai casi 9, 10, 11 corrispondono propriamente, come superficie singolari, oltre un piano, quelle classificate coi numeri 16, 18, 19 da Cayley nella *Mem. on Cubic Surfaces*, *Phil. Trans.*, 1869, *P.* I, pag. 317, e *dualmente.*

C'è ora da considerare i casi in cui il determinante Δ di 6.° ordine abbia delle radici multiple, e queste annullino anche tutti i minori di 5.° ordine (che chiameremo Δ'), o anche tutti quelli di 4.° ordine (che chiameremo Δ'') del determinante stesso.

Si adopera la seguente notazione per indicare i complessi relativi a questi casi: supponiamo che una radice sia multipla secondo l'ordine ν per Δ, e secondo l'ordine ν' per tutti i minori Δ' e *non* annulli *tutti* i minori Δ''. Il relativo complesso lo indicheremo col simbolo

$$[(\nu - \nu', \nu'), r, s, \ldots]$$

dove

$$\nu + r + s + \ldots = 6$$

ed $r, s, \ldots$ rappresentano gli ordini di moltiplicità delle altre radici del determ. Δ (supposto che queste altre radici non annullino i Δ'); in altri termini, supposto che una radice multipla di ordine ν di Δ, annulli anche i Δ' coll' ordine di molteplicità ν', si porrà nel medesimo simbolo adoperato sopra (pag. 559), in luogo del numero ν che corrisponde a quella radice multipla, il simbolo $(\nu - \nu', \nu')$.

Similmente se una radice è multipla secondo ν per Δ, secondo ν' per tutti i Δ' e secondo ν'' per tutti i Δ'', nel medesimo simbolo, si porrà in luogo del numero ν, il simbolo

$$(\nu - \nu', \quad \nu' - \nu'', \quad \nu'').$$

Si dimostra che si ha sempre

$$\nu - \nu' \geqq \nu' - \nu'' \geqq \nu'' \qquad \text{(Weierstrass)}$$

Così p. es. il simbolo [(3 2) 1] rappresenta che delle 6 radici di Δ, una è quintupla, e questa è doppia per tutti i Δ'; il simbolo [(1 1 1) 2 1] rappresenta che delle 6 radici di Δ una è semplice, una è doppia e non annulla tutti i Δ', un'altra è tripla, ed è doppia per tutti i Δ' e semplice per tutti i Δ'', ecc.

Questa notazione è suggerita dalla cosiddetta teoria dei *divisori elementari* di Weierstrass (*Berl. Monatsb.*, 1858, 1868) mediante la quale si possono risolvere vari problemi di classificazione analoghi a questo di cui ora trattiamo. Tale teoria ha origine dal seguente problema: *trasformare due date forme del medesimo grado n e con m variabili, simultaneamente a forma canonica*, del qual problema si occuparono Jacobi (*Crelle*, II), Sylvester (*Phil. Mag.*, 1851, pag. 119, 295, 415) e Weierstrass (*op. cit.*); è a questo problema che per $n = 2$, $m = 6$, si riduce il problema della classificazione dei complessi quadratici (Klein, *Math. Ann.*, II, p. 203) (v. anche p. 120-121 di questo volume).

Formiamo ora la tabella degli altri casi cui abbiamo accennato.

In tutti questi rimanenti casi la superficie singolare è sempre rigata.

Nei casi in cui tutti i Δ'' si annullano per una radice di $\Delta = 0$, la superficie singolare degenera sempre in una quadrica doppia.

N.	Simbolo	Num. delle costanti	Rette doppie del complesso	Superficie singolare
12.	[(11) 1111]	17	2 rette gobbe.	Rigata di 4.° ordine con due direttrici doppie e senza generatrici doppie (tipo XI di CREMONA, v. Cap. XII, § 10).
13.	[(11) 211]	16	3 rette di cui una incontra le altre due fra loro gobbe.	Idem con una generatrice doppia (tipo V di CREMONA, generale).
14.	[(11) 31]	15	Idem.	Idem con una generatrice cuspidale (tipo V di CREMONA con generatrice cuspidale).
15.	[(11) 22]	15	4 di cui 2 gobbe e 2 che si incontrano; delle	Rigata cubica con due direttrici, una doppia e una semplice, un punto sulla direttrice doppia, e

			prime una forma colle due altre un triangolo e una un triedro.	un piano passante per la direttrice semplice, e che taglia la generatrice doppia in un punto qualunque (non cuspidale). La rigata cubica ha due punti e due piani cuspidali rispettivamente sulla prima e per la seconda delle due direttrici.
16.	[(11) 4]	14	Idem.	Idem, però il punto e il piano sono cuspidali.
17.	[(21) 111]	16	2 rette gobbe.	Rigata di 4.° ordine con due direttrici coincidenti (tipo XII di CREMONA). A questa direttrice appartengono 4 punti e 4 piani cuspidali.
18.	[(21) 21]	15	3 rette di cui 2 gobbe segate dalla terza.	Rigata di 4.° ordine (tipo VI di CREMONA) con una generatrice doppia.
19.	[(21) 3]	14	Idem.	Idem, con una generatrice cuspidale.

N.	Simbolo	Num. delle co-stanti	Rette doppie del complesso	Superficie singolare
20.	[(31) 11]	13	Idem.	Rigata di 4.° ordine con una retta tripla, la quale è direttrice semplice e generatrice doppia (tipo X di CREMONA).
21.	[(31) 2]	14	Come nel caso 15.	Rigata cubica di CAYLEY, con un punto e un piano come nel caso 15.
22.	[(41) 1]	14	Come nel caso 18.	Come in 20, ma la retta tripla è anche generatrice cuspidale (non solamente doppia) (tipo X di CREMONA, coi piani stazionari coincidenti).
23.	[(51)]	13	Come nel caso 15.	Rigata cubica di CAYLEY, e un punto e piano come nel caso 16.

24.	[(22) 11]	11	Un fascio di rette.	Cono quadrico e conica.
25.	[(32) 1]	13	Idem.	Cono quadrico e conica passante per il vertice del cono, mentre il piano della conica è tangente al cono.
26.	[(22) 2]	13	Un fascio di rette e un'altra retta passante per il centro del fascio, o, dualmente, nel piano del fascio.	Come in 24, solo che il cono si scinde in due piani, o, dualmente, la conica in due punti.
27.	[(42)]	12	Idem.	Due piani e una conica tangente alla comune intersezione di quelli, o, dualmente, un cono e due punti su di una sua generatrice (caso particolare di 26).
28.	[(33)]	11	Un fascio di rette e due altre rette una nel	Un piano triplo, un punto triplo; un altro piano e punto appartenentisi.

N.	Simbolo	Num. delle costanti	Rette doppie del complesso	Superficie singolare
			piano del fascio e l'altra per il centro.	
29.	[(11)(11)11]	15	4 rette formanti un quadrilatero gobbo.	Due quadriche che si incontrano in un quadrilatero gobbo.
30.	[(11)(11)2]	14	5 rette formanti un quadrilatero e una diagonale.	Una delle quadriche diventa una coppia di piani tangenti all'altra.*
31.	[(21)(11)1]	14	4 rette formanti un quadrilatero gobbo.	Due quadriche aventi di comune una retta contata due volte e due altre che intersecano la prima

32.	[(21) (21)]	13	Idem.	Due quadriche aventi di comune una coppia di rette contate due volte.
33.	[(22) (11)]	12	Come in 28.	2 piani, 2 punti; un piano e un punto contati due volte e appartenentisi.
34.	[(31) (11)]	13	Come in 30.	Come in 30.
35.	[(11)(11)(11)]	13	6 spigoli di un tetraedro.	4 piani e 4 punti formanti le facce e i vertici di un tetraedro. Questo è il *complesso tetraedrale* (v. § 9).
36.	[(111) 111]	14	Un sistema di generatrici di una quadrica.	Una quadrica contata due volte.

* Questo complesso si chiama complesso di Hirst (*Collect. math.* Milano, 1881, pag. 51; *Proc. L. Math. Soc.*, X). Esso si genera mediante due piani fra loro correlativi (v. anche Sturm, III, pag. 429-430).

N.	Simbolo	Num. delle costanti	Rette doppie del complesso	Superficie singolare
37.	[(111) 21]	13	Un sistema di generatrici di una quadrica e una direttrice di questa.	Idem.
38.	[(111) 3]	12	Idem.	Idem.
39.	[(211) 11]	13	Due fasci di raggi.	2 piani doppi e sulla loro intersezione due punti doppi.
40.	[(211) 2]	12	Due fasci di raggi, e un'altra retta doppia in uno di questi.	Idem.
41.	[(311) 1]	12	Due fasci di raggi.	Idem.

42.	[(411)]	11	Idem.	Idem.
43.	[(221) 1]	11	Due fasci di raggi coincidenti.	Un piano e un punto appartenentisi e contati 4 volte.
44.	[(321)]	10	Idem.	Idem.
45.	[(222)]	8	Una rete, o, dualmente, una stella di raggi.	Un cono quadrico doppio, o, dualmente, una conica doppia.
46.	[(111)(11)1]	12	Un sistema di generatrici di una quadrica e due distinte direttrici di questa.	Quadrica doppia.
47.	[(111)(21)]	11	Idem, però le due direttrici coincidono.	Idem.

* Per le particolarità della superficie singolare dei casi 40, 41, 42 rimandiamo alla pagina 68 del lavoro sottoc. di SEGRE.

N.	Simbolo	Num. delle costanti	Rette doppie del complesso	Superficie singolare
48.	[(211)(11)]	11	Due fasci di raggi e due raggi appartenenti uno ad un fascio, e uno all'altro.	Una coppia di piani e una coppia di punti, contate due volte.
49.	[(111)(111)]	9	I due sistemi di generatrici di una quadrica.	Quadrica doppia.

In tutto si hanno 49 specie; se poi si tien conto delle 6 specie che ne ammettono un'altra ad esse *duale*, cioè delle specie coi numeri 9, 10, 11, 26, 27, 45, si hanno in tutto 55 specie.

Il primo lavoro sulla classificazione dei complessi è quello di WEILER (*Math. Ann.*, VII) il quale però non è esente da molte inesattezze, rilevate da SEGRE e altri. Indi si occupò dello stesso argomento SEGRE (*Acc. Torino,* XXXVI, 1884), il quale trattò anche in un lavoro a parte (*Math. Ann.*, XXIII) i casi in cui la superficie singolare è una quadrica doppia degenere. Nel 3.° volume dell'op. di STURM è trattata anche ampiamente la quistione e con metodi di geometria pura.

§ 8. — COMPLESSO BATTAGLINI O ARMONICO.

Il complesso Battaglini (v. § 7) ha la seguente generazione proiettiva: *esso è l'assieme delle rette le quali incontrano due quadriche* f_1, f_2 *in quattro punti armonici*, ovvero:
esso è l'assieme delle rette da cui possono condursi a due quadriche date (che non sono le stesse di prima) quattro piani tangenti armonici (ASCHIERI, *Giorn. di Batt.*, VIII).

Un complesso Battaglini è generabile in tal guisa in ∞ modi.

La congruenza delle rette singolari del complesso Battaglini è l'intersezione di questo complesso col complesso tetraedrale (v. § 9) *di quelle rette le cui polari rispetto alle due quadriche* f_1, f_2 *si tagliano.*

Considerando il fascio $\lambda f_1 + \mu f_2 = 0$, e accoppiando fra loro in involuzione le quadriche di questo fascio in modo che $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ sieno gli elementi doppi dell'involuzione, *le rette del complesso sono le tangenti comuni alle due quadriche di ciascuna coppia* (SEGRE e LORIA, *Math. Ann.*, XXIII).

I piani singolari del complesso sono i piani tangenti comuni alle due quadriche di ciascuna coppia, e le rette singolari sono le congiungenti i punti di contatto (Id.).

Abbiamo già detto (§ 7), che *la superficie singolare di un complesso Battaglini è un tetraedroide;* ora aggiungiamo:

Ad ogni tetraedroide come superficie singolare, corrispondono due complessi Battaglini.

L'equazione del complesso Battaglini, mediante le coordinate p, si esprime mediante i soli quadrati delle stesse.

Caso particolare del complesso Battaglini è il complesso di PAINVIN (*Bull. de Darboux*, 1871; *Nouv. Ann. de math.* 1872; DESMOULIN, *Bull. de la Soc. Math.*, XX), *che è l'assieme delle rette da cui si possono condurre ad un ellissoide coppie di piani tangenti ortogonali.*

Si ottiene questo complesso facendo degenerare una delle due quadriche (come inviluppo) che servono a generare nel modo sopraindicato il complesso, nell'assoluto dello spazio * *(euclideo).*

---

* Dicesi *assoluto o limite* dello spazio il circolo immaginario all'infinito, (comune a tutte le sfere dello spazio), cioè il luogo di tutti i punti ciclici dei piani dello spazio (v. pag. 41 e 137).

La superficie singolare per il complesso di Painvin è una superficie d'onda di Fresnel.

La classificazione dei complessi Battaglini fu fatta da SEGRE e LORIA (*Math. Ann.*, XXIII), MONTESANO (*Acc. Napoli*, 1886); si veggano poi anche le pag. 488 e seg. del III vol. dell'op. di STURM.

§ 9. — COMPLESSO DI REYE O TETRAEDRALE.

Il complesso tetraedrale o di REYE, è quello cui corrisponde il simbolo o la caratteristica

$$[(11)(11)(11)] \text{ (v. § 8).}$$

La sua equazione in coordinate x di KLEIN *può scriversi*

$$a(x_1^2 + x_2^2) + b(x_3^2 + x_4^2) + c(x_5^2 + x_6^2) = 0.$$

Al complesso di Reye corrisponde un tetraedro tale che ogni retta che appartiene ad una faccia o ad un vertice del tetraedro, appartiene al complesso.

Le quattro facce e i quattro vertici del tetraedro formano la superficie singolare del complesso, e la congruenza delle rette singolari è quella di tutte le rette contenute in uno dei quattro piani e di tutte quelle passanti per uno dei quattro vertici.

Gli spigoli del tetraedro sono rette doppie del complesso.

Scelto questo tetraedro, come tetraedro fondamentale per le coordinate, l'equazione del complesso in coordinate p_{ij} è

$$a\, p_{12}\, p_{34} + b\, p_{13}\, p_{42} + c\, p_{14}\, p_{23} = 0.$$

Il complesso di Reye si compone di tutte le rette le quali segano i 4 piani del tetraedro fondamentali in quattro punti aventi un determinato rapporto anarmonico; ovvero: *esso si compone di tutte le rette proiettate dai 4 vertici del tetraedro in 4 piani di determinato rapporto anarmonico (questo secondo rapporto anarmonico è eguale a quello di prima).*

Variando questo rapporto anarmonico, restando fisso il tetraedro, si hanno ∞^1 *complessi tetraedrali confocali.*

La generazione data da Reye del complesso tetraedrale è la seguente:

Esso è l'assieme delle rette che congiungono i punti corrispondenti di due spazi sovrapposti e fra loro in dipendenza omografica (v. Cap. I); ovvero:

L'insieme delle rette intersezioni dei piani corrispondenti dei due medesimi spazi; ovvero:

L'insieme delle rette che incontrano le loro corrispondenti negli stessi due spazi.

Altre generazioni sono le seguenti:

Il complesso di Reye è l'assieme delle rette che si appoggiano alle coppie di raggi corrispondenti di due fasci di rette fra loro omografici e comunque situati nello spazio.

Esso è anche l'assieme delle rette che congiungono i punti di un piano coi punti dei raggi ad essi corrispondenti di una stella riferita omograficamente al piano.

Esso è anche l'assieme delle corde e delle tangenti di tutte le cubiche gobbe le quali passano per i 4 vertici del tetraedro e tagliano due volte una retta dello spazio, la quale appartiene natu-

ralmente al complesso stesso. Variando questa retta fra quelle del complesso, variano le cubiche, ma il complesso resta inalterato.

Un complesso di Reye è individuato dal tetraedro e da una sua retta generica.

Un particolare complesso tetraedrale specializzato da un punto di vista metrico, è *quello delle rette equidistanti da due punti fissi* (v. Sturm, pag. 364); un altro complesso tetraedrale speciale è da considerarsi quello di caratteristica [(22) (11)] (v. § 8); in quest'ultimo complesso *le curve del complesso (cioè le curve inviluppate da rette del complesso nei piani dello spazio) sono tutte parabole; e i coni del complesso sono tutti equilateri* (v. pag. 191).

Il complesso tetraedrale fu considerato prima da Reye *(Geom. der Lage)*; indi se ne occuparono Lie (*Gött. Nach.*, 1870), Battaglini (*Giorn. di Batt.*, XII), Aschieri (*Rend. Ist. Lomb.*, 1879), Loria (*Acc. Torino.* 1884; *Giornale di Batt.*, XXIII), ecc.

Weiler (*Zeitsch. f. Math.,* XXII) ne fece la rappresentazione sullo spazio a tre dimensioni; al complesso tetraedrale è dedicata la seconda parte del primo volume dell'opera di Sturm.

Per altri lavori relativi ad altri particolari complessi si veggano le pag. 222-223 del libro più volte citato di Loria (*Teorie geom.*, Torino, 1894).

§ 10. — Teoria generale delle congruenze di rette.

L'*ordine* n di una congruenza algebrica è il numero delle sue rette passanti per un punto arbitrario dello spazio, e *classe* m di una congruenza è il numero delle sue rette situate in un piano arbitrario.

Rango r (*Art* secondo Schumacher; *Rang* secondo Sturm) di una congruenza è il numero delle sue coppie di rette che con una retta arbitraria dello spazio appartengono ad uno stesso fascio.

Una congruenza di ordine n e classe m si suole indicare col simbolo (n, m) o anche (n, m, r) facendovi figurare anche il *rango*.

Chiamando p il *genere* della rigata secondo cui la congruenza (n, m, r) è tagliata da un complesso lineare generale, si ha la relazione

$$p = (n - 1)(m - 1) - r.$$

Il numero p si suole da alcuni chiamare genere *della congruenza.*

Se la classe e l'ordine sono eguali ad 1, il rango è zero.

Ogni congruenza in cui l'ordine e la classe sono eguali, e che fa parte di un complesso lineare, ha il rango eguale a zero.

La congruenza intersezione di due complessi di gradi $n_1 n_2$ è di rango $n_1 n_2 (n_1 - 1)(n_2 - 1)$.

I piani passanti per due degli n raggi della

congruenza che passano per un punto P, inviluppano, se P percorre una retta, una superficie sviluppabile T di classe

$$\frac{1}{2} n(n-1)+r;$$

se P percorre un piano, gli stessi piani inviluppano una superficie S di classe

$$\frac{1}{2} m(m-1)+r$$

per la quale il piano percorso da P è piano tangente multiplo d'ordine $\frac{1}{2} m(m-1)$.

I punti d'incontro delle m rette della congruenza situate in un piano, se questo rota intorno ad una retta, formano una curva C di ordine

$$\frac{1}{2} m(m-1)+r,$$

e se quel piano rota intorno ad un punto, quei punti descrivono una superficie S_1 *d'ordine*

$$\frac{1}{2} n(n-1)+r,$$

per la quale il centro della stella di piani è punto multiplo d'ordine $\frac{1}{2} n(n-1)$.

Il luogo delle rette della congruenza che tagliano una retta data è una rigata R d'ordine

$$n+m,$$

per la quale quella retta è una direttrice n^{pla}.

Per mezzo delle congruenze algebriche restano stabilite delle corrispondenze involutorie *di ordine superiore* fra i piani e i punti dello spazio; queste corrispondenze le chiamiamo *sistemi nulli di ordine superiore* per analogia colle polarità o sistemi nulli ordinari di Möbius (vedi § 3). Dato un punto dello spazio vi sono per esso n raggi della congruenza, e quindi $\alpha = \frac{1}{2} n(n-1)$ piani per esso; e dato un piano, vi sono in esso m raggi della congruenza e quindi $\beta = \frac{1}{2} m(m-1)$ punti in esso; la polarità nulla ordinaria è un caso particolare di questa (quando $\alpha = \beta = 1$).

Ad una tale corrispondenza può assegnarsi *un'altra caratteristica* γ che rappresenta quanti punti esistono su di una retta arbitraria dello spazio, in modo che uno dei loro piani corrispondenti passi per la retta. *Nel caso in cui tale sistema nullo sia stabilito per mezzo di una congruenza, la sua terza caratteristica* γ *corrisponde al rango della congruenza.*

Il più antico esempio di una siffatta corrispondenza è quello dato da Cremona (*Compt. Rend.*, LIV, 1862; indi ne trattarono Ameseder (*Crelle*, XCVII), Voss (*Math. Ann.*, XXIII), Sturm (*Id.*, XXVIII).

Per altri dettagli ed esempi si può vedere il § 56 del 1.° vol. dell'opera di Sturm.

Ogni raggio della congruenza è incontrato da due altri raggi infinitamente vicini; i due punti d'incontro si dicono *fuochi* e i due piani passanti

per quella retta e per ciascuna delle altre due si dicono *piani focali.*

I fochi descrivono la medesima superficie (superficie focale) che è inviluppata dai piani focali, e che è di ordine

$$n_1 = 2\,m\,(n-1) - 2\,r$$

e di classe

$$m_1 = 2\,n\,(m-1) - 2\,r.$$

Di qui si ha:

La differenza fra l'ordine e la classe della superficie focale di una congruenza algebrica è il doppio della differenza fra l'ordine e la classe della congruenza (*teor. di* KLEIN, vedi LIE, *Gött. Nach.*, 1870).

Ogni raggio della congruenza è tangente alla superficie focale nei propri punti focali, e i piani tangenti in questi sono i piani focali.

Si dicono *punti e piani singolari della congruenza* quei punti e piani cui appartengono ∞ rette della stessa; i coni formati da queste, e le curve da esse inviluppate si dicono *coni e curve singolari della congruenza.*

Se quei coni sono di ordine h, quel punto singolare si dice di *grado* h; se queste curve sono di classe h, il piano singolare si dice di *grado* h.

Due punti o due piani singolari si dicono *coniugati* (o riuniti, *verbundene* secondo i Tedeschi) quando la retta che unisce i due punti, o comune intersezione dei due piani, *appartiene alla congruenza.*

Alle volte sembra che la congruenza sia priva di una propria superficie focale, ma abbia solo una *linea* focale.

P. es. consideriamo la congruenza delle rette che si appoggiano a due curve date; allora i punti di queste curve appaiono come fochi dei raggi della congruenza, e quindi parrebbe che non vi sieno altri punti focali che quelli appartenenti alle due curve.

Da alcuni autori tali congruenze si sogliono chiamare *prive di superficie focale*; però lo Sturm *(Op. cit.)* ha osservato che ciò non è esatto se l'ordine della congruenza è maggiore di 1, giacchè è facile riconoscere che, considerando un piano tangente comune alle due curve e la congiungente i due punti di contatto, ogni punto di questa è da considerarsi come foco, e quindi propriamente in questo caso la superficie focale è la rigata formata colle congiungenti sopraddette, cioè la sviluppabile dei piani tangenti comuni alle due curve.

I punti delle due curve sono evidentemente anche *punti singolari* della congruenza, giusta la definizione già data; quindi si vede che queste congruenze hanno infiniti punti singolari formanti una o più linee, che chiameremo *linee singolari; in generale* invece i punti singolari sono in numero finito.

Possono dunque le congruenze di ordine maggiore di 1, distinguersi in quelle che *non hanno linee singolari*, e in quelle che *ne hanno.*

Se si considera un raggio di una congruenza qualunque (anche non algebrica) e tutti quei ad esso infinitamente vicini, e le minime distanze fra l'uno e gli altri, *i piedi, sul raggio, di queste minime distanze sono in generale sempre compresi fra due punti*, che si chiamano *punti limiti.*

Fra tutti i raggi infinitamente vicini, ve ne sono, come sopra abbiamo detto, due che incontrano il raggio, per i quali cioè la minima distanza è zero; essi sono i *fochi*, ed è notevole il teorema che *i fochi, che sono naturalmente ambedue interni al segmento limitato dai punti limiti, sono equidistanti da questi*. Perciò: il punto medio del segmento dei punti limiti coincide col punto medio del segmento dei fochi; tal punto medio si chiama *punto medio del raggio*.

Si considerino quei due raggi infinitamente vicini al dato, di cui i piedi delle minime distanze dal raggio dato coincidano coi punti limiti; si ha il teorema: *le direzioni di tali minime distanze uscenti dai punti limiti sono fra loro perpendicolari;* i piani passanti per il raggio e per tali direzioni si chiamano *piani principali*.

I piani bisettori dell'angolo dei piani principali coincidono coi piani bisettori dell'angolo dei piani focali.

Fra l'angolo γ *dei piani focali, la distanza* $2d$ *dei punti limiti e quella* 2δ *dei punti focali sussiste la relazione* $\operatorname{sen}\gamma = \frac{\delta}{d}$.

Questi concetti ora sviluppati appartengono alla teoria infinitesimale delle congruenze la quale fu cominciata da Hamilton e Kummer. Di essa tratteremo nel Cap. sulla Geometria infinitesimale, e definiremo ancora la cosiddetta *densità* del sistema in un punto di un raggio, nel senso introdotto da Kummer, e che è affine al concetto di *curvatura* di un superficie in un punto. Fra le congruenze studiate con metodi della geometria

infinitesimale è notevole quella dalle normali ad una superficie; ma di essa tratteremo in seguito (v. Cap. XVI.) Per ora ci limiteremo nel § seguente a considerare le congruenze *algebriche* dei primi ordini.

La prima specie di congruenze importanti che si presentò ai geometri fu quella delle normali ad una superficie; nel 1828 HAMILTON cominciò uno studio delle congruenze, chiamate anche *sistemi di raggi* (*Irish. Trans.*, XV, 1828; XVI, 1830; XVII, 1837) e nel 1860 il KUMMER pubblicò la memoria cui abbiamo accennato (*Crelle*, LVII) che rappresentò un passo importante nello sviluppo della teoria.

Lo studio delle congruenze algebriche di 1.° e 2.° ordine fu cominciato sistematicamente dallo stesso KUMMER nel 1866 (*Berl. Abh.*, 1866), e una larga parte della *Neue Geom.* di PLÜCKER fu dedicata alla teoria delle congruenze e specialmente di quelle risultanti dall'intersezione di due complessi lineari.

Altri lavori sulle congruenze furono quelli di MÖBIUS (*Leipz. Berichte*, XIV, 1862), MATTHIESSEN (*Zeits. f. Math.*, XXIX; *Acta math.*, IV), WEINGARTEN (*Crelle*, XCVIII), BIANCHI (*Ann. di mat.*, XV), VOSS (*Math. Ann.*, IX), STURM (*Gött. Nach.*, 1888; *Math. Ann.*, XXXVI), SCHUMACHER (*Id.*, XXXVII, XXXVIII), MONTESANO (*Acc. Torino*, 1892; *Rend. Lincei*, 1892; *Rendic. Palermo*, 1893), ecc.

Una teoria completa delle stesse si trova nel 2.° vol. dell'opera citata di STURM. L'introduzione del *rango* fu fatta da SCHUMACHER che lo chiamò *Art*, come abbiamo già detto.

§ 11. — Congruenze di 1.° ordine.

Tutte le congruenze di 1.° *ordine sono di rango zero; non possono avere una vera superficie focale-luogo; hanno invece una superficie focale-inviluppo.*

Fra le congruenze di 1.° ordine è da annoverarsi *la stella di rette che è di classe zero, e per cui esiste un solo punto singolare.*

Ogni altra congruenza di 1.° ordine avrà sempre almeno una linea singolare. Se γ_h *è l'ordine di una linea singolare della congruenza lineare tale che gli infiniti raggi partenti da un suo punto formano un cono d'ordine h, si ha la relazione*

$$\Sigma\ \gamma_h\, h\,(h-1) = m\,(m-1)$$

dove m è la classe della congruenza, e il sommatorio si estende a tutte le linee singolari.

Si hanno poi ancora le altre due relazioni (di cui la seconda è conseguenza delle altre).

$$\Sigma\ \gamma_h\, h^2 = m\,(m+1)$$
$$\Sigma\ \gamma_h\, h = 2\, m.$$

Una congruenza di primo ordine può avere al massimo DUE *linee singolari (curve direttrici della congruenza).*

Se essa ha una sola curva direttrice, e su ciascun suo raggio i fochi sono in generale distinti, sarà la congruenza delle corde di una certa curva.

L'unica congruenza di 1.° ordine formata colle corde di una curva è quella delle corde di una cubica gobba; essa è di classe 3.

Se la congruenza ha due curve direttrici, una di queste deve essere una retta; l'ordine dell'altra curva è allora la classe m della congruenza; questa direttrice d'ordine m deve incontrare in

$$m(m-1)$$

punti la retta.

Se i due fochi su ciascun raggio della congruenza coincidono, allora *questa ha una sola curva focale e direttrice, la quale non può che essere una retta.*

Questa congruenza può generarsi SOLO *nel seguente modo, facendo cioè corrispondere con una corrispondenza* $[1, m]$ *i punti di una retta coi piani del fascio avente quella retta per asse, e considerando come rette della congruenza tutte quelle (formanti un fascio) che passano per un punto della retta e che stanno nel piano corrispondente.*

Per ciascun raggio il punto focale (unico) è il punto in cui esso incontra la retta direttrice, e il piano focale è quello che passa per esso e per la retta direttrice.

Il Kummer nel lavoro del 1866 *(Berl. Abh.)* facendo la classificazione delle congruenze di 1.° ordine non vi incluse quelle aventi un'unica linea focale.

§ 12. — Congruenze di 2.° ordine senza linee singolari.

Le congruenze di 2.° ordine possono avere solo *un numero finito di punti singolari*, ovvero *delle linee singolari.*

Nel primo caso la classe m non può essere superiore a 7.

In una congruenza di 2.° ordine senza linee singolari non vi possono essere piani singolari di grado superiore al primo e punti singolari di grado superiore a 6 (v. § 10).

Ogni punto singolare di 1.° grado è centro di un fascio di raggi situati in un piano singolare anche di 1.° grado.

Il rango di una congruenza (2, m) *senza linee singolari è $m - 2$.*

Le caratteristiche del sistema nullo (v. § 10) *determinato dalla congruenza* (2, m) *sono:*

$$1, \quad \frac{1}{2} m (m - 1), \qquad m - 2.$$

La superficie focale di una congruenza (2, m) *senza curve singolari è di 4.° ordine, 2 m^{ma} classe e di 12.° rango ;** *ogni punto singolare della congruenza è punto doppio per la superficie focale.*

---

* Si chiama rango di una superficie il numero a (v. pagina 295).

I raggi i cui punti focali coincidono, e quelli i cui piani focali coincidono formano due rigate di grado $2(m+2)$.

Se α_h *è il numero dei punti singolari di grado* h, *si hanno le seguenti relazioni:*

$$\Sigma\ \alpha_h = 18 - m$$

$$\Sigma\ \alpha_h\, h = 4(m+2)$$

$$\Sigma\ \alpha_h\, h^2 = 2\, m\,(m+2)$$

$$\Sigma\ \alpha_h\, h^3 = (m+2)^2\,(m-1).$$

Ogni congruenza $(2, m)$ *senza linee singolari ha* $\frac{1}{2}(m-2)(m-3)$ *raggi doppi, e ad ogni punto singolare di grado* h, *appartengono* $\frac{1}{2}(h-1)(h-2)$ *raggi doppi, che sono generatrici doppie del cono uscente da quel punto; nessun raggio doppio giace sulla superficie focale.*

Ogni piano singolare contiene 6 punti singolari situati su di una conica, e ogni cono quadrico singolare (uscente da un punto singolare di 2.° grado) contiene in tutto 9 punti singolari situati su di una quartica gobba di 1.ª specie avente un punto doppio nel vertice del cono. Ogni raggio doppio contiene due punti singolari i cui gradi hanno per somma $m+2$.

Vi sono due specie di congruenze $(2, m)$ *senza linee singolari, e cioè:*

I. *Quelle aventi punti singolari solamente di gradi 1, 2, 3 ed* $m-1$ *(1.ª specie).*

II. *Quelle aventi punti singolari solo di gradi* $1, 2, \frac{1}{2}m+1$ *(2.ª specie).*

I numeri α_h relativi alle varie specie di congruenze $(2, m)$ senza linee singolari sono perciò quelli dati dalle seguenti tabelle:

	Congruenze di 1.ª specie					
	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)	(2,7)
α_1	16	10	6	3	1	0
α_2	—	5	6	6	4	0
α_3	—	—	2	3	6	10
α_4	—	—	—	1	0	0
α_5	—	—	—	—	1	0
α_6	—	—	—	—	—	1

	Congruenze di 2.ª specie	
	(2,4)	(2,6)
α_1	6	0
α_2	6	8
α_3	2	0
α_4	—	4

Le due congruenze (2, 6 si indicano coi simboli (2, 6)$_{I}$, (2, 6)$_{II}$, secondo le notazioni contenute nel recente trattato di STURM; è da notarsi che gli autori prima di STURM chiamavano di 1.ª specie quella chiamata da STURM di 2.ª specie e viceversa.

La congruenza (2, 2) *ha per superficie focale una superficie di Kummer; essa è intersezione completa di un complesso quadratico con un complesso lineare.*

Coi 16 punti singolari si formano 40 coppie di punti coniugati e 80 coppie di punti non coniugati. Ogni punto è coniugato ad altri 5.

Tale congruenza fu studiata specialmente da KUMMER *(Berl. Abh.*, 1866), REYE (*Crelle*, LXXXVI), SCHUR (*Math. Ann.*, XV), CAPORALI (*Lincei Mem.*, II$_3$), STAHL (*Crelle*, XCII), HIRST *Lond. math. Soc.*, XIV), STURM (*Crelle*, CI). Una trattazione completa di questa e delle altre si trova a pag. 117 e seg. del 2.º vol. dell'opera di STURM.

La congruenza (2, 3) *ha 5 punti singolari di 2.º grado S_2, 10 di primo grado S_1, e quindi 10 piani singolari; ognuno di questi passa per due punti S_2 e per un punto S_1.*

Ogni S_2 è coniugato con ogni altro S_2, e con quattro S_1; ogni S_1 è coniugato con tre S_1 e due S_2.

Per ogni congruenza (2, 3) *passano 10 complessi tetraedrali; il tetraedro fondamentale per ciascuno di questi ha per vertici tre punti S_2 e l'unico punto S_1 non coniugato con alcuno di quei tre S_2.*

La superficie focale è una superficie di 4.º or-

dine e 6.ª classe, avente quei 15 punti singolari per piani tangenti doppi lungo coniche.

Questa congruenza fu studiata oltrecchè da KUMMER, REYE, HIRST (*sopra cit.*), anche da STAHL (*Crelle*, XCI), VOSS (*Math. Ann.*, XXIII), SCHUMACHER (*Unters. ü. Strahlensyst. 3. Ord. und 2. Klasse, Diss.* München, 1885).

La congruenza (2, 4) *è di rango* 2; *ha necessariamente un raggio doppio che congiunge i due punti singolari di 3.° ordine; essa ha 2 punti singolari S_3 di 3.° grado, fra loro coniugati, 6 di 2.° e 6 di 1.°; e quindi 6 piani singolari. In ogni piano singolare vi sono* 1 S_3, 2 S_2 *e* 2 S_1. *Ogni S_2 è non coniugato con 1 solo degli altri S_2; un S_3 e un S_2 sono sempre coniugati; ogni S_1 è non coniugato con tre altri S_1, ed è coniugato con un solo S_3*

La superficie focale è di 4.° ord., 8.ª classe, con 14 punti conici, e 6 piani tangenti lungo coniche. I piani bitangenti inviluppano una sviluppabile di 4.ª classe, e i piani stazionari una sviluppabile di 12.ª classe, che la tocca lungo una curva di 12.° ordine.

Per la congruenza (2, 4) *passano 3 complessi tetraedrali.*

I vertici del tetraedro sono i due S_3 e due punti S_2 non coniugati fra loro.

La congruenza fu studiata, oltrechè da Kummer e dagli altri autori sopracitati, anche specialmente da STAHL (*Crelle*, XCVII).

La congruenza (2, 5) *ha tre piani singolari ed è di rango 3.*

Vi è 1 punto S_4, 3 punti S_3, 6 punti S_2, e tre punti S_1; vi sono tre raggi doppi che congiungono S_4 con ciascuno S_3.

Esiste un sol cono singolare di 4.° ordine il quale contiene tutti i punti singolari meno un S_1. Il piano singolare corrispondente a questo S_1 contiene anche gli altri due punti S_1.

La (2, 5) *appartiene ad un solo complesso tetraedrale di cui il tetraedro ha per vertici i punti S_4, S_3.*

La superficie focale è di 4.° ordine, 10.ª classe, con 13 punti conici e 3 piani tangenti singolari. I piani bitangenti inviluppano una sviluppabile di 12.ª classe, e i piani stazionari una sviluppabile di 18.ª classe.

Tale superficie focale NON *è l'unica superficie di 4.° ordine a 13 punti conici.*

La congruenza $(2, 6)_I$ *ha 1 punto* S_5, 6 S_3, 4 S_2, 1 S_1; *un piano singolare; 6 raggi doppi.*

Tutti i punti S_2 e l'unico S_5 stanno nel piano singolare; il rango di $(2, 6)_I$ *è 4.*

La $(2, 6)_I$ *non appartiene ad un complesso tetraedrale.*

La superficie focale è di 4.° ordine, 12.ª classe, con 12 punti doppi; e non è l'unica di tal natura; le sviluppabili bitangenti e dei piani stazionari sono ambedue di 24.ª classe.*

---

* ROHN ha dimostrato che vi sono 4 specie di superficie quartiche con 12 punti doppi (v. *Math. Ann.*, XXIX); vedi anche STURM *cit.*, II, pag. 271.

La congruenza $(2, 6)_{II}$ *ha 4 punti* S_4, 8 S_2, *6 raggi doppi che sono le congiungenti dei 4 punti* S_4. *Essa è di rango 4.*

A differenza dell'altra congruenza di 6.ª classe essa appartiene ad un complesso tetraedrale, e i vertici del tetraedro sono i 4 punti S_4.

I sei raggi della congruenza esistenti in un piano formano sempre un seilatero di Brianchon (v. pag. 128).

La superficie focale ha 12 punti doppi, e non è quella stessa relativa a $(2, 6)_{I}$, *ma un'altra delle quattro trovate da* Rohn, *come sopra si è detto* (v. Sturm, II, pag. 271).

È importante notare che *le congruenze (2, 5), (2, 4), (2, 3), (2, 2) possono tutte considerarsi come casi particolari della* $(2, 6)_{II}$ (Kummer, *op. cit.*, pag. 102; v. Sturm, *cit.* II, pag. 294).

La congruenza (2, 7) ha 1 punto S_6 *e 10 punti* S_3*; 10 raggi doppi che sono le congiungenti l'unico punto* S_6 *coi 10 punti* S_3*; essa è di rango 5.*

La superficie focale è di 14.ª classe, ha 11 punti conici; le sviluppabili bitangenti e dei piani stazionari sono rispettivamente di classi 40 e 30; tale superficie focale non è l'unica con 11 punti conici; ve ne sono altre tre, come ha trovato Rohn *(loc. cit.)*

Le congruenze di 2.° ordine con soli punti singolari furono studiate prima nella già citata Mem. di Kummer (1866); indi si successero i lavori da noi già citati, ai quali aggiungeremo ora Caporali (*Acc. Napoli*, 1879), Bertini (*Acc. Lincei*,

1879-80), LORIA (*Acc. Torino*, 1884-86), MASONI (*Acc. Napoli*, 1883).

Nel lavoro di CAPORALI si contiene una elegante generazione unica per le congruenze (7,2), $(6,2)_1$, (5,2).

§ 13. — CONGRUENZE DI 2.° ORDINE CON LINEE SINGOLARI.

Tali congruenze si distinguono in tre categorie.

I. *La congruenza è formata dalle corde di una curva gobba, la quale non può essere altra che la quartica di 1.ª specie* (v. Cap. X). *Tale congruenza è di 6.ª classe e rango 2.*

La superficie focale è di 8.° ordine ed è formata dai quattro coni quadrici che passano per la quartica.

I quattro vertici dei coni sono, per la congruenza, punti singolari di 2.° grado; la linea singolare è evidentemente la quartica gobba.

II. *La congruenza è formata dalle rette che incontrano due curve, le quali sono le linee singolari; tali curve possono essere:*

A) due coniche con due punti comuni; la congruenza è di 4.ª classe, e rango 2; i punti delle due coniche sono singolari di 2.° grado; però i due punti comuni sono singolari di 3.° grado; i piani delle due coniche sono singolari di 2.° grado, e i due piani tangenti ad ambo le coniche nei loro punti d'incontro sono singolari di 1.° grado.

Considerando il fascio di quadriche passanti per le due coniche, e in tal fascio i due coni non degeneri, i vertici di tali due coni sono anche punti singolari di 2.° grado per la congruenza; la superficie focale (di 4.° ordine) poi risulta di tali due coni.

B) una delle linee singolari è una retta, e l'altra è una curva di n.^mo^ ordine che taglia la retta in $n-2$ *punti. Tale congruenza è di classe* n*, e di rango zero.*

Ogni punto sulla retta singolare è punto singolare di n.^mo^ grado; e ogni punto sulla curva è singolare di 1.° grado. Ogni piano per la retta è singolare di 2.° grado. La superficie focale è formata dall'assieme di tutti i piani tangenti condotti dalla retta alla curva; essa è perciò di ordine

$$m - 2\,(n-2)$$

se m *è la classe della curva gobba.*

La congruenza ha per raggi doppi le bisecanti alla curva, condotte dai punti della retta; queste formano una rigata di ordine $2\,(n-1) - \frac{1}{2}m$.

III. *La congruenza è formata di raggi che tagliano una volta sola una certa linea singolare. Possono darsi allora i seguenti casi:*

A) La linea singolare è una retta. La congruenza ha rango eguale a zero. Essa può essere:

(1) *la congruenza* (2, 2) *di tutte le rette tangenti ad una quadrica e che tagliano una retta;*

(2) *le congruenze* $(2,\, 2\,\mu - 2)$ *delle rette tangenti in un punto ad una superficie di* μ*.^mo^ or-*

dine avente una retta $(\mu - 2)^{pla}$, e che si appoggiano a questa in altro punto;

(3) *le congruenze* (2, *m*) *delle rette che si ottengono stabilendo una corrispondenza* (2, *m*) *fra i punti di una retta e i piani di un fascio per la stessa, e costruendo i fasci di rette col centro in un punto della retta, e il cui piano è quello corrispondente al punto considerato.*

Questa specie (3) non fu considerata da KUMMER.

B) La linea singolare è d' ordine $n > 1$; da ogni suo punto parte un fascio di raggi della congruenza, e inoltre un altro raggio separato. La classe della congruenza è eguale all'ordine della curva singolare, la quale deve essere razionale.

I piani dei fasci di raggi partenti dai punti della curva singolare devono essere tangenti ad un cono quadrico il cui vertice è anche punto singolare per la congruenza.

Il rango della congruenza è $n - 1$.

La congruenza è formata dalle tangenti di un cono quadrico.

Questa specie può dividersi in due altre sottospecie:

(1) *la curva razionale di ordine n sta sul cono quadrico, e passa $n - 2$ volte per il vertice;*

(2) *la curva razionale di ordine n non sta sul cono, è però ad esso propettiva, cioè i suoi punti corrispondono univocamente ai piani tangenti del cono e ciascun punto sta nel piano tangente ad esso corrispondente.*

C) La linea singolare è d'ordine $n > 1$; da ogni suo punto parte un cono quadrico di rette della congruenza e alcun altro raggio. Il rango della congruenza è $n - 2$.

Si distinguono i seguenti casi:

(1) *il cono quadrico si spezza in due piani. La congruenza è di classe* $2n$, *ed è formata di raggi che toccano un cono quadrico e tagliano una curva piana d'ordine* n, *la quale passa* $n-1$ *volte per il vertice del cono.*

Le specie che qui seguono non furono considerate da Kummer; esse furono trovate da Sturm:

(2) *il cono quadrico uscente da un punto della linea singolare non degenera, e questa è una conica. La congruenza risulta delle rette che tagliano questa conica e toccano una superficie di 4.° ordine avente quella conica per curva doppia, e avente ancora 4 altri punti conici. La congruenza è di 4.ª classe;*

(3) *il cono non degenera, e la linea singolare è una cubica piana con un punto doppio; la congruenza è di 6.ª classe; essa è generata nel seguente modo: si prendano nello spazio 4 punti, le cui 6 congiungenti si incontrino sulla cubica stessa; tutti i coni quadrici aventi i vertici su questa e passanti per i quattro punti scelti e per il punto doppio della cubica, generano la congruenza* (2, 6);

(4) *il cono non degenera, e la linea singolare è una cubica storta; la congruenza è di 6.ª classe; essa vien generata nel seguente modo: sulla cubica storta si prendano 4 punti, e per uno* P *di questi, si conduca una corda che tagli la cubica in un quinto punto* Q; *tutti i coni quadrici aventi i vertici sulla cubica, passanti per i 4 punti, e tangenti in* P *alla corda* PQ, *generano la congruenza.*

Le sei congiungenti dei 4 punti sono raggi doppi della congruenza, e i 4 punti sono singolari di 4.° grado.

Delle congruenze di 2.° ordine con linee singolari si occupò prima KUMMER nella Memoria più volte citata del 1866; egli ne incominciò una enumerazione, ma gli sfuggirono alcune specie, e la enumerazione completa fu poi fatta da STURM (*Math. Ann.,* XXXVI) e da SCHUMACHER (*Id.*, XXXVIII e *Diss. cit.*). L'ultimo capitolo del 2.° volume dell'opera di STURM tratta estesamente di quelle congruenze.

Di tali congruenze trattò anche MONTESANO (*Acc. Torino*, 1892; *Rend. Lincei*, 5.ª serie, I; *Rend. Palermo*, VII; *Ist. Lomb.*, 1893), il quale ne studiò la rappresentazione su di un piano.

Sulle congruenze di ordine superiore al 2.°, esistono pochi lavori.

Una congruenza (3,3) fu considerata da ROCCELLA in un lavoro pubblicato a parte intitolato *Sugli enti geometrici dello spazio di rette, ecc.*, (1882), in cui si studia una particolare congruenza generata da tre fasci proiettivi di complessi lineari. Congruenze di 3.° ordine o di ordine superiore furono anche studiate da HIRST (*Proc. London Soc.*, XIV, XVI, XVII; *Rend. Palermo*, I), e da FANO (*Acc. Torino,* 1894-96).

§ 14. — Geometria delle sfere.

Date cinque sfere di equazione (in coordinate cartesiane)

$$s_i \equiv (x-\alpha_i)^2+(y-\beta_i)^2+(z-\gamma_i)^2-R^2{}_i=0 \qquad (i=1,\,2,\ldots 5)$$

l' equazione di ogni altra sfera dello spazio è espressa da

$$s \equiv s_1\,x_1+s_2\,x_2+s_3\,x_3+s_4\,x_4+s_5\,x_5=0.$$

essendo le x delle quantità dipendenti dalla speciale sfera che si considera.

Le cinque quantità x possono assumersi come *coordinate omogenee* di una sfera dello spazio; le cinque sfere date sono le *sfere fondamentali* del sistema di coordinate.

Considerando *la sfera* come elemento di uno spazio, è evidente che *l'assieme di tutte le sfere costituisce uno spazio* LINEARE *a 4 dimensioni*; invece l' assieme delle rette dello spazio forma, come abbiamo già detto, uno spazio *quadratico* a 4 dimensioni.

Questo sistema di coordinate fu adoperato da Loria.

Un altro sistema di coordinate (adoperato da Reye) non omogenee è il seguente: chiamiamo *potenza di un punto rispetto ad una sfera* il prodotto delle distanze del punto da due punti della

sfera allineati col punto stesso *(il qual prodotto è costante al variare della trasversale passante pel punto)*; le tre coordinate α, β, γ del centro della sfera e la potenza p dell' origine delle coordinate cartesiane rispetto alla sfera (la quale potenza ha per espressione $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - R^2 = p$) possono assumersi come coordinate della sfera nello spazio.

Le coordinate x_i hanno la proprietà (analoga a quella delle coordinate omogenee di punti o di piani,) che una loro trasformazione lineare, corrisponde geometricamente a mutare il sistema delle cinque sfere fondamentali, in un sistema di cinque altre le quali abbiano, rispetto alle antiche, per coordinate, i coefficienti delle sostituzioni lineari INVERSE *delle assegnate.*

Inoltre hanno la proprietà che *trasformando lo spazio di sfere con una trasformazione per raggi vettori reciproci, le coordinate delle sfere trasformate rispetto alle cinque sfere fondamentali trasformate, sono le stesse che quelle delle sfere antiche rispetto alle cinque sfere fondamentali* (LORIA).

Ponendo

$$2\,R_{ij} = 2\,R_{ji} = R^2_i + R^2_j - \\ - [(\alpha_i - \alpha_j)^2 + (\beta_i - \beta_j)^2 + (\gamma_i - \gamma_j)^2]$$

la espressione $2\,R_{ij}$ si chiama *invariante* delle due sfere *(i) (j)* fondamentali; *il suo annullarsi è condizione necessaria e sufficiente affinchè le due sfere sieno ortogonali.*

Se tutti gli R_{ij} sono zero, cioè se le cinque sfere sono a due a due ortogonali si ha la relazione $\Sigma \dfrac{1}{R^2_i} = 0$ (DARBOUX, *Sur une classe remarquable des courbes et surf.* Paris, 1873, pag. 135).

Chiamando R il raggio di una sfera qualunque di coordinate x_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ *si ha la formola:*

$$R^2 = \frac{\sum_{ij} R_{ij}\, x_i\, x_j}{\left(\sum_i x_i\right)^2}$$

donde appaiono subito le condizioni da verificarsi fra le x perchè la sfera abbia raggio nullo (si riduca ad un punto, detto *punto-sfera*) ovvero abbia raggio infinito (si riduca ad un piano, detto *piano-sfera*).

Un punto-sfera è da considerarsi come ortogonale ad una sfera se sta su essa; e due punti-sfere sono ortogonali se coincidono.

Indicando con R_{xy} la polare di polo y, della forma

$$R_{xx} = \sum_{ij} R_{ij}\, x_i\, x_j$$

l'invariante simultaneo delle due sfere di coordinate (x) e (y) è eguale a

$$-\frac{R_{xy}}{\Sigma_i\, x_i\, \Sigma_i\, y_i}.$$

La condizione affinchè le due sfere (x) (y) si tocchino è data da

$$R_{yy}\, R_{xx} - (R_{xy})^2 = 0.$$

Come nella geometria della retta, così anche nella Geometria della sfera possiamo definire *i complessi di sfere*, le *congruenze di sfere*, *i loro ordini*, ecc.

Tutte le sfere di un complesso lineare sono ortogonali ad una medesima sfera.

Tutti i punti-sfere dello spazio formano evidentemente un complesso quadratico di equazione

$$\sum_{ij} R_{ij}\, x_i\, x_j = 0;$$

se noi poniamo fra le x una nuova equazione quadratica abbiamo un altro complesso quadratico di sfere; la congruenza di ordine 4 comune ai due complessi sarà formata solo di punti-sfere; è notevole a questo proposito il teorema: *il luogo di questi due* ∞^2 *punti-sfere è una ciclide* (v. Capitolo XII, § 7).

In generale si ha dippiù:

Il luogo dei punti-sfere di un complesso d'ordine n è una superficie d'ordine 2 n avente il cerchio immaginario all'infinito per linea n^{pla}. *Il luogo dei punti-sfere d'una congruenza d'ordine n è una curva d'ordine 2 n.*

Da questo punto di vista il Loria studiò le *ciclidi*, e ne fece la classificazione come abbiamo detto a suo luogo (Cap. XII).

Le prime idee di Geometria delle sfere si devono a Lie (*Compt. Rend.*, 1871; *Math. Ann.*, V); indi se ne occuparono Reye (*Synthetische Geom. der Kugeln,* ecc. Leipzig, 1879; *Crelle*, IC), Loria (*Mem. Torino*, 1884; *Atti Torino*, 1885).

Il lavoro di quest'ultimo Autore contiene una trattazione sistematica del soggetto, e di esso ci siamo serviti per le poche indicazioni sopra date.

Di relazioni metriche riguardanti le sfere dello spazio si occuparono, FROBENIUS (*Crelle*, LXXIX), DARBOUX (*cit.* e *Annales Ec. norm. sup.*, 1872, v, anche SALMON-FIEDLER, II), ecc.

Per la determinazione del *punto-sfera* passante per tre punti dati, e per la relazione di questo problema con quello di costruire i cerchi che toccano tre cerchi dati, v. CASEY (*Trans. Irish. Acad.*, 1866) e CAYLEY (*Ann. di mat.*, I).

CAPITOLO XV.

Geometria numerativa.

§ 1. — Generalità.

Principio della conservazione del numero.

La Geometria numerativa *(Abzählende Geometrie)* si occupa dei problemi nei quali si vuol cercare *quante determinate forme geometriche esistono le quali soddisfino a date condizioni.* P. es. quante coniche di un fascio sono tangenti ad una retta? Quante curve di 4.° ordine con un punto triplo, passano per dieci dati punti? ecc. ecc.

Stabilita la definizione di una forma geometrica, supponiamo che esistano ∞^c individui che corrispondono a quella definizione, supponiamo cioè che nella rappresentazione analitica di quella forma, restino indeterminate c costanti; allora il numero c si suol chiamare il *numero delle costanti* della forma.

1. *Per un punto nel piano è* $c=2$; *e nello spazio è* $c=3$.

2. *Per un piano dello spazio è* $c=3$.

3. *Per una retta nel piano è* $c = 2$; *e nello spazio è* $c = 4$.

4. *Per un triangolo nello spazio è* $c = 9$, *e per un triangolo nel piano è* $c = 6$.

5. *Per un poligono piano di n lati nello spazio è*

$$c = 2n + 3.$$

6. *Per un poliedro di k lati è* $c = k + 6$. [Hoppe (*Grunert's Archiv.*, LV; Schubert (*Id.*, LXIII)].

7. *Per una curva (situata in un dato piano) di* n^{mo} *ordine,* ν^{ma} *classe, con d punti doppi, r cuspidi,* δ *tangenti doppie,* ι *flessi, è*

$$c = 3 + \frac{1}{2} n (n + 3) - d - 2r =$$

$$= 3 + \frac{1}{2} \nu (\nu + 3) - \delta - 2\iota.$$

8. *Per una superficie generale di* n^{mo} *ordine è*

$$c = \frac{1}{6} (n + 1)(n + 2)(n + 3) - 1.$$

9. *Per un complesso di rette generale di* n^{mo} *ordine è*

$$c = \frac{1}{12} (n + 1)(n + 2)^2 (n + 3) - 1$$

[Lüroth, *Crelle*, LXVII; Voss, *Math. Ann.*, IX].

Se y esprime una condizione a cui si sottopone una forma geometrica di data definizione, e z un'altra condizione, la condizione risultante dall'assieme delle due, si rappresenta con $y\,z$ e si chiamerà *prodotto* delle due condizioni.

P. es. se g indica la condizione perchè una retta tagli una determinata retta, e g_p la condizione perchè una retta passi per un punto, $g\,g_p$ rappresenterà la condizione perchè una retta passi per un punto e si appoggi ad una retta data; g^2 la condizione perchè una retta si appoggi a due rette date, ecc.

Una condizione si dice essere di *dimensione* α per una determinata forma geometrica, se essa conduce ad α equazioni fra le c costanti della forma; cioè se vi sono $\infty^{c-\alpha}$ forme le quali soddisfanno alla data condizione. L'assieme di tutte le $\infty^{c-\alpha}$ forme soddisfacenti alla condizione di dimensione α, si dirà *un sistema di specie* $c-\alpha$; così una curva è un sistema di 1.ª specie; un complesso di raggi è un sistema di 3.ª specie; una superficie rigata è un sistema di raggi di 1.ª specie, ecc.

La dimensione di una condizione prodotto di più altre è eguale alla somma delle dimensioni delle componenti.

Sia c il numero delle costanti di una forma geometrica, e sia questa sottoposta a condizioni di moltiplicità complessiva eguale a c; allora esisterà in generale un *numero finito* N di individui di quella forma soddisfacenti a quelle condizioni.

Col mutare la posizione reciproca degli elementi della forma, o collo specializzarli convenientemente, il numero N *o resta inalterato, o diventa infinito.* Questo principio si chiama *il principio della conservazione del numero* (Schubert). Interpretato algebricamente esso viene a dire che un'equazione, in qualunque modo si mutino i valori dei suoi

coefficienti, o ha sempre lo stesso numero di radici ovvero diventa un'identità, e quindi il numero delle sue radici diventa infinito.

Questo principio è molto utile, perchè specializzando la posizione degli elementi di una forma si può semplificare notevolmente il calcolo del numero degli individui che soddisfanno a date condizioni. Un esempio varrà a spiegarne l'applicazione:

si voglia sapere quante rette si appoggiano a 4 rette date.

Si specializzi la posizione di queste quattro rette, p. es. si supponga che due di esse passino per un punto P, e due altre anche passino per un punto P'; allora è evidente che vi sono due rette che si appoggiano alle quattro, e sono: la congiungente i due punti P, P', e la retta intersezione dei due piani in cui sono situate le due date coppie di rette. In forza del principio sopra enunciato possiamo dunque affermare che *esistono sempre due rette che si appoggiano a quattro rette date.* È chiaro che specializzando in altro modo la posizione delle quattro rette, (supponendo p. es. che tre delle rette stieno in un piano, ovvero che tre passino per un punto, ecc.) il numero richiesto può diventare infinito.

Di questo principio, da ammettersi come postulato, le applicazioni sono svariate; esso fu enunciato esplicitamente da SCHUBERT, e può enunciarsi in quattro modi diversi che possono ritenersi come enunciati di corollari del principio stesso (v. a pag. 12, e pag. 334 il libro di SCHUBERT più sotto citato).

§ 2. — Calcolo simbolico delle condizioni. Formole di incidenza e coincidenza. Teoremi sui contatti.

Per il soggetto che ci occupa è interessante la introduzione del seguente calcolo simbolico.

Data una forma il cui numero delle costanti è c, se noi l'assoggettiamo ad una condizione ν di dimensione c, abbiamo un numero finito di individui che vi soddisfanno; indichiamo tal numero colla stessa lettera ν che rappresenta la condizione. Allora fra i simboli che rappresentano le varie condizioni che si possono imporre ad una forma perchè questa sia determinata in un numero *finito* di modi, si potranno stabilire delle relazioni o identità fondamentali.

P. es. sia p il simbolo che rappresenta la condizione perchè un punto stia in un piano, e P il simbolo che rappresenta la condizione perchè un punto sia fissato in uno special luogo; allora è evidente che possiamo simbolicamente scrivere.

$$p^3 = P$$

perchè ambo i termini hanno per valore numerico 1.

In questa maniera non si potrebbe che stabilire relazioni solo fra condizioni le quali sieno di dimensione c; però col seguente artifizio possiamo assegnare un significato anche a relazioni fra condizioni di dimensione qualunque $\alpha < c$. Giacchè si

abbiano varie condizioni di dimensione α e sieno $\nu, \nu', \nu'' \ldots$ e sia y una qualunque condizione di dimensione $c - \alpha$.

Moltiplicando $\nu, \nu', \nu'', \ldots$ per y si hanno tutte condizioni di dimensione c. Ora intenderemo sussistere fra le ν una relazione, quando moltiplicando ogni termine della relazione per y (qualunque) la relazione risultante (che è una relazione fra condizioni di dimensioni c) è effettivamente sussistente secondo il sopraindicato concetto.

P. es. indicando con p_g la condizione perchè un punto stia in una retta, si ha evidentemente

$$p^2 = p_g\,.$$

Infatti moltiplicando p. es. per p si ha $p^3 = p\,p_g$, relazione sussistente perchè ambo i termini di quell'equazione hanno per valore 1.

In generale per le equazioni simboliche che così vengono ad ottenersi, valgono tutte le ordinarie regole aritmetiche riguardanti la somma, la sottrazione e la moltiplicazione.

Sono relazioni fondamentali le seguenti:

$$p^2 = p_g$$
$$p^3 = p\,p_g = P$$

p, p_g, P *sono i simboli che rappresentano le condizioni perchè un punto stia in un piano, o in una retta, o sia stabilito.*

$$e^2 = e_g \qquad e^3 = e\, e_g = E$$

e, e_g, E sono i simboli che rappresentano le condizioni perchè un piano passi per un punto, o per una retta, e sia fissato. *

$$g^2 = g_p + g_e \qquad g\, g_p = g_s = g\, g_e \qquad g\, g_s = G = \frac{1}{2} g^4 \qquad G = g^2_e = g^2_p$$

g, g_e, g_p, g_s, G sono i simboli che rappresentano le condizioni perchè una retta tagli una retta, o stia in un piano, o passi per un punto, o appartenga ad un fascio di raggi, o sia determinata.

Si dicono *incidenti* punto e retta, piano e retta, punto e piano se reciprocamente *si appartengono*, cioè se il punto sta sulla retta, la retta sta nel piano, o il punto sta nel piano; si dicono *incidenti* due rette se si incontrano.

Chiameremo *formole di incidenza* tutte le equazioni fra le condizioni che rappresentano queste quattro incidenze.

---

* Non ho creduto, a scanso di confusioni, fare mutamenti a questi simboli che sono adoperati nell'opera di SCHUBERT più sotto citata, e di altri autori tedeschi, per quanto l'origine di quei simboli sia dovuta alle iniziali delle parole tedesche *Gerade*, *Ebene*, *Strahl*, ecc., le quali in lingua italiana hanno diversa lettera iniziale.

Esse sono (i simboli qui adoperati hanno gli stessi significati di quelli di sopra) .

$$\left.\begin{array}{l} p\,g = p_g + g = p^2 + g_e \\ p\,g_p = p^3 + g_s \\ p\,g_s = p^2\,g_p = G + p^3\,g = G + p^2\,g_e \end{array}\right\}$$ *la retta g e il punto p si appartengono.*

$$\left.\begin{array}{l} e\,g = g_p + e_g = g_p + e^2 \\ e\,g_e = g_s + e^3 \\ e^2\,g_e = e\,g_s = G + e^3\,g = G + e^2\,g_p \end{array}\right\}$$ *il piano e e la retta g si appartengono.*

$$\left.\begin{array}{l} p^3 - p^2\,e + p\,e^2 - e^3 = 0 \\ p^3\,e - p^2\,e^2 + p\,e^3 = 0 \end{array}\right\}$$ *il punto d e il piano e si appartengono.*

$$\left.\begin{array}{l} G - g_s\,h + g_e\,h_p + g_p\,h_e - g\,h_s + H = 0 \\ G\,h - g_s\,(h_p + h_e) + (g_p + g_e)\,h_s - g\,H = 0 \\ G\,h_e - g_s\,h_s + g_p\,H = 0 \\ G\,h_p - g_s\,h_s + g_e\,H = 0 \end{array}\right\}$$ *il simbolo h è, come g, quello di una retta, e le due rette g e h si tagliano.*

Le applicazioni di queste formole sono molteplici; ma noi non possiamo fermarci su di esse, e rimandiamo all'opera di SCHUBERT *(cit.)*. Ci limiteremo a mostrare qualche esempio.

Consideriamo il sistema semplicemente infinito di tutte le *rette* tangenti coi rispettivi *punti* di contatto di una curva storta; considerando poi un sistema semplicemente infinito di curve storte, si ha nell'assieme un sistema *doppiamente* infinito (di 2.ª specie) di rette e punti appartenentisi. Per tale sistema il simbolo p^2 rappresenterà la condizione perchè uno di quei punti stia contemporaneamente in due piani dati, cioè in una retta data; quindi esso rappresenta anche il numero delle curve del sistema che sono tagliate da una data retta; così il simbolo g_e rappresenterà il numero delle *tangenti* del sistema che giacciono in un piano dato, cioè anche il numero delle curve del sistema che sono tangenti ad un dato piano, e $p\,g$ rappresenterà il numero dei punti del sistema che, essendo in un dato piano, corrispondono a rette che tagliano un'altra retta data; si ha dunque dalla formola $p\,g = p^2 + g_e$ il teorema:

Sia dato un sistema semplicemente infinito di curve storte; se si somma al numero delle curve che tagliano una retta data, il numero di quelle che sono tangenti ad un piano dato, si ha il numero delle curve del sistema le quali tagliano un piano in modo che le tangenti nei punti d' incontro incontrano una retta assegnata; ovvero si ha il grado della curva luogo dei punti di contatto di tutte le tangenti alle curve del sistema, le quali tangenti incontrino una assegnata retta. (ZEUTHEN, *Compt. Rend.*, 1872.)

Sia n l'ordine di una curva piana, ν la condizione perchè essa tagli una data retta dello spazio, μ la condizione perchè il suo piano passi per un punto dato, P la condizione perchè essa passi per un punto; considerando un sistema *doppiamente* infinito di tali curve, si ha un sistema triplamente infinito di punti, e i piani delle curve formano invece un sistema doppiamente infinito di piani.

La formola d'incidenza

$$p^3 - p^2 e + p e^2 - e^3 = 0$$

diventa

$$P = \mu \nu - n \mu^2$$

perchè

$$p^3 = P, \quad e = \mu, \quad p^2 = \nu,$$

e inoltre

$$e^3 = \mu^3 = 0,$$

in un sistema *doppiamente* infinito di curve, non potendosi in generale soddisfare la condizione *(tripla)* che una curva stia in un piano arbitrario assegnato, cioè che il piano della curva passi per *tre* punti dati.

Ora la soprascritta relazione esprime la condizione P mediante le altre ν, μ; quindi se abbiamo una tabella donde possiamo ricavare i valori di $\mu\nu$, μ^2, otteniamo il valore di P. Così p. es. consideriamo un sistema doppiamente infinito di *coniche* nello spazio; propriamente il sistema di tutte le coniche tangenti a tre piani dati e seganti tre rette date; chiamando ρ la condizione perchè una conica dello spazio tocchi un piano, la condizione cui soddisfanno tutte tali coniche sarà espressa da

$\nu^3 \rho^3$. Moltiplicando dunque ambo i membri della precedente relazione per $\nu^3 \rho^3$ si ha (essendo nel nostro caso $n = 2$)

$$P \nu^3 \rho^3 = \mu \nu^4 \rho^3 - 2 \mu^2 \nu^3 \rho^3.$$

Ora dalle tabelle che riportiamo più sotto al § 4 ricaviamo

$$\mu \nu^4 \rho^3 = 72, \qquad \mu^2 \nu^3 \rho^3 = 24$$

dunque:

$$P \nu^3 \rho^3 = 24$$

cioè nel nostro sistema di coniche ve ne sono 24 che passano per un punto.

Si dicono *coincidenti* due elementi (due punti, due rette, due piani) i quali sono infinitamente vicini.

Le formole relative si dicono *formole di coincidenza*. Una di queste è quella detta *principio di corrispondenza di* Chasles (v. Cap. I, § 2).

Supponiamo assegnato un sistema *semplicemente* infinito di *coppie* di punti, tali che in esso vi sieno p coppie che abbiano comune il primo punto, e q coppie che abbiano comune il secondo punto; rappresenti g la retta che congiunge i due punti di una coppia, e quindi si rappresenti con g il numero di quelle congiungenti coppie di punti che sono incontrate da una retta *arbitraria* dello spazio; *chiamando* ε *il numero delle coincidenze, cioè il numero delle volte in cui i due punti di una coppia coincidono, si ha la formola*

$$\varepsilon = p + q - g$$

Se la congiungente i due punti di una coppia è in posizione fissa, allora $g=0$, e si ha

$$\varepsilon = p + q$$

il che corrisponde alla formola di corrispondenza di CHASLES.

Da questa formola se ne ricavano varie altre p. es. le due seguenti

$$\varepsilon g_p = p^3 + q^3 + g_s$$
$$\varepsilon p = p q - g_e$$

le quali si interpretano nel seguente modo:

Dato un sistema tre volte infinito di coppie di punti, la somma del numero di quelle che hanno il primo elemento fisso, del numero di quelle che hanno fisso il secondo elemento, e del grado del complesso di rette costituito dalle rette che congiungono i punti corrispondenti di una coppia, è uguale al numero delle volte in cui due punti corrispondenti si avvicinano indefinitivamente secondo una direzione che passi per un punto fisso arbitrario.

Per un sistema doppiamente infinito di coppie di punti, la differenza fra il numero delle coppie i cui punti stieno rispettivamente in due prefissati piani, e il numero di quelle di cui la retta che congiunge i due punti sta in un prefissato piano, è eguale all'ordine della curva storta luogo delle coincidenze.

Si possono poi ricavare le formole per l'estensione al piano e allo spazio del principio di corrispondenza di CHASLES, estensioni date da SALMON (*Geom. of three dim.*, 1865, pag. 511), da ZEUTHEN (*Compt. Rend.*, 1874) e SCHUBERT (*Math.*

Ann., X; vedi anche *Abzähl. Geom.,* Leipzig, 1879, pag. 45).

Da questi stessi principi si ricavano i seguenti importanti teoremi.

Si abbia un sistema semplicemente infinito di curve piane, e un' altra curva di ordine n e di classe m. Se ν, ρ *sono le cosiddette due* CARATTERISTICHE *del sistema di curve piane cioè esprimono rispettivamente quante curve del sistema passano per un punto, e quante curve toccano una retta, vi saranno*

$$n\rho + m\nu$$

curve del sistema tangenti alla curva data.

Similmente: *in un sistema semplicemente infinito di curve storte vi sono*

$$n\rho + m\nu$$

curve le quali toccano una superficie di ordine n e classe m, indicando con ρ *il numero delle curve che toccano un piano, e con* ν *il numero di quelle che tagliano una retta.*

I punti di contatto di due sistemi semplicemente infiniti di curve piane di caratteristiche rispettivamente $\nu_1\,\rho_1$, $\nu_2\,\rho_2$ *formano una curva di ordine*

$$\nu_1\,\rho_2 + \nu_1\,\rho_2 + \nu_1\,\nu_2$$

e le tangenti in tali punti di contatto inviluppano una curva di classe

$$\nu_1\,\rho_2 + \rho_1\,\nu_2 + \rho_1\,\rho_2.$$

Una generalizzazione del primo di questi teoremi è il seguente:

Sia stabilita nel piano una corrispondenza fra punti e rette, tale che ad ogni retta corrispondano ρ *punti su di essa, e ad ogni punto corrispondano* ν *rette per esso; avverrà*

$$n\rho + m\nu$$

volte che una di tali rette è tangente, in uno dei punti ad essa corrispondenti, ad una curva piana di $n.^{mo}$ *ordine e* $m.^{ma}$ *classe.*

Questo teorema può servire per ricavare il principio di corrispondenza di Brill-Cayley (vedi Cap. VI, § 4) che è l'estensione, alle corrispondenze sopra curve di genere qualunque, del principio di Chasles per le corrispondenze sulla retta (v. il § 18 dell'op. di Schubert, più sotto cit.).

A mostrare la fecondità di questi teoremi, e anche il loro modo di applicazione sviluppiamo il seguente esempio:

Vogliamo ricercare quante coniche del piano sono tangenti a cinque date. Indicando con S la condizione perchè una conica di un sistema sia tangente ad *un'altra* fissa, e μ la condizione perchè il suo piano passi per un punto, la condizione perchè una conica del sistema *piano* sia tangente a cinque coniche sarà data da

$$\mu^3 S^5.$$

Intanto per un teorema precedente

$$S = n\rho + m\nu = 2\rho + 2\nu$$

(perchè nel nostro caso $m = n = 2$), dunque la condizione sarà

$$\mu^3 S^5 = \mu^3 (2\rho + 2\nu)^5 = 2^5 \mu^3 (\rho^5 + 5\rho^4\nu + \\ + 10\rho^3\nu^2 + 10\rho^2\nu^3 + 5\rho\nu^4 + \rho^5).$$

Ma dalle tabelle contenute al § 4 ricaviamo i valori per $\mu^3 \rho^5$, $\mu^3 \rho^4 \nu$, ecc. e quindi infine abbiamo:

$$\mu^3 S^5 = 2^5 . 102 = 3264.$$

§ 3. — TEORIA DELLE CARATTERISTICHE.

Si abbia in un piano un sistema semplicemente infinito di coniche; sia z una condizione di 1.ª dimensione (semplice), e rappresentino ν e ρ rispett. le condizioni perchè una conica del sistema passi per un punto o tocchi una retta.

La teoria delle caratteristiche prende il punto di partenza dalla seguente osservazione di CHASLES, il quale la dette come un teorema generale, mentre poi invece, dopo alcune considerazioni di HALPHEN, si è visto che il teorema non era valevole per tutti i casi.

La condizione z in molti casi si esprimerà linearmente mediante ν e ρ colla formola

$$z = \alpha \nu + \beta \rho$$

dove α, β sono numeri dipendenti SOLO *dalla condizione z. I numeri ν, ρ si chiamano* CARATTERISTICHE *del sistema di coniche.*

Questo teorema, che costituisce un'importante formola di Geometria numerativa delle coniche, fu trovato sperimentalmente da CHASLES (*Compt. Rend.*, 1864) e da lui enunciato senza dimostrazione, e fatto seguire da varie applicazioni.

Delle dimostrazioni ne furono date da CLEBSCH (*Math. Ann.*, VI), da HALPHEN (*Bull. Soc. mat.*, I),

da SCHUBERT e HURWITZ (*Gött. Nach.*, 1876; v. anche *Abzähl. Geom.*, § 38), BRILL (*Math. Ann.*, X), ecc.

Ma il teorema di CHASLES non è vero per ogni condizioni z; lo fece vedere HALPHEN (*Compt. Rend.*, LXXXIII, 537, e 886; *Proc. Lond. math. Soc.*, IX, X; *Math. Ann.*, XV; *Journ. de l'Ec. pol.*, XLV) il quale giunse al risultato: *Perchè sussista il teorema di* CHASLES *cioè che z si esprima colla formola*

$$z = \alpha\nu + \beta\rho$$

(α, β *non dipendendo che da z), è necessario e sufficiente che il numero delle coniche soddisfacenti a z, e aventi un contatto di 3.° ordine con una curva data, sia* $\alpha + \beta$.

Una conseguenza del teorema di CHASLES è un corollario di un teorema da noi già citato nel § 2 sul numero di curve tangenti a date curve.

Se si vuole il numero delle coniche di un sistema, tangenti ad una curva di ordine n e classe m, basta fare nella formola di CHASLES,

$$\alpha = m, \ \beta = n.$$

Si può proporsi il problema più generale di quello di CHASLES; cioè:

Dato un sistema di forme qualunque (non di coniche), non solo semplicemente infinito, ma k volte infinito, esiste un numero FINITO di condizioni k^{ple} in modo che ogni altra condizione k^{pla} z si esprima linearmente per quelle e con coefficienti dipendenti solo dalla condizione z? Queste condizioni k^{ple} *in numero finito* si possono allora chiamare le *caratteristiche* del sistema.

Per questo problema i tentativi sono stati molti; lo stesso CHASLES opinò una volta che le due caratteristiche ν, ρ potessero valere non solo per le coniche, ma per ogni curva piana. L'HALPHEN estese le considerazioni di questo genere anche alle coniche dello spazio e alle quadriche (*Bull. Soc. math.*, II); CREMONA osservò che per un sistema doppiamente infinito di coniche si possono stabilire *tre* caratteristiche, cioè il numero delle coniche passanti per due punti, il numero di quelle passanti per un punto e tangenti ad una retta, e il numero di quelle tangenti a due rette (*Compt. Rend.*, LXIX, 776); SCHUBERT dedicò tutto un capitolo del suo citato trattato, a questo problema, e cercò di risolverlo, per alcuni semplici sistemi di forme.

I primi lavori sulla teoria delle caratteristiche furono quelli numerosissimi di CHASLES (*Compt. Rend.*, 1864; specialmente 27 giugno 1864), alcuni dei quali dettero luogo ad una polemica col DE JONQUIÈRES; la lista delle pubblicazioni che vi si riferiscono si trova in LORIA (*Teorie geom.* Torino, 1896, pag. 263-264).

Altri lavori sono quelli di CAYLEY (principalmente *Phil. Trans.*, 1868), SALMON (v. il trattato sulle curve piane), CREMONA (*Compt. Rend.*, 1864, e vedi anche: *Introd. ad una teoria geom. delle curve piane*, ecc.), ZEUTHEN (v. p. es. *Bull. des sciences*, VII). Una breve esposizione si trova nella *Geom.* di CLEBSCH-LINDEMANN, e molte indicazioni bibliografiche (limitate però sino al 1872) si trovano in PAINVIN (*Bull. des sciences math.*, III).

Per le più recenti si può vedere Loria *(sopra-cit.)* dove c'è anche la lunga lista delle altre note di Chasles (*Compt. Rend.*, 1871-77) relative alle numerose applicazioni, alla Geometria numerativa, del principio di corrispondenza che prende nome da lui. Per la storia di questo principio, così intimamente legato, per sua natura, alle teorie di Geometria numerativa, vedi poi una nota storica di Segre (*Bibl. math.*, 1892).

La Geometria numerativa come corpo di dottrina, si può dire che nacque colla teoria delle caratteristiche di Chasles.

Fu Halphen che, partendo da questa, cominciò a stabilire un calcolo simbolico delle condizioni, e in ciò fu continuato principalmente da Schubert il quale ne stabilì sistematicamente i fondamenti nel lavoro *Beiträge zur abzählenden Geom.* (*Math. Ann.*, X), e in altri lavori che succedettero a questo (*Id.*, XI, XII, ecc.).

Molti risultati e determinazioni riguardanti la Geometria numerativa erano state già fatte da vari Autori specialmente per via geometrica; per es. Steiner (*Crelle*, XXXII, XXXVII, XLV, LV), Bischoff (*Idem*, LVI), De Jonquières (*Journ. de Liouville*, VI, 1861; X, 1865), dei quali alcuni risultati sono però erronei; ma lo scopo degli autori che si sono poi occupati di Geometria numerativa è stato precipuamente quello di ridurre siffatte determinazioni a delle leggi fisse, e di stabilire un calcolo per esse, in modo da ridurre questa parte della Geometria, un insieme sistematico.

Un libro importante in cui si trovano raccolti e spiegati tutti i metodi e i risultati di Geometria numerativa, è quello di SCHUBERT (*Kalkül der abzählenden Geometrie*, Leipzig, 1879) del quale noi ci siamo moltissimo serviti nella redazione di questo capitolo.

Ricerche più moderne sono specialmente quelle di SCHUBERT stesso (*Math. Ann.*, XXVI, XXXVIII, XLV; *Acta math.*, VIII; *Hamburger Mitth.*, I, II, III, ecc.) e di PIERI (*Rend. Palermo,* V, *Istituto Lomb.*, 1893-95).

§ 4. — METODO PER LA RICERCA DEI NUMERI CARATTERISTICI PER UN SISTEMA DI FORME E RIASSUNTO DI ALCUNI NOTEVOLI RISULTATI DI GEOMETRIA NUMERATIVA.

Dalle considerazioni fatte precedentemente risulta che col calcolo simbolico delle condizioni, si può ridurre il calcolo di una condizione a quello di altre; la teoria delle caratteristiche ha p. es. precisamente lo scopo di vedere se esistono certe condizioni elementari mediante cui si possano esprimere tutte le altre.

Si presenta quindi il problema della ricerca dei numeri che stanno a rappresentare quelle tali condizioni elementari o caratteristiche, mediante cui possibilmente le altre o alcune delle altre possano esprimersi. Tale ricerca si fa col metodo introdotto da CHASLES, e poi largamente applicato e sviluppato da ZEUTHEN, SCHUBERT e altri.

Si considerano speciali degenerazioni invarian-

tive della forma data, si cercano le relazioni che legano le condizioni, perchè la forma degeneri in quel dato modo, colle altre condizioni elementari (passare per un punto, toccare un piano o una retta), indi si ricavano i numeri caratteristici per le forme degenerate, e mediante le relazioni trovate, si ricavano infine quelli per le forme generali.

Un esempio basterà a rischiarare le nostre idee sull'applicazione di questo metodo.

La forma data sia la conica. Si considerino due degenerazioni invariantive della stessa, cioè:

η — una conica i cui punti formano una retta doppia, e le cui tangenti formano due distinti fasci di raggi aventi il centro in due punti di tale retta;

δ — una conica i cui punti formano due rette distinte, e le cui tangenti formano due coincidenti fasci di raggi, il cui centro è nel punto di incontro delle due rette.

Indicando con η, δ rispett. le condizioni perchè una conica degeneri in tali modi, e con μ, ν, ρ le condizioni perchè il piano di una conica passi per un punto, perchè la conica tagli una retta, e perchè essa tocchi un piano dato, col principio delle coincidenze si trovano le relazioni

$$2\nu - \rho - 2\mu = \eta$$

$$2\rho - \nu = \delta$$

donde

$$\nu = \frac{2}{3}\eta + \frac{1}{3}\delta + \frac{1}{3}\mu$$

$$\rho = \frac{1}{3}\eta + \frac{2}{3}\delta + \frac{2}{3}\mu.$$

Si voglia allora ricercare il numero

$$\mu^3 \nu \rho^4$$

cioè il numero delle coniche di un piano che passano per un punto (cioè tagliano una retta dello spazio), e toccano quattro rette (cioè toccano quattro piani dello spazio); dalle precedenti formole si ha:

$$\mu^3 \nu \rho^4 = \frac{2}{3} \eta \, \mu^3 \rho^4 + \frac{1}{3} \delta \, \mu^3 \rho^4 + \frac{1}{3} \mu^4 \rho^4.$$

Ora il termine contenente per fattore μ^4 è zero perchè non può un piano farsi passare per quattro punti arbitrari dello spazio; e quindi supposti conosciuti gli altri due primi termini del secondo membro, si ricava il valore del primo membro. Ora in un piano (μ^3) quante coniche η vi sono che hanno per tangenti quattro rette date? evidentemente sono 3; e così il numero delle coniche δ che toccano quattro rette date è zero; dunque

$$\mu^3 \nu \rho^4 = 2.$$

Per dare un'idea dei risultati che si ottengono coi metodi e coi principi sviluppati finora, sarà utile raccogliere qui alcuni dei principali di essi, anche per l'importanza che essi possono avere in sè stessi, indipendentemente dai metodi coi quali sono ritrovati.

Raccoglieremo i risultati più notevoli contenuti nel 4.° cap. dell'opera citata di Schubert.

1. *Vi sono due rette che si appoggiano a quattro rette date.*

2. *Vi sono tre poligoni storti di n lati di cui gli n vertici stanno in dati piani, e gli n lati passano per dati punti.*

3. *Date nello spazio cinque coppie di rette, si possono in 20 modi diversi costruire cinque raggi situati in un piano e convergenti in un punto, e in modo che ciascuno di essi si appoggi alle due rette di una delle coppie date.*

4. *Per una conica, rappresenti* μ *la condizione perchè il suo piano passi per un punto dato;* ν *la condizione perchè essa tagli una data retta,* ρ *la condizione perchè essa tocchi un dato piano. Adoperando allora le notazioni dei paragrafi precedenti si ha la seguente tabella pel numero di* CONICHE DELLO SPAZIO *soddisfacenti ad* OTTO *condizioni.* *

$\mu^3 \nu^5 = 1$	$\mu^2 \nu^6 = 8$	$\mu \nu^7 = 34$	$\nu^8 = 92$
$\mu^3 \nu^4 \rho = 2$	$\mu^2 \nu^5 \rho = 14$	$\mu \nu^6 \rho = 52$	$\nu^7 \rho = 116$
$\mu^3 \nu^3 \rho^2 = 4$	$\mu^2 \nu^4 \rho^2 = 24$	$\mu \nu^5 \rho^2 = 76$	$\nu^6 \rho^2 = 128$
$\mu^3 \nu^2 \rho^3 = 4$	$\mu^2 \nu^3 \rho^3 = 24$	$\mu \nu^4 \rho^3 = 72$	$\nu^5 \rho^3 = 104$
$\mu^3 \nu \rho^4 = 2$	$\mu^2 \nu^2 \rho^4 = 16$	$\mu \nu^3 \rho^4 = 48$	$\nu^4 \rho^4 = 64$
$\mu^3 \rho^5 = 1$	$\mu^2 \nu \rho^5 = 8$	$\mu \nu^2 \rho^5 = 24$	$\nu^3 \rho^5 = 32$
	$\mu^2 \rho^6 = 4$	$\mu \nu \rho^6 = 12$	$\nu^2 \rho^6 = 16$
		$\mu \rho^7 = 6$	$\nu \rho^7 = 8$
			$\rho^8 = 4.$

* A maggiore chiarezza di questa tavola spieghiamo ancora il significato dei simboli.

Il simbolo $\mu^3 \nu^5$ significa che il piano della conica deve passare per tre punti dati (quindi è dato), e la conica deve tagliare cinque rette date (nello spazio); il simbolo $\mu^3 \nu^4 \rho$

5. *Vi sono, in un piano dato, 3264 coniche che toccano cinque altre coniche date.*

Il computo di tal numero fu fatto erroneamente da STEINER che gli assegnò il valore 6^5. Il numero esatto fu trovato per la prima volta da CHASLES e TH. BERENT.

6. *Si rappresenti con* μ *la condizione che una quadrica passi per un punto dato; con* ρ *che essa tocchi un piano, e con* ν *che essa tocchi una retta; allora si ha la seguente tabella pel numero delle* QUADRICHE *dello spazio soddisfacenti a* NOVE *condizioni:*

---

significa che la conica deve stare in un piano dato, deve tagliare quattro rette date (quindi passare per quattro punti dati del suo piano) e toccare un piano dato, (quindi toccare una retta data del suo piano).

$\mu^9 = \rho^9 = 1$	$\nu^2\mu^7 = \nu^2\rho^7 = 4$	$\nu^4\mu^3\rho^2 = \nu^4\mu^2\rho^3 = 112$
$\mu^8\rho = \mu\rho^8 = 3$	$\nu^2\mu^6\rho = \nu^2\mu\rho^6 = 12$	$\nu^5\mu^4 = \nu^5\rho^4 = 32$
$\mu^7\rho^2 = \mu^2\rho^7 = 9$	$\nu^2\mu^5\rho^2 = \nu^2\mu^2\rho^5 = 36$	$\nu^5\mu^3\rho = \nu^5\mu\rho^3 = 80$
$\mu^6\rho^3 = \mu^3\rho^6 = 17$	$\nu^2\mu^4\rho^3 = \nu^2\mu^3\rho^4 = 68$	$\nu^5\mu^2\rho^2 = 128$
$\mu^5\rho^4 = \mu^4\rho^5 = 21$	$\nu^3\mu^6 = \nu^3\rho^6 = 8$	$\nu^6\mu^3 = \nu^6\rho^3 = 56$
$\nu\mu^8 = \nu\rho^8 = 2$	$\nu^3\mu^5\rho = \nu^3\mu\rho^5 = 24$	$\nu^6\mu^2\rho = \nu^6\mu\rho^2 = 104$
$\nu\mu^7\rho = \nu\mu\rho^7 = 6$	$\nu^3\mu^4\rho^2 = \nu^3\mu^2\rho^4 = 72$	$\nu^7\mu^2 = \nu^7\rho^2 = 80$
$\nu\mu^6\rho^2 = \nu\mu^2\rho^6 = 18$	$\nu^3\mu^3\rho^3 = 104$	$\nu^7\mu\rho = 104$
$\nu\mu^5\rho^3 = \nu\mu^3\rho^5 = 34$	$\nu^4\mu^5 = \nu^4\rho^5 = 16$	$\nu^8\mu = \nu^8\rho = 92$
$\nu\mu^4\rho^4 = 42$	$\nu^4\mu^4\rho = \nu^4\mu\rho^4 = 48$	$\nu^9 = 92$

Queste tavole servono anche per potere ricavare i numeri che corrispondono ad altre condizioni per le coniche o le quadriche, e ciò si fa esprimendo per mezzo delle equazioni simboliche fra le condizioni, le nuove condizioni mediante le μ, ν, ρ, e indi servendosi di queste tavole col sostituire ad ogni termine di 8.° grado il suo valore numerico (v. l'esempio sviluppato al § 2).

7. *Vi sono 666841088 quadriche tangenti a nove quadriche date.*

8. *Per una cubica piana in un piano dato sia* ν *la condizione perchè passi per un punto, e* ρ *quella perchè sia tangente ad una retta; si hanno allora le seguenti tabelle:*

Se la cubica è generale, cioè di 6.ª classe, si ha:

$$\nu^9 = 1, \quad \nu^8\rho = 4, \quad \nu^7\rho^2 = 16, \quad \nu^6\rho^3 = 64$$
$$\nu^5\rho^4 = 256, \quad \nu^4\rho^5 = 976, \quad \nu^3\rho^6 = 3424, \quad \nu^2\rho^7 = 9766$$
$$\nu\rho^8 = 21004, \quad \rho^9 = 33616.$$

Se la cubica deve avere un punto doppio, cioè essere di 4.ª classe, si ha:

$$\nu^8 = 12, \quad \nu^7\rho = 36, \quad \nu^6\rho^2 = 100,$$
$$\nu^5\rho^3 = 240, \quad \nu^4\rho^4 = 480, \quad \nu^3\rho^5 = 712,$$
$$\nu^2\rho^6 = 756, \quad \nu\rho^7 = 600, \quad \rho^8 = 400.$$

Se infine la cubica deve avere una cuspide, cioè essere di 3.ª classe, si ha:

$$\nu^7 = 24, \quad \nu^6\rho = 60, \quad \nu^5\rho^2 = 114,$$
$$\nu^4\rho^3 = 168, \quad \nu^3\rho^4 = 168, \quad \nu^2\rho^5 = 114,$$
$$\nu\rho^6 = 60, \quad \rho^7 = 24.$$

I numeri riguardanti le cubiche piane furono

calcolati da MAILLARD (*Rech. des caractéristiques des systèmes élém, de courbes planes du 3.me ordre; Diss.*, 1871), di cui i risultati sono riportati in *Bull. de Darboux*, III, 1872, pag. 161, e indi da ZEUTHEN (*Compt. Rend.*, 1872), e da SCHUBERT (*Gött. Nach.*, 1874, 1875; *Math. Ann.*, XIII).

9. *Per una quartica piana di 12.a classe, in un piano dato, indicando con* ν *e* ρ *le solite condizioni, si ha la tabella:*

$$\nu^{14} = 1, \quad \nu^{13}\rho = 6, \quad \nu^{12}\rho^2 = 36,$$
$$\nu^{11}\rho^3 = 216, \quad \nu^{10}\rho^4 = 1296, \quad \nu^9\rho^5 = 7776,$$
$$\nu^8\rho^6 = 46656, \quad \nu^7\rho^7 = 279600, \quad \nu^6\rho^8 = 1668096,$$
$$\nu^5\rho^9 = 9840040, \quad \nu^4\rho^{10} = 56481396, \quad \nu^3\rho^{11} = 308389896,$$
$$\nu^2\rho^{12} = 1530345504, \quad \nu\rho^{13} = 6533946576, \quad \rho^{14} = 23011191144.$$

Questi numeri insieme a molti altri riguardanti le quartiche speciali (con punti doppi, tripli, cuspidi, ecc.) furono calcolati da ZEUTHEN (*Compt. Rend.*, 1872; *Accad. di Kopenhagen*, 1873). Si può vedere l'opera di SCHUBERT dove sono riportati i risultati di ZEUTHEN.

10. *Per una cubica storta sia P la condizione che essa passi per un punto, T la condizione che tocchi una retta,* ν *la condizione perchè tagli una retta,* ρ *la condizione perchè tocchi un piano, B la condizione perchè la curva tagli una data retta in due punti.*

Si hanno allora le seguenti tabelle:

$$\nu^{12} = 80160, \quad \rho^{12} = 56960,$$
$$P^5\nu^2 = 5, \quad P^5\nu\rho = 10, \quad P^5\rho^2 = 20$$
$$P^4\nu^4 = 30, \quad P^4\nu^3\rho = 60, \quad P^4\nu\rho^3 = 240.$$

$P^4 T\nu = 4,\quad P^4 T\rho = 8$

$P\, T^3\nu = 12,\quad P\,T^3\rho = 12$

$T^2\rho^6 = 608,\quad T^3\nu^3 = 120,\quad T^3\nu^2\rho = 120.$

$P^3 B^3 = 1,\quad P^2 B^4 = 1,\quad P B^5 = 1,\quad B^6 = 6$

$P^3 B^2\nu^4 = 4,\quad P^2 B^3\nu^2 = 6,\quad P B^4\nu^2 = 9,\quad B^5\nu^2 = 20$

$P^3 B^2\nu\rho = 8,\quad P^2 B^3\nu\rho = 12,\quad P B^4\nu\rho = 18,\quad B^5\nu\rho = 40$

Molte altre determinazioni analoghe a queste possono farsi introducendo altre condizioni; se ne trovano raccolte moltissime nel § 25 dell'opera di Schubert. Alcune di siffatte determinazioni riguardanti le cubiche storte erano state fatte da Cremona (*Crelle*, LX), indi altre da Sturm (*Crelle*, LXXIX, LXXX) per via geometrica, e da Schubert stesso.

Per altre determinazioni riguardanti le *congruenze lineari di raggi*, *i fasci di raggi o di piani proiettivi*, ecc. vedi l'opera citata di Schubert.

CAPITOLO XVI.

Teoria infinitesimale delle curve e superficie.

§ 1. Tangenti e normali a curve e superficie.

La retta *tangente ad una curva (piana o storta)* in un suo punto P (punto di contatto) è quella che rappresenta la posizione di una retta variabile che passi per il punto P e passi per un altro punto P' appartenente al medesimo ramo della curva, quando P' tende a coincidere con P.

La retta *normale ad una curva piana* in un punto è la retta passante per questo punto e perpendicolare alla tangente in quel punto.

Le equazioni della tangente e della normale ad una curva piana sono:

Se l'equazione della curva è

$$y = f(x):$$

(tangente), $\quad Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x)$

(normale), $\quad \frac{dy}{dx}(Y - y) = -(X - x)$

$x\,y$ sono le coord. del punto di contatto e XY le coordin. correnti.

Se l'equazione della curva è

$$\varphi(x\,y) = 0:$$

(tangente), $$(X - x)\frac{\partial \varphi}{\partial x} + (Y - y)\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0.$$

(normale), $$(X - x)\frac{\partial \varphi}{\partial y} - (Y - y)\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0.$$

Se la curva è data dalle due equazioni

$$x = \psi(t), \qquad y = \chi(t):$$

(tangente), $$(Y - y)\frac{d\psi}{dt} - (X - x)\frac{d\chi}{dt} = 0.$$

(normale), $$(Y - y)\frac{d\chi}{dt} + (X - x)\frac{d\psi}{dt} = 0.$$

Chiamando $\theta\ \theta'$ gli angoli che la tangente e la normale formano coll'asse di x, *si hanno le formole* $\left(\text{ponendo } y' = \frac{dy}{dx}\right)$:

$$\cos\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}, \qquad \cos\theta' = \pm\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

$$\text{sen}\,\theta = \pm\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}, \qquad \text{sen}\,\theta' = \pm\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

Il segno di queste formole dipende dalle convenzioni che si fanno sulla direzione positiva della tangente e della normale.

Si chiamano *lunghezza della tangente* e *lunghezza della normale*, le lunghezze dei segmenti rispett. della tangente e della normale, e che sono compresi fra il punto della curva e l'asse di x.

Si chiamano *sottangente* e *sunnormale* le lunghezze dei segmenti sull'asse di x, compresi fra il piede della perpendicolare abbassata su x dal punto della curva, e i punti in cui la tangente o normale incontrano l'asse di x.

Si hanno le formole

$$T = (\text{lungh. della tang.}) = \frac{y\sqrt{1+y'^2}}{y'}.$$

$$N = (\text{lungh. della norm.}) = y\sqrt{1+y'^2}.$$

$$S_t = (\text{sottotangente}) = \frac{y}{y'}.$$

$$S_n = (\text{sunnormale}) = y\,y'.$$

Si chiamano *sottotangente polare* o *sunnormale polare* rispett. le porzioni di tangente o di normale intercette fra il punto della curva e la perpendicolare al raggio vettore condotta dal polo.

L'*assintoto* ad una curva piana è la retta che rappresenta la posizione limite della tangente alla curva quando il punto di contatto si allontana indefinitamente su di un ramo all' infinito della curva stessa.

L'equazione dell'assintoto è

$$Y - A\,X - B = 0$$

dove

$$A = \lim \frac{d\,y}{d\,x}$$

$$B = \lim\left(y - \frac{dy}{dx}x\right),$$

e questi limiti sono presi nel senso che le coordinate xy del punto della curva devono tendere alle coordinate del punto all'infinito della stessa.

Le equazioni della retta tangente ad una curva storta sono le seguenti:

Se la curva storta è data dalle equazioni

$$y = \varphi(x)$$
$$z = \psi(x)$$

la tangente è

$$(Y - y) = \frac{dy}{dx}(X - x)$$

$$(Z - z) = \frac{dz}{dx}(X - x)$$

ovvero, più simmetricamente,

$$\frac{X - x}{dx} = \frac{Y - y}{dy} = \frac{Z - z}{dz}.$$

Se la curva è data dalle equazioni

$$f(xyz) = 0 \qquad F(xyz) = 0$$

la tangente è

$$\frac{\partial f}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial f}{\partial y}(Y - y) + \frac{\partial f}{\partial z}(Z - z) = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(Y - y) + \frac{\partial F}{\partial z}(Z - z) = 0.$$

Si chiama *piano normale ad una curva storta* in un punto il piano perpendicolare alla tangente in quel punto e passante pel punto di contatto.

L'equazione del piano normale è di una delle due forme seguenti

$$(X-x)\,dx+(Y-y)\,dy+(Z-z)\,dz=0$$

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \end{vmatrix}=0.$$

I coseni di direzione della tangente sono:

$$\cos\alpha=\cos(t\,x)=\frac{dx}{ds},\qquad ds=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$$

$$\cos\beta=\cos(t\,y)=\frac{dy}{ds}$$

$$\cos\gamma=\cos(t\,z)=\frac{dz}{ds}$$

indicando con $(tx)\,(ty)\,(tz)$ gli angoli della tangente t cogli assi x, y, z.

Se P è un punto di una superficie e conduciamo per esso tutte le possibili curve storte situate sulla superficie stessa, le rette tangenti a tutte queste curve in P stanno tutte in un piano che si chiama il PIANO TANGENTE *alla superficie.*

L'equazione del piano tangente alla superficie $f(x\,y\,z)=0$ è

$$(X-x)\frac{\partial f}{\partial x}+(Y-y)\frac{\partial f}{\partial y}+(Z-z)\frac{\partial f}{\partial z}=0.$$

La retta passante per P e perpendicolare al piano tangente alla superficie in P, si chiama la *retta normale alla superficie.*

Le equazioni della normale sono:

$$\frac{X-x}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{Y-y}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{Z-z}{\frac{\partial f}{\partial z}}.$$

I coseni di direzione della retta normale sono:

$$\cos(n\,x) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}$$

$$\cos(n\,y) = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}$$

$$\cos(n\,z) = \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}.$$

Se l'equazione della superficie è data sotto la forma

$$z = \varphi(x\,y)$$

e se poniamo

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y},$$

le equazioni della normale sono

$$\frac{X-x}{p} = \frac{Y-y}{q} = \frac{Z-z}{-1}$$

e i coseni di direzione di essa sono

$$\cos(n\,x) = \pm \frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

$$\cos(n\,y) = \pm \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

$$\cos(n\,z) = \mp \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

§ 2. — Concavità e convessità delle curve piane. Inflessione.

Sia P un punto di una curva piana di equazione $y=f(x)$ e sia x_0 la sua ascissa; se esiste un numero k in modo che tutti i punti di ascissa $x_0 \pm h$ (dove sia $h<k$) formino un arco che sta tutto da una medesima parte della tangente alla curva in P, si dirà che la curva in P è *convessa* ovvero è *concava;* se non può trovarsi il numero k, allora si dirà che la curva in P non è nè convessa nè concava, ma che in P la curva ha un *punto d'inflessione o di flesso.*

Si dirà poi che la curva in P è *convessa o concava rispetto all'asse di x*, quando tutti i punti di ascissa $x_0 \pm h$, sono situati in uno dei due angoli

ottusi ovvero acuti che la tangente alla curva fa coll'asse di x.

Perchè una curva in un punto sia convessa o concava è necessario e sufficiente che, supposto che le derivate di y rispetto ad x, cioè $y'\ y''\ y''' \dots y^{(m)}$ si annullino nel punto x_0, e che $y^{(m+1)}$ sia la prima di tali derivate che in x_0 non si annulla, l'ordine m sia un numero dispari.

In questo caso la curva sarà convessa o concava rispetto all'asse di x secondochè il prodotto

$$f(x_0)\, f^{(m+1)}(x_0)$$

è positivo o negativo.

Perchè il punto P di ascissa x_0 sia un punto di INFLESSIONE *della curva, è necessario che per $x = x_0$ la seconda derivata $f''(x)$ si annulli; cioè i punti d' inflessione sono compresi fra quelli le cui ascisse annullano la seconda derivata di y rispetto ad x.*

§ 3. — Aree piane, archi, volumi, e aree superficiali.

Sia data una curva piana di equazione $y = f(x)$ (riferita a coord. rettang.), e supponiamo che si consideri un ramo di curva da $x = \alpha$, sino ad $x = \beta$, tale che una retta parallela all'asse y la incontri sempre *una volta sola.*

Conduciamo le due ordinate nei punti estremi, di ascisse α, β; l'area piana compresa fra il ramo di curva, l'asse di x, e le due ordinate estreme si

definisce nel seguente modo: *Si divida l'intervallo da* α *a* β *in un numero qualunque di parti,*

$$\delta_1 \, \delta_2 \ldots \delta_n,$$

e dai punti di divisione si conducano le ordinate sino alla curva; fra due ordinate successive sarà compreso un archetto di curva, su cui si assuma un punto P qualunque; sia x_r *l'ascissa del punto scelto sull'archetto che corrisponde all'intervallo* δ_r. *Il prodotto* $\delta_r \, f(x_r)$ *è l'area del rettangolo di base* δ_r *e di altezza eguale all'ordinata del punto P.*

Il limite del sommatorio

$$\sum_{r=1}^{n} \delta_r \, f(x_r)$$

quando gli intervalli parziali δ_r *si fanno indefinitamente decrescere di ampiezza, e quindi il loro numero n si fa crescere all'infinito, è, per definizione l'* AREA PIANA *compresa fra la curva e l'asse di x.*

Analiticamente l'area suddetta è espressa dalla formola

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, d\,x.$$

Un'area qualunque limitata da curve piane, potrà sempre comporsi mediante aree della specie sopraindicata, cioè limitata da tratti di curve e dall'asse di x.

Fatta la stessa costruzione precedente, si conduca la tangente alla curva nel punto di ascissa x_r, e così in tutti gli analoghi, e si consideri il

segmento di tangente limitato dalle due ordinate passanti per gli estremi dell' intervallo δ_r.

Si definisce come LUNGHEZZA DELL' ARCO DI CURVA, o semplicemente ARCO DI CURVA, *il limite della somma di tutti tali segmenti di tangente.*

L'espressione analitica dell'arco di curva piana è

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + \left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2}\, d\,x.$$

Chiamando s *l'arco di curva, si ha la relazione differenziale:*

$$d\,s^2 = d\,x^2 + d\,y^2.$$

Chiamando θ *l'angolo che la tangente alla curva in un punto, fa coll'asse di* x*, si ha:*

$$\cos\theta = \frac{d\,x}{d\,s}$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{d\,y}{d\,s}.$$

Definiamo la lunghezza dell'arco di una curva storta.

Sieno $y = \varphi(x)$, $z = \psi(x)$ le equazioni della curva storta, e consideriamo il tratto di curva che va da un punto di ascissa $x = \alpha$, sino ad un punto di ascissa $x = \beta$, supponendo che esso sia tale che ogni piano di ascissa fra α e β, e perpendicolare all'asse x, lo incontri in un punto solo.

Dividiamo, come avanti, il tratto di asse da $x = \alpha$ ad $x = \beta$ in intervalli parziali $\delta_1\, \delta_2 \ldots \delta_n$, e

pei punti di divisione conduciamo i piani perpendicolari all'asse x, i quali spezzeranno il tratto totale di curva in tanti tratti parziali; in ciascuno di questi p. es. in quello che si proietta in δ_r, scegliamo un punto, e conduciamo la tangente alla curva, e di questa tangente consideriamo il segmento limitato dai piani che passano per gli estremi del segmento δ_r.

Il limite della somma di tutti questi segmenti, quando gli intervalli δ_r diminuiscono indefinitivamente in grandezza, è LA LUNGHEZZA DELL'ARCO DELLA CURVA STORTA.

La espressione analitica dell'arco di curva è:

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\, dx$$

donde

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

e chiamando (tx), (ty), (tz) gli angoli di direzione della tangente si hanno le formole (vedi anche § 1):

$$\cos(tx) = \frac{dx}{ds}$$

$$\cos(ty) = \frac{dy}{ds}$$

$$\cos(tz) = \frac{dz}{ds}.$$

Passiamo ora ai volumi e alle aree superficiali.

Consideriamo una porzione finita di superficie limitata da una linea chiusa (contorno) che si proietti in una linea piana chiusa φ sul piano $x\,y$; una retta passante per un punto del piano dell'area piana limitata da φ incontri sempre in *un punto solo* la superficie medesima.

Si formi nel piano $x\,y$, un rettangolo coi lati paralleli ai due assi x e y, tangenti alla curva φ, la quale sia compresa tutta nell'interno di tal rettangolo, e sieno α, β le ascisse dei vertici di questo, e α', β' le ordinate.

Dividiamo l'intervallo dell'asse x da α a β in intervalli parziali $\delta_1 \ldots \delta_n$, e l'intervallo dell'asse y da α' a β' in intervalli parziali $\delta'_1\,\delta'_2 \ldots \delta'_n$, e pei punti di divisione si conducano le rette rispettivamente parallele agli assi x, y.

Si verrà a dividere il rettangolo circoscritto a φ, in tanti rettangoli, l'area di ciascuno dei quali è $\delta_r\,\delta'_s$; di questi si considerino solo quelli che o sono del tutto interni all'area φ ovvero sono spezzati dalla curva φ, e si trascurino quegli altri rettangoli che sono del tutto esterni all'area φ.

Per un punto $(x_r\,y_s)$ compreso nel rettangolo di area $\delta_r\,\delta'_s$ (non escluso il contorno) si conduca la retta parallela all'asse z sino a che incontri la superficie, in un punto la cui altezza sul piano $x\,y$ sarà

$$z_{rs} = f(x_r\,y_s)$$

se $z = f(x\,y)$ è l'equazione della superficie.

Il limite della somma dei volumi di tutti i parallelepipedi retti di base come $\delta_r\,\delta'_s$ *e di altezza come* z_{rs}, *quando gli intervalli* δ, δ' *decrescono in-*

definitivamente in grandezza, è ciò che si chiama il VOLUME *compreso fra la superficie, e il piano $x\,y$.*

Tal volume ha per espressione analitica

$$V = \iint f(x\,y)\,d\,x\,d\,y$$

dove l'integrale doppio è esteso a tutta l'area piana limitata della curva φ (v. *Repertorio*, I, pag. 186-187).

Un volume qualunque limitato da superficie potrà sempre comporsi mediante volumi della specie sopraindicata, cioè limitati da porzioni di superficie e dal piano $x\,y$.

Se formiamo il parallelepipedo retto indefinito avente per base il rettangolo $\delta_r \cdot \delta'_s$, le facce di questo segheranno sulla superficie un quadrilatero curvilineo, dentro cui è il punto di altezza z_{rs}.

Conduciamo il piano tangente in questo punto e limitiamolo alle facce del medesimo parallelepipedo; *il limite della somma delle aree di tutti i parallelogrammi che in tal maniera vengono a formarsi nei vari piani tangenti, quando i δ_r, δ'_s impiccoliscono indefinitivamente è* L' AREA SUPERFICIALE.

La sua espressione analitica è

$$A = \iint \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, d\,x\,d\,y$$

l'integrale doppio essendo esteso, come sopra, a tutta l'area piana limitata dalla curva φ.

Sino a poco tempo fa l'area delle superficie si definiva, nei trattati più accreditati (v. p. es. SER-

RET), in altro modo, come il limite cioè della somma delle facce di poliedri a facce triangolari iscritti nella superficie medesima. Lo SCHWARZ fece vedere che quella definizione potea riuscire in certi casi illusoria o inesatta (*Opere*, vol. II, pag. 309; v. anche la 2.ª ediz. del *Cours d'Analyse de* M. HERMITE, Paris, 1883, pag. 35-36, in cui comparve per la prima volta la nota di SCHWARZ).

Se l'asse z è asse di ROTAZIONE *per la superficie data, la quale abbia allora per equazione*

$$z = F(\sqrt{x^2 + y^2})$$

il volume racchiuso fra due piani perpendicolari all'asse di rotazione che taglino sulla superficie due paralleli di raggi $r_1\, r_2$ *è dato da*

$$\pi \int_{r_1}^{r_2} r^2 F'(r)\, d\, r,$$

e l'area superficiale compresa fra due paralleli di raggi r_1, r_2 *è data dalla formola*

$$2\pi \int_{r_1}^{r_2} r \sqrt{1 + F'^2(r)}\, d\, r.$$

La superficie della zona sferica, cioè l'area della minore delle due porzioni di sfera, limitata da un qualunque cerchio di raggio r segnato sulla sfera, è data da

$$2\pi R (R - \sqrt{R^2 - r^2})$$

dove R è il raggio della sfera.

Facendo rotare un'ellisse di semiassi a, b $(a > b)$ intorno all'asse maggiore si genera un'ellissoide di rotazione.

La superficie di tale ellissoide limitata da due piani perpendicolari all'asse di rotazione, di cui uno passi per il centro, e distanti fra loro della quantità r, è data dalla formola

$$\pi \frac{b}{a} \left[r\sqrt{a^2 - e^2 r^2} + \frac{1}{2}\frac{a^2}{e} \operatorname{arc\,sen} \frac{e}{a} r \right],$$

dove

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}.$$

Per la superficie del mezzo ellissoide si ha

$$\pi b^2 + \frac{\pi a b}{e} \operatorname{arc\,sen} e.$$

Il volume racchiuso in un ellissoide a tre assi disuguali è dato da $\frac{4}{3}\pi a b c$, *se* a, b, c *sono i tre semiassi.*

Il volume racchiuso da un iperboloide ad una falda e da due piani paralleli all'ellisse di gola, e distanti delle quantità $\pm c$ *da essa, è dato da*

$$\frac{8}{3}\pi a b c$$

se a, b *sono i semiassi dell'ellisse di gola.*

Il volume racchiuso da un paraboloide ellittico e da un piano perpendicolare all'asse è la metà di quello del cilindro che ha la stessa base e altezza.

L' area del toro generato da un cerchio di raggio R che rota intorno ad una retta distante della quantità a dal centro del cerchio è data da

$$4\pi^2 a R.$$

Il volume racchiuso dal medesimo toro è

$$2\pi^2 a R^2.$$

(Aree e volumi polari.) Sieno ρ (raggio vettore), θ (amplitudine), le coordinate *polari* (v. pagine 29-30) di un punto di una data curva nel piano, P_1 P_2 due punti di questa e O il polo del sistema di coordinate; il tratto di curva compreso fra P_1 e P_2 sia tale che una qualunque retta per O e compresa nell' angolo $P_1 O P_2$ la incontri in un punto solo. Si divida l'angolo $P_1 O P_2$ in n parti, $\omega_1 \omega_2 \ldots \omega_n$, e il tratto di curva da P_1 a P_2 resti così diviso in n parti dai lati degli angoli parziali; in ciascuna di tali parti (p. es. quella che corrisponde all'angolo ω_r) si scelga un punto qualunque che abbia per raggio vettore ρ_r, e si descriva l'arco di cerchio di centro O, di raggio ρ_r, e limitato ai lati dell'angolo ω_r ; *il limite della somma delle aree di tutti i settori circolari come quello avente per area* $\frac{1}{2} \rho_r \omega_r$,* *è l'area compresa fra la curva e i due raggi vettori estremi nei punti* $P_1 P_2$.

---

* Al solito, qui e in tutti i casi analoghi intendiamo con ω_r anche il numero che misura la lunghezza dell'arco di cerchio di raggio 1 e che comprenda l'angolo al centro ω_r.

Tale area ha per espressione analitica

$$\frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^2 \, d\,\theta$$

essendo $\theta_1\,\theta_2$ *le amplitudini dei punti* $P_1\,P_2$, *ed intendendo che mediante l'equazione della curva,* ρ *sia espresso in funzione di* θ.

Questa definizione di area è d'accordo con quella data avanti, in questo senso, che se un'area si compone con aree polari della specie di quelle suindicate, e indi la si compone con aree della specie di quelle trattate al principio del paragrafo, i risultati ottenuti mediante l'applicazione delle due formole sono i medesimi.

In un modo analogo si può procedere per i volumi. Consideriamo una porzione di superficie, un punto della quale abbia per coordinate polari (v. pag. 51) le quantità ρ, θ, φ.

Consideriamo il cono a base *non piana*, avente per vertice il polo O, e per base la porzione assegnata di superficie, supponendo che questa sia tale, che ogni retta passante per O e situata nell'interno di tal cono, la incontri sempre in *un* punto solo. Supponiamo diviso l'angolo solido al vertice O del cono in tanti altri angoli solidi parziali, ognuno dei quali segherà sulla superficie una parte, su cui immaginiamo assunto un punto P_{rs}; sia ρ_{rs} il raggio vettore di questo punto, e formiamo il cono avente per angolo al vertice, l'angolo solido parziale dentro cui è il punto P_{rs} e per base una porzione di sfera di centro O e di raggio ρ_{rs}. *Il limite della somma dei volumi di*

tutti questi coni, quando decrescono indefinitamente gli angoli solidi parziali nei quali si è diviso l'angolo solido totale, col quale la superficie è guardata dal polo O, è, per definizione, il volume compreso fra la superficie e il punto O (tal volume può chiamarsi *volume polare).*

L'espressione analitica di tale volume è

$$V = \frac{1}{3} \iint \rho^3 \operatorname{sen} \theta \, d\theta \, d\varphi$$

intendendo esteso tale integrale doppio al complesso di tutti i valori θ, φ *che corrispondono a punti della porzione considerata di superficie.*

Naturalmente anche qui può osservarsi che questa nuova definizione di volume non è in disaccordo coll'antica, nel senso che se si volesse calcolare il volume polare, mediante le formole antiche (cioè scomponendo il volume polare in somme e differenze di volumi dell'altra specie considerata di sopra, e indi applicando le altre formole relative a quest'altra specie di volumi), i due risultati non possono che coincidere.

Noteremo infine le formole che danno gli archi di curva piana, gli archi di curva storta, e le aree superficiali, mediante coordinate polari. *Esse sono:*

$$\textit{arco di curva piana} = \int_{\rho_1}^{\rho_2} d\rho \sqrt{1 + \rho^2 \left(\frac{d\theta}{d\rho}\right)^2}$$

arco di curva storta =

$$= \int_{\rho_1}^{\rho_2} d\rho \sqrt{1 + \rho^2 \left(\frac{d\theta}{d\rho}\right)^2 + \rho^2 \operatorname{sen}^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{d\rho}\right)^2}$$

area superficiale $=$

$$= \int\int \rho \, d\theta \, d\varphi \sqrt{\left[\rho^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\right)^2\right] \operatorname{sen}^2 \theta + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \varphi}\right)^2}.$$

§ 4. — Curvatura delle linee piane e storte. Torsione. Equazioni intrinseche.

Considerando le tangenti in due punti P, P' vicini di una curva piana o storta, l'angolo da queste formato e che tende a zero quando i due punti di contatto tendono ad avvicinarsi, si chiama *angolo di contingenza.* Intenderemo misurato quest'angolo mediante l'arco di cerchio di raggio 1 che sottende al centro un angolo eguale a quello di contingenza; la misura di tale arco di cerchio sia rappresentata con θ.

Se s è l'arco intercetto fra i due punti vicini, si dirà *curvatura della curva piana o storta in un punto P, il limite del rapporto*

$$\frac{\theta}{s}$$

quando P' tende a P, mentre il rapporto medesimo si suol chiamare *curvatura media dell'arco s.*

Considerando θ come funzione di s, *la curvatura potrà anche esprimersi come la derivata di θ rispetto ad s.*

L'inverso della curvatura si chiama *raggio di curvatura.*

Se la curva piana è data dall'equazione

$$y = f(x)$$

la curvatura è espressa dalla formola

$$C = \frac{1}{R} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}};$$

se la curva piana ha invece per equazioni

$$x = \varphi(t)$$
$$y = \psi(t)$$

si ha

$$C = \frac{1}{R} = \frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Se è $t = s$ (arco della curva) si ha

$$\frac{1}{R} = \frac{\frac{d^2y}{ds^2}}{\frac{dx}{ds}} = -\frac{\frac{d^2x}{ds^2}}{\frac{dy}{ds}}$$

$$\frac{1}{R} = \sqrt{\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2}.$$

In coordinate polari ρ, ω, si ha

$$\frac{1}{R} = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{(\rho + \rho'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

La relazione analitica esistente fra la curvatura e l'arco di curva si suol chiamare *equazione intrinseca* della curva, come quella che basta per definire la forma della curva, ma non per fissarne la posizione nel piano.

Per una curva storta la curvatura ha la seguente espressione:

$$C = \frac{1}{R} =$$

$$= \frac{1}{d\,s^3} \sqrt{(dyd^2z - dzd^2y)^2 + (dzd^2x - dxd^2z)^2 + (dxd^2y - dyd^2x)^2}$$

ovvero, se s è la variabile indipendente,

$$C = \frac{1}{R} = \sqrt{\left(\frac{d^2\,x}{d\,s^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2\,y}{d\,s^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2\,z}{d\,s^2}\right)^2}.$$

Se da un punto dello spazio conduciamo le parallele a tutte le rette tangenti ad una data curva *storta*, e limitiamo tali parallele ad una sfera che abbia per centro il punto fissato dello spazio, si verrà a formare sulla sfera una *curva sferica* che si chiamerà l'*immagine sferica della curva storta data.*

Condueendo da un punto della curva data la parallela alla tangente nel punto corrispondente dell'immagine sferica, si ha la *normale principale alla curva storta data.*

Le equazioni della normale principale sono:

$$\frac{X - x}{d\,.\,\frac{d\,x}{d\,s}} = \frac{Y - y}{d\,.\,\frac{d\,y}{d\,s}} = \frac{Z - z}{d\,.\,\frac{d\,z}{d\,s}}$$

e i suoi coseni di direzione sono:

$$\cos \xi = R \frac{d \cdot \frac{d x}{d s}}{d s}$$

$$\cos \eta = R \frac{d \cdot \frac{d y}{d s}}{d s}$$

$$\cos \zeta = R \frac{d \cdot \frac{d z}{d s}}{d s}$$

essendo R il raggio di curvatura.

Intenderemo *direzione positiva della normale* ad una curva *piana* in P o della normale principale ad una curva storta in P, quella delle due direzioni della normale, tale che andando da P nel senso di essa si incontrano punti che stanno, coi punti della curva infinitamente vicini a P, da una medesima parte della tangente in P, o da una medesima parte del piano, perpendicolare alla normale principale, condotto per P.

E intenderemo poi *direzione positiva della tangente* alla curva piana in P, quella fra le due direzioni della tangente, la quale viene a coincidere colla direzione positiva dell'asse di y quando, trasportando la curva nel proprio piano, si fa coincidere la direzione positiva dell'asse di x colla direzione positiva della normale.

Il punto sulla direzione positiva della normale alla curva piana, o della normale principale alla curva storta, distante da P per una quantità

eguale ad R (raggio di curvatura) si dice *centro di curvatura corrispondente al punto P.*

Nel caso di una curva storta, conducendo, per il centro di curvatura, la retta perpendicolare alla tangente e alla normale principale, si ha *la retta polare;* e la retta parallela a questa e passante pel punto della curva si dice *binormale.*

Il centro di curvatura nel caso delle curve piane è la posizione limite del punto d'intersezione della normale in P, colla normale in un punto infinitamente vicino a P.

La retta polare nel caso delle curve storte è la posizione limite della retta d' intersezione del piano normale in P alla curva, col piano normale in un punto infinitamente vicino a P.

Le coordinate del centro di curvatura nel caso di una curva piana sono:

$$x_1 = x + R \frac{dy}{ds}$$

$$y_1 = y - R \frac{dx}{ds};$$

formole che valgono quando si presuppongono le superiori convenzioni sulle direzioni positive della tangente e della normale, e R si immagina una quantità essenzialmente positiva.

Le coordinate del centro di curvatura nel caso di una curva storta sono:

$$x_1 = x \pm R^2 \frac{d \cdot \frac{dx}{ds}}{ds}$$

$$y_1 = y \pm R^2 \frac{d \cdot \frac{dy}{ds}}{ds}$$

$$z_1 = z \pm R^2 \frac{d \cdot \frac{dz}{ds}}{ds}$$

dove il segno vien determinato dalle convenzioni da farsi sulla *direzione positiva* della tangente alla curva storta.

Le equazioni della retta polare sono:

$$\frac{X - x_1}{\cos\lambda} = \frac{Y - y_1}{\cos\mu} = \frac{Z - z_1}{\cos\nu}$$

dove λ, μ, ν *sono gli angoli di direzione della retta stessa, e hanno i valori*

$$\cos\lambda = R \frac{dy\, d^2z - dz\, d^2y}{ds^3}$$

$$\cos\mu = R \frac{dz\, d^2x - dx\, d^2z}{ds^3}$$

$$\cos\nu = R \frac{dx\, d^2y - dy\, d^2x}{ds^3}.$$

Il piano della tangente e della normale principale ad una curva storta si chiama *piano osculatore; la sua equazione è:*

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix} = 0.$$

Il piano osculatore è la posizione limite del piano che passa per un punto della curva e per altri due suoi punti, quando tali altri due punti in un modo qualunque si avvicinano indefinitamente al primo.

La *torsione* (detta anche *2.ª curvatura)* ha rapporto colla *deviazione della retta polare* nel passare da un punto ad un altro della curva, come la curvatura ordinaria (detta anche *1.ª curvatura* o *curvatura di flessione*) ha rapporto colla *deviazione della tangente.*

Chiamando τ l'angolo fra due rette polari corrispondenti a due punti infinitamente vicini della curva (o meglio l'arco di cerchio di raggio 1 che sottende al centro quell'angolo) il limite del rapporto

$$\frac{\tau}{s}$$

si dice *torsione della curva storta in un punto.*

La sua espressione analitica è

$$\frac{1}{T} = \sqrt{\left(\frac{d\cos\lambda}{d\,s}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\mu}{d\,s}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\nu}{d\,s}\right)^2}$$

dove λ, μ, ν *sono gli angoli di direzione della retta polare, e* T *si chiama raggio di torsione.*

Nella teoria delle curve storte (curve a doppia curvatura) sono importantissime le cosiddette *formole di Frenet o Serret*, che esprimono i differenziali dei nove coseni

$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ (cos. di direz. della tangente)

$\cos\xi$, $\cos\eta$, $\cos\zeta$ (cos. di direz. della normale principale)

$\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ (cos. di direz. della retta polare).

Esse sono

$$\frac{d\cos\alpha}{ds} = \frac{1}{R}\cos\xi$$

$$\frac{d\cos\beta}{ds} = \frac{1}{R}\cos\eta$$

$$\frac{d\cos\gamma}{ds} = \frac{1}{R}\cos\zeta.$$

$$\frac{d\cos\lambda}{ds} = \frac{1}{T}\cos\xi$$

$$\frac{d\cos\mu}{ds} = \frac{1}{T}\cos\eta$$

$$\frac{d\cos\nu}{ds} = \frac{1}{T}\cos\zeta.$$

$$\frac{d\cos\xi}{ds} = -\frac{1}{R}\cos\alpha - \frac{1}{T}\cos\lambda$$

$$\frac{d\cos\eta}{ds} = -\frac{1}{R}\cos\beta - \frac{1}{T}\cos\mu$$

$$\frac{d\cos\zeta}{ds} = -\frac{1}{R}\cos\gamma - \frac{1}{T}\cos\nu.$$

Le relazioni analitiche esistenti fra la curvatura e l'arco s della curva storta, e fra la torsione e l'arco, si dicono le *equazioni intrinseche* della curva storta, come quelle che la individuano di forma, ma non ne fissano la posizione nello spazio.

Date ad arbitrio le equazioni intrinseche

$$R = R(s), \qquad T = T(s)$$

di una curva, esiste sempre la curva corrispondente, e il problema di determinarla, si riduce alla integrazione di un' equazione del tipo di Riccati (Darboux).

Una curva di cui il rapporto delle due curvature è costante è un' elica tracciata su di un cilindro (curve tracciate su di un cilindro e che ne tagliano sotto angolo costante le generatrici); se sono in particolare costanti le due curvature, il cilindro è circolare. (Puiseux, *Crelle*, VII; Bertrand, *Id.*, VIII.)

L'equazione intrinseca di una conica è

$$s = \frac{1}{3} \int \frac{d\,R}{\sqrt{-1 + A\,R^{\frac{2}{3}} - B\,R^{\frac{4}{3}}}}$$

dove A, B sono due costanti.

Le equazioni intrinseche della parabola e dell' iperbole equilatera sono rispettivamente

$$s = \frac{1}{3} \int \frac{d\,R}{\sqrt{\left(\frac{R}{p}\right)^{\frac{2}{3}} - 1}}$$

$$s = \frac{1}{3} \int \frac{dR}{\sqrt{\left(\frac{R}{a}\right)^{\frac{4}{3}} - 1}}$$

dove, p, a sono rispettivamente i parametri della parabola e dell' iperbole equilatera.

Una delle equazioni intrinseche di una curva sferica (situata di una sfera) è

$$\frac{R}{T} + \frac{d}{ds}\left(T \frac{dR}{ds}\right) = 0.$$

Le curve di cui una delle equazioni intrinseche è una *relazione lineare* fra le due curvature, si dicono *curve di* BERTRAND (*Crelle*, XV).

Esse hanno la proprietà notevole che le loro normali principali sono normali principali anche di una seconda curva che si dice coniugata della prima (v. anche: BONNET, *J. Éc. pol.*, XXXII, 1848; SERRET, *Crelle*, XVI; *Compt. Rend.*, 1877; CESÀRO, *Riv. di mat.*, II; *Mathesis*, II, ecc.).

I primi che si occuparono *ex professo* della teoria delle curve storte furono specialmente CLAIRAUT (*Traité des courbes à double courbure*, 1731), TINSEAU (*Mém. des Sav. étrang.*, IX, 1781), MONGE (*Mém. des Sav. étrang.*, X, 1785; *Journ. Éc. polyt.*, II, 1799), LANCRET, (*Mém. de Paris*, I, 1806, II, 1811), JACOBI (*Crelle*, XIV, XVI), SAINT-VENANT (*Journ. Éc. polyt.*, 1845).

Le celebri formole di FRENET e SERRET furono scoperte quasi contemporaneamente da questi due autori (*Crelle*, XVII, 1852 e XVI, 1851).*

Della cosiddetta *geometria intrinseca delle curve*, cioè dello studio delle curve per mezzo delle loro equazioni intrinseche, si occuparono specialmente HOPPE in moltissimi lavori (*Crelle*, LX, LXIII; *Arch. der Math.*, 1880-85-89, ecc.), LIE (*Christiania Versl.*, 1882; v. anche *Vorlesung. über cont. Gruppen*, ecc. Leipzig, 1893); un recente libro di CESÀRO (*Geom. intrinseca.* Napoli, 1896) è dedicato completamente a tale indirizzo di studi.

I principali trattati sulla teoria infinitesimale delle curve storte sono quelli di SCHELL (Leipzig, 1859, 2.ª ediz., 1898), P. SERRET (Paris, 1860), JOACHMISTHAL (Leipzig, 1872), oltre i trattati di *Geometria differenziale*, cui accenneremo nei prossimi paragrafi.

§ 5. — CONTATTI DI CURVE E SUPERFICIE.

Se $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$ sono le equazioni di due curve *piane*, si dirà che esse hanno in un punto di ascissa $x = x_0$, *un contatto di ordine* i quando per $x = x_0$ si ha:

$$f(x_0) = \varphi(x_0)$$
$$f'(x_0) = \varphi'(x_0)$$

* La memoria di FRENET inserita dopo quella di SERRET nel *Giornale di Crelle*, era però stata presentata sino dal 1847 come dissertazione di laurea alla Facoltà di Tolosa.

$$f''(x_0) = \varphi''(x_0)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f^i(x_0) = \varphi^i(x_0).$$

Se i è pari le due curve si toccano in quel punto intersecandosi, e se i è dispari, le due curve non si intersecano.

Se due curve f, φ hanno fra loro in un punto un contatto d'ordine i, una terza curva ψ che abbia con f un contatto d'ordine $k < i$, avrà anche coll'altra φ un contatto dello stesso ordine k.

Una curva avente in un punto, con un' altra fissa, un contatto di ordine i, si può considerare come la posizione limite di un' altra curva che passi per $i+1$ punti della prima, quando questi $i+1$ punti si avvicinano indefinitivamente.

Una curva la cui equazione contiene i costanti indeterminate, si dice *osculatrice* ad un'altra curva fissa, quando ha con questa, in un punto, un contatto di massimo ordine di cui essa è suscettibile, tenuto conto delle costanti che sono disponibili; *in generale, tale massimo ordine è $i-1$; in particolare, può superare questo limite.*

Il *cerchio osculatore* ad una curva, in un punto è il cerchio che ha colla curva, in quel punto, un contatto almeno di secondo ordine.

Il cerchio osculatore ad una curva in un punto, è il cerchio passante per quel punto e che ha per centro il centro di curvatura (cerchio di curvatura).

Se il cerchio osculatore ha colla curva in un punto un contatto d'ordine dispari (quindi superiore al

secondo) il raggio di curvatura in quel punto è un massimo o minimo.

Sia data una superficie e la sua retta normale in un punto P; sia data ancora una curva storta passante per il punto P della superficie, e di essa si faccia sulla superficie la proiezione conducendo rette proiettanti, parallele alla normale della superficie. Si dirà che *la curva e la superficie hanno in quel punto P un contatto d'ordine i* quando, la curva e la sua proiezione così formata, hanno in P un contatto d'ordine i.

Una superficie, la cui equazione contiene i parametri arbitrari, si dirà *osculatrice* ad una curva data in un punto, quando ha con questa il massimo contatto compatibile col numero dei parametri arbitrarii. *L'ordine di tale massimo contatto sarà almeno* $i - 1$.

Il *piano osculatore* ad una curva storta, è il piano passante per un punto di essa, e avente con essa in tal punto un contatto almeno di 2.° ordine (v. § 4).

La *sfera osculatrice* è quella avente con una curva storta in un punto un contatto almeno di *terzo* ordine.

§ 6. — Inviluppi di curve e superficie. Superficie sviluppabili.

Se l'equazione $f = 0$ di una curva (o di una superficie) contiene un parametro indeterminato a che si fa variare con continuità, generando così una serie di curve (o superficie), e se consideriamo un valore determinato di a e poi un valore variato

$$a + \Delta a,$$

l'intersezione delle due curve (o superficie) corrispondenti, col tendere di Δa a zero, potrà tendere in generale ad una posizione limite; l'assieme di tutte queste posizioni limiti potrà formare una curva (o una superficie) che si chiamerà *l'inviluppo della serie di curve (o superficie) data.* Una curva (o superficie) della serie si chiama *inviluppata.* Nel caso delle superficie la posizione limite della curva intersezione di due superficie infinitamente vicine della serie, si chiama *caratteristica.* (Monge).

Per trovare l'equazione dell' inviluppo deve eliminarsi il parametro a fra l'equazione data e quella che si ottiene eguagliando a zero la sua derivata rispetto ad a $\left(f = 0, \dfrac{d\,f}{d\,a} = 0\right)$.

L' inviluppo è tangente a tutte le inviluppate lungo la caratteristica corrispondente.

La caratteristica situata sopra una inviluppata incontrerà l'inviluppata vicina in certi punti che

potranno tendere a posizioni limiti, quando le due inviluppate si avvicinano indefinitamente; l'assieme di queste posizioni limiti forma in generale una curva appartenente all'inviluppo che si chiama *spigolo di regresso dell'inviluppo.*

Ogni caratteristica è tangente allo spigolo di regresso.

Le equazioni dello spigolo di regresso si ottengono eliminando a fra le

$$f = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial a} = 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial a^2} = 0.$$

L'inviluppo di un sistema semplicemente infinito di piani è una superficie che si chiama *superficie sviluppabile.*

Chiamando r, s, t le derivate seconde di z rispetto a x, y, ricavate dall'equazione della superficie, *per una superficie sviluppabile si ha*

$$r\,t - s^2 = 0.$$

Le superficie *sviluppabili* prendono tal nome dalla proprietà che esse hanno di potersi distendere (sviluppare) su di un piano, senza ripiegature nè rotture.

Una superficie sviluppabile è il luogo delle tangenti di una curva storta, la quale ne è lo spigolo di regresso, mentre le sue tangenti sono le caratteristiche della sviluppabile.

I piani tangenti della sviluppabile sono piani osculatori dello spigolo di regresso.

L'inviluppo dei piani normali ad una curva storta è una superficie che si chiama *sviluppabile polare della curva storta.*

Le caratteristiche della sviluppabile polare sono le rette polari della curva data.

Le coordinate di un punto dello spigolo di regresso della sviluppabile polare sono:

$$x_0 = x + R \cos \xi - T \frac{dR}{ds} \cos \lambda$$

$$y_0 = y + R \cos \eta - T \frac{dR}{ds} \cos \mu$$

$$z_0 = z + R \cos \zeta - T \frac{dR}{ds} \cos \nu.$$

Lo spigolo di regresso della sviluppabile polare d'una curva storta è il luogo dei centri delle sfere osculatrici nei punti della curva stessa.

L'inviluppo dei piani tangenti ad una curva storta e perpendicolari alla normale principale, è la cosiddetta *sviluppabile rettificante alla curva storta.*

Distendendo su di un piano la sviluppabile rettificante di una data curva storta, questa (che appartiene alla sviluppabile) si trasforma in una retta.

§ 7. — Evolute ed evolventi.

Se data una curva piana o storta, immaginiamo attorno ad essa avvolto un filo flessibile e inestendibile, e lo svolgiamo dalla curva stessa in modo che esso resti sempre teso e quindi sempre tan-

gente alla curva, un punto qualunque del filo descriverà una curva che si chiamerà *evolvente* della data, e questa si chiamerà invece *evoluta* di quella.

La tangente all'evoluta è sempre perpendicolare alla tangente dell'evolvente, e propriamente la tangente all'evolvente è parallela alla normale principale dell'evoluta.

Data una curva storta o piana qualunque le coordinate di un punto dell'evoluta sono

$$x' = x + R\cos\xi + R\,\mathrm{tg}\,(\tau + k)\cos\lambda$$
$$y' = y + R\cos\eta + R\,\mathrm{tg}\,(\tau + k)\cos\mu$$
$$z' = z + R\cos\zeta + R\,\mathrm{tg}\,(\tau + k)\cos\nu$$

dove

$$\tau = \int \frac{ds}{T}$$

e k è una costante arbitraria. Esistono quindi infinite EVOLUTE *di una curva data piana o storta. Se la curva è piana si ha* $\tau = \mathrm{cost.}$ *L'angolo che la tangente all'evoluta forma colla normale principale dell'evolvente è dato da* $\tau + k$.

Se la curva è piana, ponendo $\tau + k = 0$ *si ha, fra le infinite evolute, la evoluta piana.*

Le infinite evolute di una curva sono tutte situate sulla sviluppabile polare dell'evolvente, e sono propriamente tutte curve geodetiche (vedi più avanti) *di tale superficie.*

Se la evolvente è storta, esse sono tutte storte.

Se la evolvente è piana, di esse ve n'è una piana, e le altre sono storte. In questo caso l'unica evoluta piana è il luogo dei centri di curvatura della

evolvente, e le altre sono eliche del cilindro che ha per base tale luogo.

Le tangenti a due diverse evolute, e uscenti da uno stesso punto della evolvente formano fra loro un angolo costante.

Per le considerazioni riguardanti *la superficie evoluta di una superficie data*, vedi più sotto il § 13.

Dalla costruzione sopra indicata per la evolvente, risulta subito:

Data una curva vi sono infinite evolventi di essa.

L'evoluta di una curva piana fu considerata per la prima volta da HUYGHENS (*Horologium oscillatorium*, 1673), il quale, volendo costruire un pendolo isocrono, ebbe l'idea di servirsi dell'isocronismo della cicloide (v. Cap. XVII), facendo appoggiare il filo del pendolo su due semievolute della medesima curva; di qui l'idea di studiare le evolute in generale. Di queste si occupò posteriormente anche NEWTON nel suo *Metodo delle flussioni.*

§ 8. — COORDINATE CURVILINEE. ELEMENTO LINEARE DELLE SUPERFICIE. FORME DIFFERENZIALI FONDAMENTALI DELLE SUPERFICIE. RAPPRESENTAZIONE CONFORME. RAPPRESENTAZIONE SFERICA.

Se una superficie è definita dalle tre equazioni

$$x = \varphi\,(u, v)$$
$$y = \psi\,(u, v)$$
$$z = \chi\,(u, v)$$

dove u, v, sono due parametri arbitrari, le linee per le quali $u = \text{cost.}$, ovvero $v = \text{cost.}$ rappresentano due sistemi di linee situate sulla superficie, e che si intersecano in punti di cui u, v si chiamano le *coordinate curvilinee.* La distanza infinitesima fra due punti della superficie, di coordinate rispettivamente

$$u, \quad v$$

$$u + du, \quad v + dv,$$

si chiama *elemento lineare della superficie. Il suo quadrato è dato da*

$$ds^2 = E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2$$

dove

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2.$$

$$EG - F^2 > 0.$$

Indicando con $(u\,x)\,(u\,y)\ldots$ gli angoli di direzione delle tangenti alle linee coordinate $v = \text{cost}$, $u = \text{cost}$, si hanno le formole

$$\cos(u\,x) = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial u}, \quad \cos(v\,x) = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial v}$$

$$\cos(u\,y) = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial y}{\partial u}, \quad \cos(v\,y) = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial y}{\partial v}$$

$$\cos(u\,z) = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial z}{\partial u} \quad , \quad \cos(v\,z) = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial z}{\partial v}$$

e l'angolo Ω fra le linee coordinate è dato da

$$\cos \Omega = \frac{F}{\sqrt{EG}} \quad , \quad \operatorname{sen} \Omega = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG}}.$$

La condizione necessaria e sufficiente perchè le due linee $u =$ cost, $v =$ cost, *sieno fra loro ortogonali è che sia* $F = 0$.

L'elemento d'area della superficie è dato da

$$\sqrt{EG - F^2}\, d\,u\, d\,v.$$

Indicando con $X\,Y\,Z$ *i coseni di direzione della normale alla superficie si hanno le formole*

$$X = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix},$$

$$Y = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix},$$

$$Z = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

La forma differenziale

$$E\,d\,u^2 + 2\,F\,d\,u\,d\,v + G\,d\,v^2$$

si chiama *prima forma differenziale fondamentale della superficie* e la forma differenziale

$$\varphi = -\Sigma\,d\,x\,d\,X = D\,d\,u^2 + 2\,D'\,d\,u\,d\,v + D''\,d\,v^2$$

si chiama *2.ª forma differenziale fondamentale della superficie.*

Le D hanno i valori

$$D = \Sigma\,X\,\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, \qquad D' = \Sigma\,X\,\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v},$$

$$D'' = \Sigma\,X\,\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}$$

dove il simbolo Σ sta a significare che bisogna fare la somma dei tre valori che si ottengono mutando x, X, rispetto in y, Y; z, Z.

Fra i coefficienti E, F, G, D, D', D'' sussistono tre relazioni le quali nel caso in cui le linee coordinate sono ortogonali, cioè in cui è $F = 0$, sono le seguenti:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{D''}{\sqrt{G}}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{D'}{\sqrt{G}}\right) - \frac{D'}{\sqrt{E\,G}}\,\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} - \frac{D}{E}\,\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{D}{\sqrt{E}}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{D'}{\sqrt{E}}\right) - \frac{D'}{\sqrt{E\,G}}\,\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} - \frac{D''}{G}\,\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} = 0$$

$$\frac{D'^2 - D\,D''}{\sqrt{E\,G}} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\,\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\,\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right).$$

Per la forma di queste relazioni nel *caso generale*, mediante i simboli di CHRISTOFFEL, v. BIANCHI, *Geom. diff.*, pag. 90-91.

L'ultima formola corrisponde ad una di GAUSS (*Disq. circa sup. curvas ecc.*); le altre due corrispondono a formole trovate prima da MAINARDI (*Ist. Lomb.*, IX, pag. 395. (1856)); e più tardi ritrovate da CODAZZI (*Ann. di mat.*, II (1868); esse vanno sotto il nome di *formole di* CODAZZI.

Date due forme quadratiche differenziali

$$f = E\,d\,u^2 + 2\,F\,d\,u\,d\,v + G\,d\,v^2$$
$$\varphi = D\,d\,u^2 + 2\,D'\,d\,u\,d\,v + D''\,d\,v^2$$

delle quali la prima sia DEFINITA *(cioè abbia segno costante, il che si ha quando* $E\,G - F^2 > 0$), *perchè esista una superficie che le ammetta come prima e seconda forma differenziale è necessario e sufficiente che sieno soddisfatte le tre formole precedenti (scritte naturalmente per il caso generale); in tal caso la superficie è unica e determinata nella sua forma, ma non naturalmente nella sua posizione nello spazio, e per trovare effettivamente l'equazione della superficie bisogna integrare una equazione del tipo di Riccati.*

Se in particolare nella prima forma differenziale fondamentale di una superficie è

$$E = G, \qquad F = 0$$

il sistema di linee coordinate si dice *ortogonale isotermo* e u, v si dicono *parametri isometrici*.

I sistemi isotermi dividono la superficie in quadrati infinitesimi.

Le linee u, v costituiscano un *sistema isotermo a parametri isometrici*, cioè la prima forma differenziale sia ridotta alla forma

$$d s^2 = E (d u^2 + d v^2).$$

Ora è chiaro che se pongo

$$u = \Phi (u')$$
$$v = \Psi (v')$$

dove Φ Ψ sieno due funzioni arbitrarie, le linee coordinate $u =$ cost., $v =$ cost., non restano sostanzialmente mutate, cioè le $u' =$ cost., $v' =$ cost. sono le stesse delle precedenti; però in coordinate u', v' la forma differenziale non appare più sotto *forma isometrica*, cioè a dire si ha

$$d s^2 = E \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u'} \right)^2 d u'^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial v'} \right)^2 d v'^2 \right]$$

e i coefficienti di $d u'^2$ e $d v'^2$ non sono più eguali, per quanto il sistema di coordinate, essendo il medesimo di quello di prima, sia da reputarsi anche *isotermo*.

Si presenta quindi qui la necessità di introdurre una distinzione in riguardo al concetto sopra introdotto.

Un sistema (u, v) si dirà semplicemente *isotermo* se sono soddisfatte le condizioni

$$F = 0, \qquad \frac{E}{G} = \frac{U}{V}$$

dove U, V sono funzioni rispettivamente di sola u,

e di sola v, e si chiamerà invece *isotermo a parametri isometrici* se si ha dippiù $E = G$.

Ogni sistema semplicemente isotermo può ridursi sempre a forma isometrica.

Si può sempre in ∞ *modi eseguire un tale cangiamento di variabili* (u, v) *in variabili* (u', v') *cosicchè il nuovo sistema sia isotermo.*

Dato sulla superficie un sistema isotermo (u, v), *ogni altro sistema isotermo* (u', v') *si ottiene ponendo la variabile complessa* $u' + i v'$ *funzione della variabile complessa* $u + i v$, *cioè:*

$$u' + i v' = \Phi (u + i v)$$

dove Φ *è il simbolo di una funzione arbitraria.*

La condizione necessaria e sufficiente affinchè le linee $\varphi =$ cost. *insieme colle loro traiettorie ortogonali, formino un sistema isotermo è che il rapporto dei due parametri differenziali 1.° e 2.° di* φ * *sia funzione di* φ *soltanto.*

Su ogni superficie di rotazione i meridiani e i paralleli formano un sistema isotermo.

---

* Per la definizione generale di parametro differenziale primo e secondo di una funzione φ, vedi *Repert. I, pag. 239, 240.* Essi si indicano coi simboli $\Delta_1 \varphi$ e $\Delta_2 \varphi$ e sono, nel nostro caso:

$$\Delta_1 \varphi = \frac{E\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} + G\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2}{EG - F^2}$$

$$\Delta_2 \varphi = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\frac{G\frac{\partial \varphi}{\partial u} - F\frac{\partial \varphi}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{E\frac{\partial \varphi}{\partial v} - F\frac{\partial \varphi}{\partial u}}{\sqrt{EG - F^2}}\right\}.$$

Se una superficie è tale che il suo elemento lineare può ridursi alla forma $(U + V)(d u^2 + d v^2)$ dove U V sono funzioni rispett. di sola u e di sola v, allora si dice, che *la superficie è del tipo di* Liouville.

Alle superficie di Liouville appartengono, le quadriche e le superficie di rotazione.

Recenti lavori sulle superficie di Liouville sono quelli di Koenigs (*Compt. Rend.*, 1889); Staeckel (*Math. Ann.*, XXXV), Ricci (*Rend. Lincei*, 1893).

Supponiamo dato un sistema di coordinate (u, v) *isotermo* sulla superficie, e ridotto a forma isometrica, in modo cioè che sia

$$d s^2 = \lambda (d u^2 + d v^2),$$

e interpretiamo u, v come le coordinate cartesiane ortogonali di un punto di un piano. Ad ogni punto della superficie corrisponderà un punto del piano, e *si ha così una rappresentazione piana di una porzione di superficie.*

Una tale rappresentazione è conforme, *cioè gli angoli corrispondenti sono eguali.*

In generale sieno u, v coordinate *isometriche* sulla superficie o su di una sua parte; *per avere la più generale rappresentazione* conforme *di quella superficie su di un piano, su cui le coordinate cartesiane si chiamino x, y, basta porre la variabile complessa $u + i v$, funzione arbitraria della variabile complessa $x + i y$, ovvero dell'altra $x - i y$; nel primo caso gli angoli corrispondenti sono eguali e diretti nello stesso senso e nell'altro caso sono eguali e diretti in senso contrario.*

Se poi si ha una seconda superficie o porzione di superficie su cui le coordinate *isometriche* sieno u' v', *per avere la più generale rappresentazione conforme di una superficie sull'altra, basta porre la variabile complessa* $u + i\,v$ *funzione arbitraria di una delle due altre* $u' + i\,v'$ ovvero $u - i\,v'$ (Cfr. su ciò anche le pag. 386-387 del *Repertorio* vol. I).

Una rappresentazione di una porzione di superficie sulla sfera si ottiene facendo corrispondere ai punti della superficie, quelli di una sfera in modo che nei punti corrispondenti le due superficie abbiano *normali parallele*; propriamente, dal centro di una sfera conduciamo i raggi paralleli alle direzioni positive delle normali nei vari punti della superficie; gli estremi di tali raggi saranno i corrispondenti sulla sfera, dei punti della superficie. Tale rappresentazione si suol chiamare *la rappresentazione sferica di* Gauss.

Una tale rappresentazione non è in generale conforme; essa è conforme solo per le superficie a curvatura media nulla (minime), (v. più sotto), e per la sfera.

I coefficienti e, f, g *della forma differenziale (in coordinate* u, v*) che dà il quadrato dell'elemento lineare della sfera rappresentativa, sono dati dalle formole*:

$$e = -(K\,E + H\,D)$$

$$f = -(K\,F + H\,D')$$

$$g = -(K\,G + H\,D'')$$

essendo *

$$K = \frac{D\,D'' - D'^2}{E\,G - F^2}, \quad H = \frac{2\,F\,D' - E\,D'' - G\,D}{E\,G - F^2}.$$

La forma differenziale

$$e\,d\,u^2 + 2\,f\,d\,u\,d\,v + g\,d\,v^2$$

si suol chiamare *la terza forma differenziale relativa alla superficie*.

Per le proprietà della rappresentazione sferica relativamente alle linee di curvatura, assintotiche, ecc. v. il paragrafo seguente.

I primi lavori sulla teoria differenziale delle superficie sono dovuti ad EULERO e MEUSNIER, cui si devono le prime ricerche sulla curvatura delle superficie (*Mém. de Berlin*, 1760; *Savants Étrang.*, 1785). I due lavori fondamentali di Geometria differenziale furono indi quelli celebri di MONGE (*Application de l'analyse à la Géométrie*, Paris, 1807-1809; cfr. l'edizione del 1850 curata da LIOUVILLE) e di GAUSS (*Disquisitiones generales circa superficies curvas*, Op., IV). Tralasciando di citare le altre memorie particolari, che citeremo a loro luogo, diremo solo che i più recenti ed estesi trattati di Geometria differenziale sono specialmente quelli di DARBOUX (*Th. générale des surfaces*, Paris, 1887-1896), e di BIANCHI (Pisa, 1894).

Nelle opere più recenti sono adoperati per i calcoli, i cosiddetti simboli di CHRISTOFFEL (*Crelle*,

* (Per i significati di K e H v. più sotto il § 10.)

LXX) che riportiamo qui per comodità degli studiosi:

a) Simboli di 1.ª specie:

$$\begin{bmatrix}11\\1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u}\,,\qquad \begin{bmatrix}12\\1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}$$

$$\begin{bmatrix}11\\2\end{bmatrix}=\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}\,,\qquad \begin{bmatrix}22\\1\end{bmatrix}=\frac{\partial F}{\partial v}-\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}$$

$$\begin{bmatrix}12\\2\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}\,,\qquad \begin{bmatrix}22\\2\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v}.$$

b) Simboli di 2.ª specie:

$$\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}=\frac{G\frac{\partial E}{\partial u}+F\frac{\partial E}{\partial v}-2F\frac{\partial F}{\partial u}}{2(EG-F^2)}$$

$$\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}=\frac{-F\frac{\partial E}{\partial u}+2E\frac{\partial F}{\partial u}-E\frac{\partial E}{\partial v}}{2(EG-F^2)}$$

$$\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}=\frac{G\frac{\partial E}{\partial v}-F\frac{\partial G}{\partial u}}{2(EG-F^2)}$$

$$\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}=\frac{E\frac{\partial G}{\partial u}-F\frac{\partial E}{\partial v}}{2(EG-F^2)}$$

$$\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}=\frac{-F\frac{\partial G}{\partial v}+2G\frac{\partial F}{\partial v}-G\frac{\partial G}{\partial u}}{2(EG-F^2)}$$

$$\left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\} = \frac{E\dfrac{\partial G}{\partial v} + F\dfrac{\partial G}{\partial u} - 2F\dfrac{\partial F}{\partial v}}{2(EG - F^2)}.$$

Le derivate dei coefficienti D, D', D'' della seconda forma differenziale, si esprimono mediante le D stesse e i simboli di CHRISTOFFEL con formole osservate da WEINGARTEN (v. BIANCHI, *Gem. diff.*, pag. 123).

Dalle cose esposte in questo paragrafo risulta che gli studi sull'elemento lineare delle superficie, e sulle coordinate curvilinee sono affini a quelli sulle forme differenziali quadratiche, sui parametri differenziali, ecc. Per la bibliografia relativa a questi studi rimandiamo perciò al Cap. IX, § 4 del volume I di quest'opera. Ricorderemo solo che in tale ordine di idee sono fondamentali le memorie di BELTRAMI (*Giorn. di Batt.*, II; *Ann. di mat.*, I, 1867; *Mem. Bologna*, 1869; *Math. Ann.*, I).

§ 9. — LINEE TRACCIATE SULLE SUPERFICIE LINEE DI CURVATURA. TANGENTI CONIUGATE. LINEE GEODETICHE. LINEE ASSINTOTICHE.

Una linea tracciata su di una superficie si dirà *linea di curvatura* quando le normali alla superficie condotte per i punti di essa sono le tangenti di una linea storta, cioè formano una superficie sviluppabile.

Le linee di curvatura formano un doppio sistema ortogonale, cioè:

Per ogni punto di una superficie passano sempre due linee di curvatura fra loro ortogonali.

Spostandosi lungo una linea di curvatura deve aversi

$$dx : dy : dz = dX : dY : dZ.$$

L'equazione differenziale delle linee di curvatura è

$$(FD'' - GD')\,dv^2 + (ED'' - GD)\,du\,dv + \\ + (ED' - FD)\,du^2 = 0$$

dove D, D', D'' *hanno i valori assegnati precedentemente* (v. § 8).

La precedente equazione può anche scriversi

$$\begin{vmatrix} E\,du + F\,dv, & F\,du + G\,dv \\ D\,du + D'\,dv, & D'\,du + D''\,dv \end{vmatrix} = 0.$$

Se $z = f(x\,y)$ è l'equazione della superficie, e se si chiamano p, q le derivate prime di z rispetto a x e y, e r, s, t le derivate seconde, *la equazione differenziale delle linee di curvatura è*

$$[(1+p^2)\,s - p\,q\,r]\,dx^2 + [(1+p^2)\,t - (1+q^2)\,r]\,dx\,dy + \\ + [p\,q\,t - (1+q^2)\,s]\,dy^2 = 0.$$

Sulla sfera e sul piano ogni linea è linea di curvatura.

Le linee di curvatura di una sviluppabile sono le generatrici e le loro traiettorie ortogonali.

Se due superficie si intersecano lungo una linea di curvatura per entrambe, esse si tagliano sotto angolo costante.

Viceversa, se le due superficie si tagliano sotto angolo costante, e la loro intersezione è linea di curvatura per una di esse lo sarà anche per l'altra.

Nella rappresentazione sferica di Gauss, *il sistema di linee della superficie che si conserva ortogonale è quello delle linee di curvatura.*

Si dicono *superficie modanate (moulures* secondo Monge) quelle che hanno le linee di curvatura di un sistema in piani normali alla superficie.

Una superficie modanata è generata dal movimento di una linea piana, il cui piano rotola senza strisciare su di una superficie sviluppabile.

Se in un punto di una superficie conduciamo le due linee di curvatura, le tangenti ad esse in quel punto, e la normale alla superficie, il piano condotto per la normale e per una delle tangenti indicate, taglia la superficie lungo una curva che si chiama *sezione normale principale in quel punto.*

Di quì si ha che in ogni punto di una superficie esistono due sezioni normali principali che si tagliano ad angolo retto.

I raggi di curvatura in quel punto $r_1\, r_2$ di queste due sezioni normali principali si chiamano *raggi principali di curvatura della superficie*, e i centri di curvatura delle medesime sezioni normali sono *i due centri di curvatura della superficie* in quel punto. Se questi sono da parti opposte rispetto al punto della superficie i raggi di

curvature principali saranno naturalmente da considerarsi di segni opposti.

Se le linee coordinate u, v, sono le linee di curvatura della superficie si hanno le relazioni

$$D = -\frac{E}{r_2}, \quad D' = 0, \quad D'' = -\frac{G}{r_1}, \quad F = 0$$

dove r_1 r_2 sono i raggi di curvatura delle sezioni normali tangenti rispettivamente alle linee $v =$ cost, $u =$ cost.

I raggi principali r_1 r_2 sono dati dalle radici dell'equazione

$$(D D'' - D'^2)\, r^2 + (E D'' + D G - 2 F D')\, r + \\ + (E G - F^2) = 0.$$

Il raggio di curvatura di una qualunque sezione normale della superficie si esprime mediante r_1 r_2 colla formola

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\theta}{r_2} + \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{r_1} \qquad \textit{(form. di Eulero)}$$

dove θ è l'angolo che il piano della sezione fa col piano di quella sezione normale principale cui corrisponde il raggio di curvatura r_2.

Con questa formola i raggi di curvatura delle sezioni normali si esprimono sempre mediante i principali.

Col seguente altro teorema i raggi di curvatura di qualunque linea tracciata su di una superficie si esprimono mediante quelli delle sezioni normali.

Il raggio di curvatura di una qualunque linea tracciata su di una superficie è eguale a quello

della sezione normale tangente alla curva, moltiplicato per il coseno dell'angolo che il piano della sezione normale fa col piano osculatore della curva (*teorema di* MEUSNIER).

Se r_1 r_2 sono ambedue del medesimo segno, il punto corrispondente della superficie si dice *punto ellittico;* se $r_1 = r_2$ il punto si dice *circolare o ombelico*; se r_1, r_2 sono di segno opposto, il punto si dice *punto iperbolico;* e se uno di questi due raggi è infinito, il punto si dice *parabolico.*

Nel caso del punto ellittico, la superficie, nell'intorno del punto, giace tutta da una medesima parte del piano tangente; nel caso del punto iperbolico la superficie, nell'intorno del punto, giace ora da una parte ora dall'altra del piano tangente.

Se $D D'' - D'^2$ *è maggiore di zero, il punto è ellittico; se la stessa quantità è minore di zero, il punto è iperbolico.*

La distinzione qui fatta di punti in ellittici, parabolici, iperbolici corrisponde a quella fatta per le superficie algebriche nel Cap. IX, § 1 (p. 290-291); *per* INDICATRICE DI DUPIN (v. *Id.*) *può assumersi quella di equazione*

$$\frac{\xi^2}{r_1} + \frac{\eta^2}{r_2} = 1$$

situata nel piano tangente alla superficie, e per la quale gli assi coordinati ξ, η *coincidono rispett. colle direzioni delle tangenti alle due linee di curvatura passanti per quel punto.*

Il quadrato di un semidiametro ρ di questa el-

lisse, inclinato dell'angolo θ all'asse η, è dato da

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{\cos^2\theta}{r_2} + \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{r_1}$$

e paragonando questa formola con quella di EULERO si ha $\rho^2 = R$; cioè: *il quadrato di un semidiametro dell' indicatrice di Dupin eguaglia il raggio di curvatura della sezione normale condotta per il diametro medesimo;* questo teorema è di DUPIN, (*Développements de géom.* Paris, 1813) ed esso può considerarsi come un' interpretazione geometrica della formola di EULERO; di qui è venuta la denominazione di *indicatrice di Dupin.*

Due diametri coniugati (v. pag. 140) nella indicatrice di Dupin, si dicono *due tangenti coniugate* alla superficie. Un doppio sistema di linee sulla superficie si dirà *coniugato*, se in ogni punto della superficie, le tangenti alle due linee che vi passano sono coniugate.

Chiamando θ, θ' gli angoli delle due tangenti coniugate, colla linea di curvatura v, si ha la relazione

$$\operatorname{tg}\theta \,.\, \operatorname{tg}\theta' = -\frac{r_1}{r_2}.$$

Per un sistema coniugato deve essere sempre $D' = 0$, e se $D' = 0$ il sistema di linee (u, v) è coniugato.

Nella rappresentazione sferica di Gauss (v. § 8), *l'angolo di due direzioni coniugate o viene conservato o cangiato nel suo supplementare secondochè il punto della superficie è iperbolico o ellittico.*

Il seguente teorema può dare anche una nuova definizione di tangenti coniugate:

Due tangenti ad una superficie in un punto P sono coniugate, se tracciata per P sulla superficie una linea tangente ad una di esse la sviluppabile circoscritta alla superficie lungo quella linea, ha per generatrice l'altra.

Il sistema delle linee di curvatura è l'unico che è contemporaneamente ortogonale e coniugato.

Le *linee assintotiche* sono quelle linee, tracciate sulla superficie, tali che il piano osculatore della linea in ogni punto coincide col piano tangente alla superficie.

Le assintotiche formano un sistema doppio; per ogni punto della superficie ne passano due, in generale non ortogonali. In ogni punto la tangente ad un'assintotica coincide colla propria coniugata.

Le tangenti alle due assintotiche in ogni punto coincidono cogli assintoti dell'indicatrice di Dupin.

Per un'assintotica deve essere soddisfatta la relazione

$$D\,d\,u^2 + 2\,D'\,d\,u\,d\,v + D''\,d\,v^2 = 0.$$

Se si chiamano al solito con p, q; r, s, t le derivate prime e seconde di z rispetto ad x e y ricavate dall'equazione della superficie, *l'equazione differenziale delle assintotiche è*

$$r\,d\,x^2 + 2\,s\,d\,x\,d\,y + t\,d\,y^2 = 0.$$

Le assintotiche sono reali solo nei punti iperbolici della superficie, e sono immaginarie nei punti ellittici.

Per una superficie sviluppabile i due sistemi di linee assintotiche coincidono (colle generatrici della sviluppabile stessa).

Il quadrato della torsione delle assintotiche in un punto è eguale alla curvatura totale della superficie (v. § 10) *nel punto, presa con segno contrario;*

$$\frac{1}{T^2} = -\frac{1}{r_1 r_2} \qquad \textit{(teor. di Enneper);}$$

quindi anche:

In ogni punto della superficie le due assintotiche che vi passano hanno torsioni eguali in valore assoluto.

Le trasformazioni proiettive conservano i sistemi coniugati, e le linee assintotiche; e le trasformazioni per raggi vettori reciproci conservano le linee di curvatura (Darboux).

Nella rappresentazione sferica di Gauss le direzioni delle assintotiche vengono deviate di un angolo retto.

Supponiamo che sulla sfera rappresentativa si chiamino u', v' le linee che sono immagini delle linee ASSINTOTICHE su di una superficie; indicando allora con $\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}'$ $\begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}'$ *i simboli di Christoffel* (v. § 8) relativi all'elemento lineare sferico *si ha la relazione semplice:*

$$\frac{\partial}{\partial u'} \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}' = \frac{\partial}{\partial v'} \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}' .$$

Se una superficie si riferisce al sistema delle sue linee assintotiche il quadrato dell'elemento lineare prende la forma

$$\rho^2 (e\,d\,u^2 - 2\,f\,d\,u\,d\,v + g\,d\,v^2)$$

dove $\rho^2 = - r_1 r_2$ *ed* e, f, g *sono i coefficienti della terza forma differenziale fondamentale* (v. § 8).

Per una superficie rigata (v. Cap. XIII, § 6) *le assintotiche di un sistema sono le generatrici stesse.*

Il rapporto anarmonico dei 4 punti ove una generatrice incontra quattro assintotiche fisse dell'altro sistema è costante (teor. di Paul Serret).

Se di una linea L tracciata su di una superficie per un punto P, ne facciamo la proiezione ortogonale sul piano tangente in P, e di questa proiezione consideriamo la curvatura in P, questa curvatura si chiama la *curvatura geodetica* o *tangenziale* o *di sviluppo nel punto* P della linea tracciata sulla superficie, e il centro di curvatura della proiezione di L nel piano tangente si dice *centro di curvatura geodetica della linea L in P.*

La curvatura geodetica di una linea L su di una superficie è eguale alla curvatura ordinaria della linea piana in cui L si trasforma quando si sviluppi in un piano la sviluppabile circoscritta alla superficie lungo la linea L; di qui il nome di *curvatura di sviluppo.*

Dato sulla superficie un sistema qualunque u, v, di linee coordinate, e una linea qualunque di cui

l'equazione è $\varphi(u, v) = 0$, la curvatura geodetica $\frac{1}{\rho_\varphi}$ di tal linea φ in un punto è

$$\frac{1}{\rho_\varphi} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \times$$

$$\times \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{F \frac{\partial \varphi}{\partial v} - G \frac{\partial \varphi}{\partial u}}{\sqrt{E\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 - 2F \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} + G\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2}} \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{F \frac{\partial \varphi}{\partial u} - E \frac{\partial \varphi}{\partial v}}{\sqrt{E\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 - 2F \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} + G\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2}} \right] \right\}.$$

Questa formola si suol chiamare *la formola di* BONNET.

Il raggio di curvatura geodetica di un parallelo su di una superficie di rotazione è eguale alla porzione di tangente al meridiano compreso fra il punto di contatto e l'asse di rotazione.

Una linea tracciata su di una superficie, e che sulla superficie segna il più breve cammino che unisce due qualunque dei suoi punti, a distanza sufficientemente piccola, si chiama *una geodetica della superficie.*

Per una linea geodetica la normale principale in ogni punto coincide colla normale della superficie. Questa proprietà può assumersi come altra definizione delle linee geodetiche.

Le linee geodetiche sono quelle in cui la curvatura geodetica in ogni punto è nulla.

Una geodetica è IN GENERALE *individuata quando ne sono fissati due punti, e quindi anche quando è fissato un punto per cui deve passare e la direzione della sua tangente in tal punto.*

La curvatura geodetica di una linea in un punto si può anche definire nel seguente modo (donde il suo nome):

Si considerino due punti $P P'$ infinitamente vicini sulla curva e in $P P'$ le geodetiche tangenti; il limite del rapporto dell'angolo che queste fanno fra loro, all'arco $P P'$ della linea, quando P' si avvicina indefinitivamente a P è la curvatura geodetica della linea in P. In tal modo la definizione di curvatura geodetica è la naturale estensioné della definizione di curvatura delle linee piane.

Si deve a BELTRAMI (*Giorn. di Batt.*, II) un teorema per *la determinazione del centro di curvatura geodetica* di una linea in un punto.

Disegniamo sulla superficie un sistema ∞^1 di linee geodetiche g, e una linea l a tangenti coniugate colle g; le tangenti alle g nei punti della linea l generano una sviluppabile, con uno spigolo di regresso s. Ad ogni punto di l corrisponderà così un punto di s, considerando come corrispondente ad un punto P di l, quel punto M, in cui la generatrice della sviluppabile, passante per P tocca lo spigolo di regresso.

Il punto M è centro di curvatura geodetica in P della linea passante per P e perpendicolare alla geodetica che anche vi passa.

L'equazione differenziale delle linee geodetiche è (GAUSS).

$$\sqrt{EG - F^2}\, d\theta = \frac{1}{2}\frac{F}{E}\left\{\frac{\partial E}{\partial u} du + \frac{\partial E}{\partial v} dv\right\} +$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v} du - \frac{\partial F}{\partial u} du - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u} dv$$

dove θ *è l'angolo che la geodetica fa colle linee* $u =$ cost., *e quindi*

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{E}}\left(E\frac{du}{ds} + F\frac{dv}{ds}\right)$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{E}}\frac{dv}{ds}.$$

Se le linee u, v *sono ortogonali si ha:*

$$d\theta = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} du - \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} dv.$$

Nel caso in cui il sistema delle linee u, v *sia ortogonale isotermo, l'equazione differenziale delle linee geodetiche è*

$$\sqrt{E}\, d\theta = \frac{\partial\sqrt{E}}{dv} du - \frac{\partial\sqrt{E}}{du} dv.$$

Per una superficie del tipo di Liouville (v. § 8), *in cui cioè l'elemento lineare è riducibile alla forma*

$$[\alpha(u) + \beta(v)]\,(du^2 + dv^2)$$

l'equazione delle geodetiche è

$$\int \frac{d\,u}{\sqrt{\alpha(u) - a}} \mp \int \frac{d\,v}{\sqrt{\beta(v) + a}} = b$$

dove a, b sono due costanti d'integrazione. Come si vede dunque in tal caso l'equazione delle geodetiche si sa immediatamente integrare.

Per le sviluppabili l'equazione differenziale delle geodetiche si integra con due quadrature.

In ogni punto di una geodetica tracciata su di una superficie di rotazione * *è costante il prodotto del raggio del parallelo per il seno dell'angolo di inclinazione sui meridiani (teorema di* Clairaut).

Se una linea di curvatura è geodetica, essa è piana; e ogni linea geodetica piana è linea di curvatura.

Gli archi intercetti sulle geodetiche da due loro traiettorie ortogonali sono di eguale lunghezza. Perciò le traiettorie ortogonali di un sistema di ∞^1 linee geodetiche si dicono *linee geodeticamente parallele.*

Si dice *distanza geodetica* di due punti la lunghezza dell'arco di geodetica che passa per essi.

Una linea, sulla superficie, i cui punti hanno la stessa distanza geodetica da un punto fisso della superficie stessa, si dice *un circolo geodetico.*

Una linea i cui punti hanno distanze geodetiche tali da due punti fissi, che le loro somme o le loro differenze sieno costanti, si dice *una ellisse o un'iperbole geodetica.*

---

* Le superficie di rotazione, come abbiamo detto al § 8, sono superficie del tipo di *Liouville.*

Le superficie del tipo di Liouville sono quelle sulle quali esiste un sistema ortogonale isotermo di ellissi e iperboli geodetiche (DINI, *Ann. di mat.*, III, 1869).

Si dice *triangolo geodetico* quello formato da tre archi di curve geodetiche.

Chiamando con GAUSS, *curvatura totale di una area superficiale* il valore dell'integrale doppio:

$$\int K d\sigma$$

esteso all'area, dove K è la cosiddetta *curvatura della superficie* in ciascun punto (v. § 10) e $d\sigma$ è l'elemento di area superficiale, si ha il teorema (di GAUSS):

La curvatura totale di un triangolo geodetico è eguale all'eccesso della somma dei suoi tre angoli sopra due angoli retti. Donde (se $K =$ cost.):

Sopra una superficie a curvatura costante l'area di ogni triangolo geodetico è proporzionale all'eccesso della somma dei suoi tre angoli su due angoli retti (v. il teor. analogo d'ALBERTO GIRARD per i triangoli sferici, pag. 90).

Questo teorema fu generalizzato da SCHERING (*Gött. Nach.*, 1867).

Per la geometria dei *triangoli geodetici* si veggano CHRISTOFFEL (*Berl. Abh.*, 1868), WEINGARTEN (*Berl. Berich.*, 1882), v. MANGOLDT (*Crelle*, XCIV).

Di una linea tracciata su di una superficie si dice *torsione geodetica* in un punto la torsione della geodetica tangente ad essa in quel punto.

La torsione geodetica di una linea coincide colla torsione ordinaria per tutte e sole quelle linee la cui normale principale è inclinata di un angolo costante sulla superficie; in particolare per le geodetiche e per le assintotiche.

Chiamando $\frac{1}{T_u}, \frac{1}{T_v}$ le torsioni geodetiche delle linee coordinate u, v, *si ha*

$$\frac{1}{T_u} = \frac{G D' - F D''}{G \sqrt{EG - F^2}}$$

$$\frac{1}{T_v} = \frac{F D - E D'}{E \sqrt{EG - F^2}}.$$

La relazione fra la torsione geodetica $\frac{1}{T_l}$ *e la assoluta* $\frac{1}{T}$ *di una linea qualunque* l *è*

$$\frac{1}{T_l} = \frac{1}{T} + \frac{d\omega}{ds}$$

dove ω *è l'angolo compreso fra la normale principale della linea* l *e la normale alla superficie, e* s *è l'arco della linea* l.

Le linee di curvatura sono quelle che in ogni punto hanno la torsione geodetica eguale a zero.

Abbiamo in altro luogo definita la *linea di stringimento di una superficie rigata* (v. Cap. XIII, § 6); ora aggiungiamo:

Per ogni punto della linea di stringimento di una superficie rigata è nulla la curvatura geodetica delle traiettorie ortogonali alle generatrici.

Sulle geodetiche dell'ellissoide notiamo i seguenti teoremi:

Ogni geodetica uscente da un ombelico dell'ellissoide passa per l'ombelico diametralmente opposto.

Due ombelichi opposti possono riunirsi con infiniti archi geodetici i quali hanno tutti la stessa lunghezza (come nella sfera).

Congiungendo per mezzo di linee geodetiche un punto M di un ellissoide con due ombelichi non opposti, le direzioni delle linee di curvatura passanti per M sono le bisettrici degli angoli delle due linee geodetiche.

Per ogni linea geodetica tracciata su di un ellissoide è costante il prodotto della distanza del centro dal piano tangente in un punto della geodetica, per la lunghezza del diametro parallelo alla tangente della geodetica nel medesimo punto.

La considerazione delle linee di curvatura fu cominciata da Monge (cit. § 8); a Dupin (*Dévelop. de géom.* Paris, 1813) si deve la considerazione delle *assintotiche* e delle *direzioni coniugate*, come anche la introduzione della *indicatrice* che porta il suo nome.

Sulle linee di curvatura si sono succeduti poi moltissimi lavori da vari punti di vista; Brioschi (*Ann. di Tortolini*, IV, 1853), Ribaucour (*Compt. Rend.*, 1872), Darboux (*Id.*, 1877, 1881), ecc.

Sulle linee di curvatura passanti per un ombelico, citeremo i lavori di Cayley (*Phil. Mag.*, 1863; *Quart. Journ.*, XI, 1870), Frost (*Id.*, X), Hoppe (*Arch. f. Math.*, LXX, 1883). Numerose sono state

le ricerche sulle superficie aventi linee di curvatura piane o sferiche; SERRET (*Crelle*, XVIII), BONNET (*Journ. Éc. polyt.*, XXXIII, 1853), DINI (*Ann. di mat.*, I; *Mem. Soc. dei Quaranta*, III, 1869, ecc.), ENNEPER (*Crelle*, XCIV), e molti altri.

Le linee geodetiche furono considerate da GAUSS; esse furono chiamate *linee minime* da LEGENDRE, e il nome di *geodetiche* fu loro dato da LIOUVILLE. I lavori più antichi sulle geodetiche, oltre quelli di GAUSS, sono quelli di STEINER (*Berl. Ber.*, 1839), JACOBI (*Crelle*, XIX) che fece la determinazione delle geodetiche sull'ellissoide, MINDING (*Crelle*, XX), LIOUVILLE (v. l'*Appl. de l'Analyse à la Géom.* di MONGE, Paris, 1850; ediz. curata da LIOUVILLE), BRIOSCHI (*Ann. di Tort.*, IV), BELTRAMI (*Ist. Lomb.*, 1868), ecc. Lavori più recenti sono quelli di WEINGARTEN (*Berl. Ber.*, 1882), BRILL (*Münch. Abh.*, 1883), RICCI (*Ist. Veneto*, 1893-94). Sulla storia delle geodetiche v. STAECKEL (*Leip. Ber.*, 1893). Per le geodetiche dell'ellissoide vedi anche il 2.° volume del trattato sulle *Funz. ellitt.* di HALPHEN).

§ 10. — CURVATURE DELLE SUPERFICIE. APPLICABILITÀ DELLE SUPERFICIE.

Le espressioni

$$K = \frac{1}{r_1 r_2}$$

$$H = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$$

si chiamano rispett. *curvatura totale* (o *integra*) *di* Gauss e *curvatura media* della superficie nel punto considerato.

Si hanno le formole:

$$K = \frac{D\,D'' - D'^2}{E\,G - F^2}$$

$$H = \frac{2\,F\,D' - E\,D'' - G\,D}{E\,G - F^2}.$$

Un'altra curvatura per una superficie è stata introdotta da Casorati ed ha per espressione $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_1{}^2} + \frac{1}{r_2{}^2}\right)$ (*Acta Math.*, XIV; v. anche Catalan, *ibid.*, XV).

La curvatura K si può esprimere con una formola nella quale entrano solo i coefficienti della prima forma differenziale:

$$K = \frac{1}{2(E\,G - F^2)} \times$$
$$\times \left\{ \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{F}{E\sqrt{E\,G - F^2}}\frac{\partial E}{\partial v} - \frac{1}{\sqrt{E\,G - F^2}}\frac{\partial G}{\partial u}\right] + \right.$$
$$+ \frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{2}{\sqrt{E\,G - F^2}}\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{\sqrt{E\,G - F^2}}\frac{\partial E}{\partial v} - \right.$$
$$\left.\left. - \frac{F}{E\sqrt{E\,G - F^2}}\frac{\partial E}{\partial u}\right]\right\}.$$

Se l'equazione della superficie è data sotto la forma

$$z = f(x\,y),$$

e se si pone

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t$$

si hanno le formole:

$$K = \frac{r t - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2}$$

$$H = \frac{2 p q s - (1 + p^2) t - (1 + q^2) r}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

La curvatura K è positiva nei punti ellittici, negativa nei punti iperbolici, zero nei punti parabolici.

La curvatura K di una superficie rigata è sempre negativa o zero.

Se lungo una generatrice essa non è zero, è massima in valore assoluto nel punto centrale (v. Cap. XIII, § 6) *e va diminuendo allontanandosi da questo sulla generatrice stessa.*

Una superficie a curvatura K eguale a zero in tutti i punti, è una sviluppabile e reciprocamente.

La curvatura K di Gauss si può esprimere mediante le curvature geodetiche $\frac{1}{\rho_u}, \frac{1}{\rho_v}$ *delle due linee coordinate, colla formola (di* LIOUVILLE, *J. de Liouville*, XVI)

$$K = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left\{ \frac{\partial^2 \Omega}{\partial u \partial v} + \frac{\partial}{\partial u} \frac{\sqrt{G}}{\rho_u} + \frac{\partial}{\partial v} \frac{\sqrt{E}}{\rho_v} \right\}$$

essendo Ω *l'angolo formato dalle due linee coordinate.*

La curvatura totale di una superficie si può anche definire come *l'inversa del limite del rapporto*

dell'area infinitesima superficiale all'area sferica corrispondente nella rappresentazione sferica della superficie.

Se fra i punti di due superficie si può stabilire una corrispondenza tale che gli elementi lineari corrispondenti risultino eguali, le due superficie si dicono *applicabili l'una sull'altra.*

Se due superficie sono applicabili l'una sull'altra, colla flessione si può distendere una di esse (o una porzione di una di esse) senza rotture e senza duplicature, sull'altra.

La curvatura totale di una superficie, in ciascun punto non cangia, per qualsiasi flessione della superficie stessa; ovvero, ciò che è lo stesso, *due superficie applicabili hanno eguali curvature totali nei punti corrispondenti.* Perciò si suol dire che la curvatura *K è un invariante di flessione.*

Flettendo la superficie, non muta la curvatura geodetica di una qualunque linea tracciata sulla superficie, e quindi, in particolare, *le geodetiche della superficie si mutano nelle geodetiche della superficie trasformata.*

La eguaglianza della curvatura totale delle due superficie in ciascuna coppia di punti corrispondenti, *non è sufficiente perchè le due superficie sieno applicabili;* esso diventa solo sufficiente se in ciascun punto delle due superficie la curvatura è costante, cioè:

Due superficie colla medesima curvatura totale COSTANTE *sono sempre applicabili in infiniti modi l'una sull'altra*; quindi:

Una superficie sviluppabile (curvatura eguale a

zero) è sempre applicabile sul piano, e una superficie a curvatura costante positiva è sempre applicabile su di una sfera.

Ogni superficie a curvatura costante ammette ∞^3 *flessioni in sè stessa.*

Ogni superficie che ammette ∞ flessioni continue in sè stessa è applicabile su di una superficie di rotazione.

Si dicono *elicoidi* le superficie generate da una linea piana o storta la quale roti intorno ad un asse, che a sua volta strisci contemporaneamente su sè stesso, in modo che sia costante il rapporto delle due velocità (di rotazione e di traslazione).

Ogni elicoide è sempre applicabile su di una superficie di rotazione; le eliche si distendono sui paralleli (teor. di Bour).

Se di una superficie flessibile si mantiene fissa una curva, la superficie non si può deformare almenochè quella curva non sia un'assintotica.

È possibile in due modi diversi, deformare una superficie in modo che una sua curva C assuma una forma arbitraria Γ, purchè la prima curvatura di Γ sia in ogni punto maggiore della curvatura geodetica di C nel punto corrispondente.

Si può deformare in infiniti modi una superficie in modo che una sua linea qualunque diventi linea di curvatura della superficie deformata.

È impossibile deformare una superficie S in modo che le assintotiche diventino le assintotiche anche della superficie deformata, almenochè S non sia una rigata, e le assintotiche che si considerano non sieno le sue generatrici rettilinee (v. § 9).

Se due superficie rigate, che non risultano per

deformazione da una stessa superficie di 2.º grado, sono applicabili l'una sull'altra, le generatrici dell'una debbono distendersi, dopo la deformazione, su quelle dell'altra (teor. di BONNET).

Si chiama *cono direttore di una superficie rigata* il cono formato dalle rette condotte da un punto e parallele rispett. alle generatrici della superficie stessa.

Ogni superficie rigata si può sempre deformare in modo che il cono direttore acquisti una forma arbitraria.

Ogni superficie rigata può flettersi in modo che una linea tracciata ad arbitrio su essa diventi linea assintotica.

Deformando la superficie rigata si può sempre fare che una sua geodetica si trasformi in una retta.

È possibile in ∞^1 *modi deformare una rigata in modo che una qualunque sua curva diventi piana.*

Le uniche superficie rigate applicabili sopra superficie di rotazione sono le deformate dell'elicoide rigata ad area minima * (v. più sotto) *e dell'iperboloide di rotazione.*

Della curvatura delle superficie si erano già occupati EULERO e MEUSNIER; ma GAUSS risolvette il problema nel § VIII delle citate *Disquisitiones* ecc. A GAUSS si deve anche la scoperta che la curvatura K non muta per flessione della super-

---

* Questo elicoide può essere generato da una retta che roti uniformemente intorno ad un asse ad essa perpendicolare, mentre questo asse striscia uniformemente su sè stesso.

ficie. Sull'applicabilità delle superficie, fra i primi lavori importanti sono da notarsi quelli di MINDING (*Crelle*, XIX), BOUR (*École polyt.*, LIX, 1861), BONNET (*Id.*, LXI, LXII), CODAZZI (*Mém. pres.* Paris, XXVII), ecc.

Altri lavori furono quelli di WEINGARTEN (*Crelle*, LIX, C), RIBAUCOUR (*Compt. Rend.*, LXX), DINI (*Giorn. di Batt.*, II), ecc.

Per la flessione delle superficie rigate uno dei primi lavori è quello di MINDING (*Crelle*, XVIII); è poi fondamentale il lavoro di BELTRAMI (*Ann. di mat.*, VII, 1865).

Recenti lavori di WEINGARTEN sulla teoria dell'applicabilità delle superficie, fondata su di un metodo nuovo, sono quelli nei *Compt. Rend.*, CXII, pag. 607, 706, e *Acta math.*, XX; un'esposizione del nuovo metodo di WEINGARTEN si trova in DARBOUX, IV, pag. 308.

§ 11. — SUPERFICIE A CURVATURA TOTALE COSTANTE. SUPERFICIE PSEUDOSFERICHE.

Una superficie a curvatura costante negativa $K = -\frac{1}{R^2}$ si suol chiamare *una superficie pseudosferica di raggio R*. Si chiama *oriciclo* una curva di una superficie pseudosferica, e che abbia la curvatura geodetica costante, eguale a $\frac{1}{R}$.

L'elemento lineare di ogni superficie a curvatura

costante positiva $K = \frac{1}{R^2}$ *si può ridurre alla forma*

$$d s^2 = d u^2 + \cos^2 \frac{u}{R} d v^2.$$

L'elemento lineare di ogni superficie a curvatura costante negativa $K = -\frac{1}{R^2}$, *si può ridurre a ciascuna delle seguenti tre forme:*

$$d s^2 = d u^2 + \cosh^2 \frac{u}{R} d v^2 \quad \textit{(tipo iperbolico)}$$

$$d s^2 = d u^2 + e^{\frac{2u}{R}} d v^2 \quad \textit{(tipo parabolico)}$$

$$d s^2 = d u^2 + R^2 \operatorname{senh}^2 \frac{u}{R} d v^2 \quad \textit{(tipo ellittico)}.$$

Per la prima forma, le linee coordinate sono le geodetiche ortogonali ($v =$ cost.) ad una geodetica fissata L, e le loro traiettorie ortogonali ($u =$ cost.)*

Per la seconda forma, le linee $v =$ cost. sono le geodetiche ortogonali di una linea L avente la curvatura geodetica costante $\frac{1}{R}$ *(oricicli)* e le linee $u =$ cost. sono le loro traiettorie ortogonali.

Per la terza forma, le linee $v =$ cost. sono le geodetiche uscenti da un punto, e le linee $u =$ cost. sono le loro traiettorie ortogonali.

---

* Un simile sistema di coordinate si assume anche per ridurre l'elemento lineare delle superficie a curvatura costante *positiva*, alla forma superiormente indicata.

L'elemento lineare di ogni superficie a curvatura costante positiva, ed eguale ad 1, riferita alle sue linee di curvatura, può porsi sotto la forma

$$d s^2 = \operatorname{senh}^2 \omega \, d u^2 + \cosh^2 \omega \, d v^2$$

dove ω *soddisfa la relazione*

$$\frac{d^2 \omega}{d u^2} + \frac{d^2 \omega}{d v^2} = - \operatorname{senh} \omega \cosh \omega.$$

L'elemento lineare d'ogni superficie pseudosferica, di raggio 1, riferita alle sue linee di curvatura può porsi sotto la forma

$$d s^2 = \cos^2 \omega \, d u^2 + \operatorname{sen}^2 \omega \, d v^2,$$

dove ω *è dato da*

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2} = \operatorname{sen} \omega \cos \omega.$$

Data una superficie a curvatura costante, esiste su essa sempre un sistema di coordinate, in modo che le geodetiche si esprimono con equazioni LINEARI *fra le coordinate, e viceversa, una superficie è a curvatura costante se su essa le geodetiche possono rappresentarsi con equazioni lineari (teor. di* BELTRAMI). Questo teorema si estende agli spazi superiori.

Consideriamo ora *le superficie pseudosferiche di rotazione*. Il loro elemento lineare riferito ai meridiani e ai paralleli è

$$d s^2 = d u^2 + \left[c e^{\frac{u}{R}} + c' e^{-\frac{u}{R}} \right]^2 d v^2.$$

Secondochè c, c', sono dello stesso segno, una di esse zero, o infine di segno contrario, *si hanno tre tipi di superficie pseudosferiche di rotazione.* Questi tre tipi prendono il nome da quello della forma che assume l'elemento lineare riferito ai meridiani e paralleli scelti come linee coordinate.

1. *Tipo iperbolico. Le costanti* c, c' *sono dello stesso segno: l' elemento lineare riferito ai meridiani e paralleli è dato da*

$$ds^2 = du^2 + \lambda^2 \cosh^2 \frac{u}{R} dv^2.$$

Tale superficie è generata dalla curva

$$x = \lambda \cosh \frac{u}{R}, \qquad y = \int \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{R^2} \operatorname{senh}^2 \frac{u}{R}}\, du$$

che rota intorno l'asse di y.

2. *Tipo parabolico. Una delle costanti* c, c' *è zero. L'elemento lineare riferito ai meridiani e paralleli è dato da*

$$ds^2 = du^2 + e^{\frac{2u}{R}} dv^2.$$

Tale superficie è generata dalla curva (trattrice)

$$x = e^{\frac{u}{R}}, \qquad y = \int \sqrt{1 - \frac{1}{R^2} e^{\frac{2u}{R}}}\, du$$

che rota intorno l'asse y.

Questa curva gode della proprietà che la porzione della sua tangente intercetta fra il punto di contatto e l'asse y *(che è un assintoto) è costante (eguale ad* R*)* (v. Cap. XVII).

La superficie di questo tipo si dice *pseudosfera*.

3. *Tipo ellittico. Le due costanti c, c' sono di segno contrario. L'elemento lineare riferito ai meridiani e ai paralleli è dato da*

$$d\,s^2 = d\,u^2 + \lambda^2 \operatorname{senh}^2 \frac{u}{R}\,d\,v^2.$$

Tale superficie è generata dalla curva

$$x = \lambda \operatorname{senh} \frac{u}{R}, \qquad y = \int \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{R^2} \cosh^2 \frac{u}{R}}\,d\,u$$

che rota intorno l'asse y.

Le assintotiche di una superficie pseudosferica hanno in ogni punto la torsione costante (Enneper).

In ogni quadrilatero curvilineo compreso fra quattro assintotiche di una superficie pseudosferica, gli angoli opposti sono eguali (Dini).

Fra le superficie pseudosferiche sono notevoli quelle di Dini (*Compt. Rend.*, 1865) e quelle di Enneper (*Gött. Nach.*, 1868) di cui è caso particolare la superficie studiata da Bianchi (*Diss.* Pisa, 1879; *Math. Ann.*, XVI).

Fra le superficie a curvatura costante positiva sono notevoli quelle anche di Enneper di cui è caso particolare quella di Kuen (*Münch. Berichte*, 1884).

Tutte queste superficie a curvatura costante negativa o positiva, hanno la proprietà comune di possedere un sistema di linee di curvature piane.

Le coordinate di un punto delle superficie di

ENNEPER *si esprimono per funzioni ellittiche di due parametri; invece per le altre superficie sopraindicate bastano le funzioni circolari.*

La superficie pseudosferica di Dini è generata da una trattrice che si muove con movimento elicoidale intorno al proprio assintoto (v. sopra). *Essa è dunque un elicoide.*

Un sistema delle sue linee di curvatura è formato dai meridiani (trattrici); l'altro sistema è formato di curve descritte su sfere aventi il centro sull'asse; queste ultime sfere tagliano ortogonalmente l'elicoide.

Data una superficie pseudosferica di raggio R, se su di essa si considera un sistema di geodetiche parallele, e su ogni tangente di queste si stacca un segmento lungo quanto R a cominciare dal punto di contatto, il luogo dei punti estremi di tutti questi segmenti è una nuova superficie pseudosferica col medesimo raggio. La data e la nuova superficie formano le due falde dell' evoluta di una medesima superficie le cui normali sono le sopradescritte tangenti (BIANCHI).

Con questo teorema, da una superficie pseudosferica se ne possono ricavare infinite altre; la trasformazione racchiusa dal precedente teorema si suol chiamare *trasformazione complementare* (BIANCHI); essa è un caso particolare di una trasformazione più generale che si chiama *trasformazione di* BAECKLUND (*Lunds Univ. Arsskrift*, XIX, 1883; *Math. Ann.* IX, XIX).

Se si applica la precedente trasformazione ad una pseudosfera (superficie di rotazione generata da una trattrice) si ha la superficie considerata da

BIANCHI e che (come abbiamo detto) è caso particolare di altre considerate da ENNEPER, *aventi la proprietà di possedere un sistema di linee di curvatura piane*, come l'*elicoide* del DINI.

Le coordinate di un punto della superficie in discorso si esprimono in funzione di due parametri u, v, colle formole

$$x = 2R \frac{\operatorname{sen} u}{1 + v^2 \operatorname{sen}^2 u} (\cos v + v \operatorname{sen} v)$$

$$y = 2R \frac{\operatorname{sen} u}{1 + v^2 \operatorname{sen}^2 u} (\operatorname{sen} v + v \cos v)$$

$$z = R \left\{ \log \operatorname{tg} \frac{1}{2} u + \frac{2 \cos u}{1 + v^2 \operatorname{sen}^2 u} \right\}.$$

Essa ha una curva doppia.

Modelli in gesso di questa superficie, come anche dell'elicoide di DINI, si trovano nella raccolta edita da L. BRILL a Darmstadt; essi sono anche posseduti dall'Istituto matematico dell'Università di Pavia. Nella stessa raccolta sono compresi anche modelli delle superficie a curvatura costante positiva di ENNEPER e KUEN (sopranotate).

Si può stabilire una *trigonometria pseudosferica* come si stabilisce la trigonometria sferica, considerando all'uopo *archi di geodetiche,* in luogo di *circoli massimi*.

In generale si può dire:

Le formole trigonometriche relative ad un triangolo geodetico pseudosferico si deducono da quelle della trigonometria sferica ordinaria, cangiandovi

R (raggio della sfera) in $R\sqrt{-1}$. Questa osservazione fu fatta per la prima volta da MINDING (*Crelle*, XIX, XX).

Inoltre:

I teoremi della geometria non euclidea trovano un' effettiva interpretazione sulle superficie pseudosferiche. Vedi su ciò BELTRAMI (*Saggio ecc. Giorn. di Batt.*, VI, 1868).

Sulle superficie a curvatura costante, oltre i lavori già citati, ricorderemo ancora i lavori di BELTRAMI (*Ann. di mat.*, VII), DINI (*Giorn. di Batt.*, III), BIANCHI (*Math. Ann.*, XVI; *Giorn. di Batt.*, XX; *Rend. Lincei*, 1892, 1899), HAZZIDAKIS (*Crelle*, LXXXVIII), WEINGARTEN (*Crelle*, XCIV, XCV), DARBOUX (*Compt. Rend.*, 1883; *Ann. Éc. norm.*, 1890), GUICHARD (*Ann. Éc. norm.*, 1890), ecc. Un lavoro recentissimo sulla teoria delle superficie a curvatura costante, dal punto di vista di un metodo nuovo di WEINGARTEN per la teoria dell'applicabilità (v. citazione al § 10), è quello di BIANCHI (*Ann. di mat.*, serie 3.ª, II).

Per le *trasformazioni* delle superficie a curvatura costante *positiva*, oltre il lavoro di HAZZIDAKIS *(cit.)* vedi le recenti note di BIANCHI (*Rend. Lincei*, 1899).

§ 12. — Superficie a curvatura media costante. Superficie minime.

Le due superficie parallele ad una superficie S a curvatura costante positiva $K=\frac{1}{R^2}$ *e distanti da essa della quantità* $\pm R$, *sono a curvatura media costante* $H=\pm\frac{1}{R}$. (Bonnet.)

Reciprocamente ogni superficie a curvatura media costante $\pm\frac{1}{R}$ *ne ha una parallela, alla distanza R e a curvatura assoluta costante* $\frac{1}{R^2}$.

Considerando come corrispondenti i punti delle tre superficie situati sulla medesima normale, *la rappresentazione delle due superficie a curvatura media costante l'una sull'altra è conforme; e la rappresentazione di una di queste su S è tale che a due direzioni ortogonali su essa corrispondono sempre su S due direzioni coniugate* (v. Chini, *Giorn. di Batt.*, XXVII, 1889).

L'elemento lineare di ogni superficie a curvatura media costante $\pm\frac{1}{R}$, *riferita alle sue linee di curvatura u, v, assume la forma*

$$d s^2 = R^2 e^{\pm 2\theta}(d u^2 + d v^2)$$

dove θ *soddisfa alla relazione*

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = - \operatorname{senh} \theta \cosh \theta.$$

Quindi:

Le linee di curvatura di ogni superficie a curvatura media costante formano un sistema isotermo.

Ogni superficie a curvatura media costante può deformarsi serbando la stessa curvatura media, in guisa che le nuove linee di curvatura sieno le traiettorie sotto angolo costante delle antiche (Bonnet).

Le superficie di rotazione a curvatura media costante si ottengono, secondo il teorema di Bonnet, da una deformata di rotazione della sfera di raggio R, tagliando sulle normali da una parte e dall'altra delle lunghezze eguali ad R.

Si hanno in tal maniera due tipi di superficie di rotazione a curvatura media costante, e sono rispettivamente l'onduloide e il nodoide.

Per definire la *curva meridiana* di tali superficie serve il seguente elegante teorema di Delaunay:

Le curve meridiane dell'onduloide e del nodoide sono le curve descritte nel piano, dal fuoco di un ellisse o di un'iperbole che rotola senza strisciare su di una retta (che è poi l'asse di rotazione).

Facendo invece rotare la curva descritta nel piano dal fuoco di una parabola che rotola senza strisciare su di una retta, intorno a questa retta medesima, la superficie di rotazione che si genera è a curvatura media anche costante, ma zero. Essa

è il CATENOIDE *(che è perciò una superficie ad area minima*, v. più sotto).

Si dicono *superficie ad area minima* o *elassoidi* quelle che fra tutte le superficie terminate al medesimo contorno, e infinitamente poco diverse da esse, racchiudono la minima area.

Indicando con p, q, r, s, t le derivate parziali

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}\ ,\quad q = \frac{\partial z}{\partial y},$$

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\ ,\quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\ ,\quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

ricavate dall'equazione $z = f(x\,y)$ *della superficie, l'equazione a derivate parziali delle superficie ad area minima è*

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = 0$$

ovvero:

$$(1+q^2)\,r - 2\,p\,q\,s + (1+p^2)\,t = 0.$$

Nelle superficie ad area minima i raggi principali di curvatura sono in ogni punto eguali e di segno contrario, ovvero la CURVATURA MEDIA *H* È ZERO. *Viceversa ogni superficie a* CURVATURA MEDIA ZERO, *è ad area minima.*

La rappresentazione sferica per una superficie minima è una rappresentazione conforme (BONNET).

L'unica superficie reale sviluppabile ad area minima è il piano.

Su di una superficie minima le assintotiche formano un doppio sistema ortogonale, e le linee di curvatura un doppio sistema ortogonale isotermo.

Le coordinate di un punto di una superficie ad area minima sono date dalle formole (di WEIERSTRASS)

$$x = \text{parte reale di} \int (1 - \tau^2)\, F(\tau)\, d\tau$$

$$y = \quad " \quad " \quad \int i\,(1 + \tau^2)\, F(\tau)\, d\tau$$

$$z = \quad " \quad " \quad \int 2\tau\, F(\tau)\, d\tau.$$

dove $F(\tau)$ è una qualunque funzione della variabile complessa τ; ad ogni F corrisponde una determinata superficie minima, e viceversa.

Indicando con τ_1, $F_1(\tau_1)$ le variabili complesse coniugate rispett. delle variabili τ, $F(\tau)$, l'elemento lineare della superficie ad area minima è dato da

$$d s^2 = (1 + \tau\,\tau_1)^2\, F(\tau)\, F_1(\tau_1)\, d\tau\, d\tau_1$$

e il raggio principale positivo di curvatura da

$$r_2 = \frac{1}{2}(1 + \tau\,\tau_1)^2 \sqrt{F(\tau)\, F_1(\tau_1)}.$$

Le formole di Weierstrass possono porsi ancora sotto la forma:

$$x = \text{parte reale di} \{ 1 - \tau^2)\, \varphi''(\tau) + 2\tau\,\varphi'(\tau) - 2\,\varphi(\pi) \}$$

$$y = \quad " \quad " \quad \{ i\,(1 + \tau^2)\, \varphi''(\tau) - 2 i \tau\, \varphi'(\tau) - 2 i\, \varphi(\tau$$

$$z = \quad " \quad " \quad \{ 2\tau\, \varphi''(\tau) - 2\, \varphi'(\tau) \}$$

dove $\varphi(\tau)$ è a sua volta una funzione arbitraria.

Tutte le superficie minime algebriche si ottengono da queste formole ponendo per $\varphi(\tau)$ una funzione algebrica di τ,

Se due superficie minime sono applicabili l'una sull'altra, la funzione F corrispondente all'una superficie, deve essere eguale alla funzione F relativa all'altra, moltiplicata per l'esponenziale $e^{i\alpha}$, *dove* α *è una costante arbitraria reale. Così si ottengono le deformazioni più generali di una superficie ad area minima per le quali si conservano ad area minima.*

Due superficie minime che così si ottengono si dicono *associate.*

Ponendo $\alpha = \frac{\pi}{2}$ le due superficie minime si dicono *coniugate in applicabilità* (BONNET).

Le superficie ad area minima applicabili sopra superficie di rotazione, e quindi in infiniti modi su sè stesse, si ottengono dalle formole di WEIERSTRASS *ponendo*

$$F(\tau) = C\,\tau^k$$

dove k è costante reale, e C costante qualunque.

Per $k = -2$ *si hanno superficie elicoidi.*

L'unica superficie rigata ad area minima è l'elicoide di equazione:

$z = m \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$. *(Elicoide rigata ad area minima; teor. di* CATALAN.)

La superficie di equazione

$\sqrt{x^2 + y^2} = m \cosh \frac{z}{m}$ *(catenoide o alisseide)*

è una superficie ad area minima; * *essa è quella*

* Per la costruzione della curva meridiana del catenoide vedi più sopra, pag. 708.

superficie di rotazione su cui è applicabile l'elicoide rigata del teor. precedente; essa è l'unica superficie di rotazione ad area minima.

Ponendo nelle formole di Weierstrass

$$F(\tau) = 1 - \frac{1}{\tau^4}$$

si ha una superficie minima algebrica, che si chiama *la superficie minima di* Henneberg; *essa è una superficie ad una faccia sola* (v. Cap. XVIII); *è della 5.ª classe e del 15.º ordine.*

In generale ponendo per $F(\tau)$ una funzione tale che indicando con $F_0(\tau)$ la funzione che da essa si ottiene mutando tutti i coefficienti nei loro coniugati, si abbia

$$F(\tau) = -\frac{1}{\tau^4} F_0\left(-\frac{1}{\tau}\right),$$

le superficie che si ottengono sono ad una faccia sola.

Ponendo

$$F(\tau) = 3$$

si ha la superficie di cui le coordinate di un punto sono:

$$x = 3\alpha + 3\alpha\beta^2 - \alpha^3 \qquad \tau = \alpha + i\beta$$
$$y = \beta^3 - 3\beta - 3\alpha^2\beta$$
$$z = 3(\alpha^2 - \beta^2).$$

Questa superficie minima si chiama *la superficie di Enneper.*

Essa è del 9.° ordine; le sue linee di curvatura sono cubiche piane di genere zero, e le sue linee assintotiche

$$\alpha - \beta = \text{cost.} \qquad \alpha + \beta = \text{cost.}$$

sono cubiche gobbe.

La superficie di Enneper è applicabile su di una superficie di rotazione.

Essa è l'inviluppo dei piani perpendicolari nel punto medio alle congiungenti i punti di due parabole aventi il medesimo fuoco (DARBOUX).

Tutte le associate (v. pag. 711) *della superficie di Enneper, hanno la medesima forma di essa.*

Ponendo

$$F(\tau) = \frac{1}{\sqrt{1 - 14\tau^4 + \tau^8}}$$

si ha la cosiddetta *superficie minima di Schwarz*, terminata dal quadrilatero storto formato colle due coppie di spigoli opposti di un tetraedro regolare.

Questa superficie risolve per un caso speciale il cosiddetto *problema di* PLATEAU, cioè il problema: dato un contorno chiuso costruire una superficie minima terminata in quel contorno e priva all'interno di punti singolari.

Sperimentalmente il PLATEAU risolvette il problema immergendo un filo di metallo foggiato come il contorno assegnato, in un liquido speciale leggermente vischioso, composto p. es. di glicerina; la lamina sottilissima di liquido che resta attaccata al contorno, si foggia, per i principi di meccanica, precisamente come una superficie ad area minima.

Fra le superficie minime noteremo infine quella cosiddetta *di traslazione di* SCHERK la quale si ottiene cercando le soluzioni della forma

$$z = \varphi(x) + \varphi(y)$$

della equazione differenziale delle superficie minime. *Essa ha per equazione:*

$$z = \frac{1}{a}\left[\log\cos(a\,x) - \log\cos(a\,y)\right]$$ (*Crelle*, XIII, 1835).

Se una superficie minima ha le linee di curvatura di un sistema, piane, anche quelle dell'altro sistema saranno piane.

Ogni retta giacente sopra una superficie minima è asse di simmetria per la superficie.

Se un piano taglia ortogonalmente in ciascuno dei punti d' intersezione, una superficie minima, esso è piano di simmetria per la superficie.

Affinchè una superficie sia applicabile su di una superficie ad area minima, è necessario e sufficiente che la forma differenziale che ne rappresenta l'elemento lineare, moltiplicata per $\sqrt{-K}$ dove K è la curvatura totale, sia zero (RICCI).

Se si esclude un caso molto particolare trattato da EULERO (*Methodus inveniendi*, ecc., 1744) fu LAGRANGE (*Misc. Taur.*, II) che trattò per il primo delle superficie minime come applicazione del calcolo delle variazioni.

L'equazione differenziale delle superficie minime fu indi studiata da MEUSNIER, MONGE, LEGENDRE, AMPÈRE.

Altri lavori fra i più notevoli furono quelli di POISSON (*Crelle*, VIII), SCHERK *(cit.)*, STEINER (*Berl. Berich.*, 1840) che trovò un teorema sulle superficie *parallele* alle superficie minime, BONNET (*Compt. Rend.*, 1853), ENNEPER (*Zeitschr. für Math.*, IX, 1864), WEIERSTRASS (*Berl. Berich.*, 1866), RIEMANN (*Gött. Abhand.*, XIII, 1867), BELTRAMI (*Mem. Bologna*, 1868), SCHWARZ (*Berlin. Berich.*, 1872; *Crelle*, LXXX; *Opere*, I), LIE (*Math. Ann.*, XIV), ecc.

Per altre indicazioni storiche e per una trattazione completa dell'argomento rimandiamo all'opera del DARBOUX (*Th. des surfaces*, ecc., I); un riassunto storico si trova anche nella citata Memoria di BELTRAMI.

Nella collezione di modelli editi da L. BRILL si trovano molti modelli in gesso di superficie minime; alcuni di essi sono anche posseduti dall'Istituto matematico di Pavia.

Delle superficie a curvatura media costante trattarono specialmente DELAUNAY (*Crelle*, VI), STURM *(Ibid.)*, JELLET (*Id.*, XVIII), DINI (*Ann. di mat.*, VII), ecc.

§ 13. — SUPERFICIE EVOLUTE.

Il luogo dei due centri di curvatura principali nei punti di una superficie (v. § 9) si dice *superficie evoluta* della data, la quale dicesi *evolvente*.

Si dice poi *evoluta media* quella inviluppata dai

piani perpendicolari alle normali alla superficie nei punti medi del segmento limitato dai due centri di curvatura (RIBAUCOUR).

Ciascuna delle due falde dell'evoluta può anche considerarsi come il luogo dello spigolo di regresso della sviluppabile formata dalle normali alla superficie lungo i punti di una linea di curvatura di ciascuno dei due sistemi.

Tali spigoli di regresso sono linee geodetiche per la superficie evoluta.

Sulla superficie evoluta le linee corrispondenti alle linee di curvatura della data formano un sistema coniugato (v. § 9).

Per una superficie tale che esista una relazione fra i suoi raggi principali di curvatura, le linee assintotiche sulle due falde dell'evoluta si corrispondono e reciprocamente.

Per tali superficie * *il prodotto delle curvature totali nei punti corrispondenti delle due falde dell'evoluta è* $\frac{1}{(r_1 - r_2)^4}$, *dove* $r_1\, r_2$ *sono i due raggi di curvatura della superficie data, in ciascun punto* (HALPHEN).

In particolare: *per le superficie a curvatura K costante e per esse soltanto le assintotiche sulle due falde dell'evoluta non solo si corrispondono fra loro, ma corrispondono alle assintotiche della superficie.*

Per le due falde dell'evoluta delle superficie i cui raggi di curvatura sono legati dalla relazione

---

* Alcuni le sogliono chiamare superficie *W* (v. pag. 717(

$r_1 - r_2 =$ cost. *e solo per esse, le linee di curvatura si corrispondono.*

Ciascuna falda dell'evoluta di una superficie di cui i raggi di curvatura sono legati da una relazione, è applicabile su di una superficie di rotazione; e viceversa, *salvo le superficie rigate luogo delle normali principali alle curve a torsione costante (applicabili sul catenoide), ogni altra superficie applicabile su di una superficie di rotazione, può considerarsi come una falda dell'evoluta di una superficie di cui i raggi di curvatura sono legati da una relazione (teorema di* WEINGARTEN).

Ciascuna falda dell' evoluta di una superficie pseudosferica è applicabile sul catenoide.

Sono state studiate da APPELL le superficie in cui l'evoluta media si riduce ad un punto *(Americ. J., X)* e da GOURSAT *(Ibid.)* quelle i cui raggi di curvatura soddisfanno a

$$r_1 + r_2 = \mu \delta$$

essendo μ una costante e δ la distanza dell'origine dal piano tangente.

L'evoluta media di una superficie di Goursat è ancora una superficie di Goursat.

Delle superficie i cui raggi principali di curvatura sono legati da una relazione si occuparono WEINGARTEN (*Crelle*, LXII, CIII), per cui (come abbiamo notato) quelle superficie furono da alcuni chiamate superficie *W*; indi HALPHEN (*Bull. Soc. math.*, IV), LIE (*Bull. des sciences math.*, IV), BELTRAMI (*Ann. di mat.*, VII), DINI (*Id.*, *Id.*), ecc.

Il LIPSCHITZ (*Acta*, X; *Compt. Rend.*, 1887) e LILIENTHAL (*Acta*, XI) trattarono il caso in cui è costante la *differenza* dei due raggi di curvatura principali.

Le *superficie canali* entrano come caso particolare fra le superficie *W*, come quelle in cui è costante uno dei raggi di curvatura. Evidentemente altri casi particolari sono le superficie minime, e le superficie a curvatura (assoluta o media) costante.

§ 14. — SISTEMI TRIPLI DI SUPERFICIE ORTOGONALI.

Supponiamo assegnati tre sistemi ciascuno di ∞^1 superficie, e tali che per ogni punto di una certa regione dello spazio passi una sola superficie di ciascuno dei tre sistemi. Facendo corrispondere univocamente ciascuna superficie di ciascuno dei tre sistemi ai valori di tre parametri ρ_1, ρ_2, ρ_3, questi possono intendersi come *coordinate curvilinee* del punto dello spazio. I tre sistemi di superficie formano ciò che si chiama un *sistema triplo di superficie.*

Se x, y, z sono le coordinate cartesiane dei punti dello spazio e

$$\rho_1 = f_1(x\,y\,z)$$
$$\rho_2 = f_2(x\,y\,z)$$
$$\rho_3 = f_3(x\,y\,z)$$

sono le equazioni delle tre superficie, risolute rispetto ai parametri ρ_r, le x, y, z possono intendersi espresse mediante le ρ, e una relazione fra le ρ corrisponde all'equazione di una superficie in coordinate curvilinee ρ.

Il quadrato della distanza fra due punti infinitamente vicini dello spazio espresso in coordinate curvilinee, sarà dato dalla formola

$$d s^2 = H_1^2 d \rho_1^2 + H_2^2 d \rho_2^2 + H_3^2 d \rho^2_3 + \\ + 2 h_{12} d \rho_1 d \rho_2 + 2 h_{13} d \rho_1 d \rho_3 + 2 h_{23} d \rho_2 d \rho_3$$

dove

$$H^2_i = \Sigma \left(\frac{\partial x}{\partial \rho_i} \right)^2$$

$$h_{ij} = \Sigma \frac{\partial x}{\partial \rho_i} \frac{\partial x}{\partial \rho_j}$$

intendendo col simbolo Σ *che si debba fare la somma dei tre termini che si ottengono mutando* x *rispett. in* y *e in* z.

Tale distanza si dice l'*elemento lineare dello spazio.*

Se $h_{12} = h_{23} = h_{13} = 0$, *allora ciascuna delle superficie di un sistema è ortogonale a ciascuna degli altri due sistemi; e reciprocamente;* in tal caso il sistema triplo si dice *sistema triplo ortogonale.*

Per i sistemi tripli ortogonali è fondamentale il teorema di Dupin:

In ogni sistema triplo ortogonale la linea di intersezione di due superficie di diverso sistema è linea di curvatura per ambedue.

Inoltre, più completamente:

La condizione necessaria e sufficiente perchè a due sistemi di superficie ortogonali fra loro, possa associarsene un terzo ortogonale con ambedue, è che i due primi si incontrino lungo linee di curvatura (DARBOUX, *Ann. Ec. norm.*, 1866).

Ogni sistema ∞^1 di sfere o piani appartiene a infiniti sistemi tripli ortogonali.

Ogni sistema di superficie parallele appartiene ad un sistema triplo ortogonale; le superficie degli altri due sistemi sono le sviluppabili luogo delle normali lungo le linee di curvatura delle prime superficie.

Per un sistema triplo ortogonale, le H come funzioni delle ρ, soddisfanno alle sei equazioni differenziali, dette di LAMÉ:

$$\frac{\partial^2 H_i}{\partial \rho_j \, \partial \rho_k} = \frac{1}{H_k}\frac{\partial H_k}{\partial \rho_j}\frac{\partial H_i}{\partial \rho_k} + \frac{1}{H_j}\frac{\partial H_j}{\partial \rho_k}\frac{\partial H_i}{\partial \rho_j},$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho_i}\left(\frac{1}{H_i}\frac{\partial H_k}{\partial \rho_i}\right) + \frac{1}{\partial \rho_k}\left(\frac{1}{H_k}\frac{\partial H_i}{\partial \rho_k}\right) + \\ + \frac{1}{H^2_j}\frac{\partial H_i}{\partial \rho_j}\frac{\partial H_k}{\partial \rho_j} = 0.$$

Queste condizioni cui devono soddisfare le H, sono necessarie e sufficienti perchè si abbia un sistema triplo ortogonale; se esse sono soddisfatte, esiste uno e uno solo sistema triplo ortogonale che vi corrisponde.

Con una trasformazione dello spazio, per raggi vettori reciproci, un sistema triplo ortogonale, si trasforma in un altro anche triplo ortogonale.

Uno dei più semplici e maggiormente studiati sistemi tripli ortogonali è quello del sistema di *quadriche confocali.*

Esso è formato dalle tre superficie $(a^2 > b^2 > c^2)$

$$\frac{x^2}{a^2+\rho_1}+\frac{y^2}{b^2+\rho_1}+\frac{z^2}{c^2+\rho_1}=1, \quad (-c^2<\rho_1<+\infty)$$

$$\frac{x^2}{a^2+\rho_2}+\frac{y^2}{b^2+\rho_2}+\frac{z^2}{c^2+\rho_2}=1, \quad (-b^2<\rho_2<-c^2)$$

$$\frac{x^2}{a^2+\rho_3}+\frac{y^2}{b^2+\rho_3}+\frac{z^2}{c^2+\rho_3}=1, \quad (-a^2<\rho_3<-b^2)$$

di cui la prima è un ellissoide, la seconda è un iperboloide ad una falda, e la terza è un iperboloide a due falde (v. anche pag. 188-189).

Le coordinate corrispondenti a tal sistema triplo ortogonale si sogliono chiamare *coordinate ellittiche* (LAMÈ).

L'elemento lineare in coordinate ellittiche è dato dalla relazione

$$d\,s^2 = \frac{1}{4}\left[\frac{(\rho_1-\rho_2)(\rho_1-\rho_3)}{(a^2+\rho_1)(b^2+\rho_1)(c^2+\rho_1)}\,d\,\rho_1{}^2 + \right.$$
$$+\frac{(\rho_2-\rho_3)(\rho_2-\rho_1)}{(a^2+\rho_2)(b^2+\rho_2)(c^2+\rho_2)}\,d\,\rho_2{}^2 +$$
$$\left. +\frac{(\rho_3-\rho_1)(\rho_3-\rho_2)}{(a^2+\rho_3)(b^2+\rho_3)(c^2+\rho_3)}\,d\,\rho_3{}^2\right].$$

La teoria delle coordinate curvilinee nello spazio fu introdotta, prima pel caso speciale delle coordinate ellittiche, da LAMÈ (*Mém. prés.*, V, 1833; *Crelle*, II), e indi dal medesimo Autore per il caso generale delle coordinate ortogonali (*Crelle*, V, XVI; *Leçons sur les coordonnées curvilignes*, Paris, 1859).

Altri lavori furono quelli di Aoust (*Crelle*, LVIII, *Ann. di mat.*, 1.ª s., VI; 2.ª s., II, III, V), Brioschi (*Id.*, 2.ª s., I), Codazzi (*Id.*, 1.ª s., VIII, 2.ª s., I, II, IV, V), Darboux (*Ann. Éc. norm.*, 1866, 1878), Roberts (*Crelle*, LXII), ecc.

Lavori più recenti sono quelli di Bianchi (*Giorn. di Batt.*, XXI, XXII; *Ann. di mat.*, 2.ª s., XIII, XIV, XVIII, XIX, *Rend. Lincei*, 1885, 1886, 1890; *Mem. Lincei*, 1887, ecc.). In questi lavori sono denominati *sistemi tripli di* Weingarten quei sistemi ortogonali (la cui esistenza fu riconosciuta per la prima volta da Weingarten) contenenti un sistema di superficie pseudosferiche (o anche a curvatura costante positiva) tutte col medesimo raggio.

Una classe importante di tali sistemi fu conosciuta, sin dal 1870, da Ribaucour (*Compt. Rend.*, LXX). Il teorema fondamentale di Weingarten relativo a tali sistemi si trova per la prima volta riportato in una Nota di Bianchi (*Rend. Lincei*, 25 febbr. 1885, 15 marzo 1885).

Un libro recente di Darboux (*Leçons sur les sistèmes orthog.*, ecc. Paris, 1898) è dedicato completamente alla teoria dei *sistemi tripli* e delle coordinate curvilinee nello spazio.

§ 15. — Congruenze di rette.

Abbiamo già definito in altro luogo (v. Capitolo XIV) le *congruenze di rette nello spazio*, (dette anche *sistemi di raggi*) cioè gli assiemi di ∞^2 rette (*raggi*, *Strahlen*) dello spazio.

Oltre che dal punto di vista di *Geometria della retta*, tale teoria, la quale ha intimi legami colla teoria delle superficie, è stata profondamente studiata dal punto di vista della *Geometria infinitesimale*, immaginando che la congruenza sia qualunque (sia o no algebrica).

Immaginiamo segata la congruenza con una superficie, e consideriamo come punto di partenza su di un raggio della congruenza, uno dei punti in cui quel raggio incontra la superficie.

Sieno $x\,y\,z$ le coordinate di tal punto e X, Y, Z, i coseni di direzione del raggio.

Scegliendo un sistema di coordinate curvilinee u, v sulla superficie, porremo: *

$$\Sigma\left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2 = E, \qquad \Sigma\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = e$$

$$\Sigma\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} = F, \qquad \Sigma\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = f$$

$$\Sigma\left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^2 = G, \qquad \Sigma\frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} = f'$$

$$\Sigma\frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v} = g$$

e introdurremo *le due forme differenziali fondamentali:*

$$E\,d\,u^2 + 2\,F\,d\,u\,d\,v + G\,d\,v^2 = d\,s_1{}^2 = \Sigma\,(d\,X)^2$$
$$e\,d\,u^2 + (f + f')\,d\,u\,d\,v + g\,d\,v^2 = \Sigma\,d\,x\,d\,X$$

---

* I simboli Σ si intendono estesi alle tre lettere x, y, z ovvero X, Y, Z, in modo facile ad intendersi.

di cui la prima rappresenta il quadrato dell'elemento lineare della *rappresentazione sferica della congruenza*, cioè di quella curva che si ottiene su di una sfera di raggio 1, conducendo per il centro della sfera il raggio parallelo al raggio della congruenza, e considerando il punto in cui quel raggio incontra la sfera, come corrispondente al raggio della congruenza.

Indicando con dp la minima distanza (infinitesima) fra un raggio (u, v) della congruenza, e un altro ad esso infinitamente vicino $(u + du, v + dv)$ *si ha*

$$dp = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}\, ds_1} \begin{vmatrix} E du + F dv, & F du + G dv \\ e du + f dv, & f' du + g dv \end{vmatrix},$$

e se è r l'ascissa del piede di tal minima distanza sul raggio (u, v), è

$$r = -\frac{e\, du^2 + (f + f')\, du\, dv + g\, dv^2}{E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2}.$$

Su ogni raggio, e per ogni raggio, della congruenza sono da distinguersi *i due punti limiti*, *i due fuochi*, il *punto centrale*, o *medio*, *i due piani principali*, *i due piani focali*, ecc. per le cui definizioni rimandiamo al Cap. XIV.

Le ascisse $r_1\, r_2$ dei due punti limiti sono date dalle radici dell'equazione:

$$(EG - F^2)\, r^2 + [gE - (f + f')\, F - eG]\, r + \\ + eg - \left(\frac{f + f'}{2}\right)^2 = 0$$

e le ascisse $\rho_1\, \rho_2$ *dei due fuochi sono date da*

$$(E G - F^2)\rho^2 + [g E - (f + f') F + e G]\rho + \\ + e g - f f' = 0.$$

Chiamando ω *l'angolo che la minima distanza* dp *del raggio* $(u,\ v)$ *dal raggio* $(u + du, v + dv)$ *forma con quella il cui piede cade nel punto limite, si ha*

$$r = r_1 \cos^2 \omega + r_2 \operatorname{sen}^2 \omega \quad (\textit{form. di } \text{Hamilton})$$

Indicando con $2d$ *la distanza dei due punti limiti, è con* 2δ *la distanza dei due fuochi, si ha:*

$$d^2 - \delta^2 = \frac{(f - f')^2}{4(E G - F^2)}.$$

Chiamando γ *l'angolo dei piani focali si ha*

$$\cos \gamma = \frac{\sqrt{d^2 - \delta^2}}{d}, \qquad \operatorname{sen} \gamma = \frac{\delta}{d}.$$

In un punto P di un raggio della congruenza conduciamo un piano π perpendicolare al raggio, e tracciamo in π attorno P una curva infinitesima c che racchiuda un'area A. Sulla sfera rappresentativa, i raggi corrispondenti a quelli uscenti dai punti di c determineranno una curva chiusa sferica infinitesima c', di area A'.

Il limite del rapporto $\frac{A'}{A}$ si chiama *la densità della congruenza nel punto P.*

La densità della congruenza in un punto P situato su di un raggio l, è eguale all'inversa del

prodotto delle distanze di P dai due fuochi situati su l.

Consideriamo il fascetto dei raggi partenti dalla periferia della curva c; essi formano ciò che si chiama *un fascio infinitamente sottile di raggi (Unendlich dünnes Strahlenbündel)* di cui la retta l si chiama *asse.*

Segandolo col piano passante per P e perpendicolare al raggio fondamentale l, si ha per sezione la curva c; segandolo con un altro piano parallelo al primo e passante pel punto P_1 di l, si ha un'altra sezione c_1; *le aree comprese da tali due curve sono fra loro inversamente proporzionali alle densità nei rispettivi punti P e P_1.*

Se l'ascissa di P sul raggio l è r, *la densità in P è data dalla formola*

$$\frac{EG-F^2}{EG-F^2)r^2+[gE-(f+f')F+eG]r+eg-ff'}.$$

La densità è sempre reale; inoltre quando i fuochi sono reali, la densità è positiva pei punti esterni al segmento dei fuochi, negativa per i punti interni, infinita nei fuochi, ed ha il più grande valore negativo nel punto medio del raggio; se poi i fochi sono immaginari la densità è sempre positiva e raggiunge il suo massimo nel punto medio del raggio.

Data una congruenza di raggi sono da considerarsi cinque superficie che hanno colla congruenza notevoli relazioni; esse sono le superficie generate dai due punti limiti, dai due fuochi, e

dal punto medio. Si chiamano rispettivamente *superficie limiti, superficie focali, superficie media.*

I raggi della congruenza sono le tangenti comuni alle due superficie focali.

Si chiamano *rigate di una congruenza* quelle le cui generatrici sono raggi della congruenza; *rigate principali della congruenza* quelle rigate della congruenza, le cui linee di stringimento coincidono col luogo dei punti limiti dei raggi che ad essa appartengono.

Esistono due serie di rigate principali.

Fra le rigate della congruenza vi sono infinite sviluppabili; propriamente ve ne sono due serie.

Si chiamano *congruenze normali* quelle i cui raggi sono normali ad una medesima superficie.

Condizione necessaria e sufficiente perchè una congruenza sia normale è che i fochi coincidano coi punti limiti, ovvero che i piani focali sieno fra loro perpendicolari.

Per una congruenza normale le due superficie focali coincidono colle due falde dell'evoluta della superficie normale alla congruenza; e la densità nei punti di tale superficie normale coincide colla curvatura totale della medesima.

Se una congruenza normale di raggi luminosi subisce un numero qualunque di riflessioni e rifrazioni, essa rimane sempre una congruenza normale (teor. di Malus-Dupin) (v. anche il § 3 sulle caustiche nel Cap. XVII).

A questo teorema celebre è affine un'altro trovato poi da Beltrami (*Ricerche di analisi, ecc. Giorn. di Batt.*, II, III), e che dice che se *si im-*

maginano partenti dai punti di una superficie S i raggi l di una congruenza normale, costruita la superficie normale alla congruenza la quale tagli i raggi l in punti P, e indi deformata la superficie S, in modo che essa porti con sè i raggi della congruenza invariabilmente connessi con essa, la nuova congruenza che si viene ad avere è ancora normale, e il luogo delle nuove posizioni dei punti P è la superficie ad essa ortogonale.

Se in una congruenza di raggi sono costanti nello stesso tempo la distanza dei fuochi e quella dei punti limiti, le due superficie focali sono superficie pseudosferiche di raggio eguale alla distanza dei punti limiti (BIANCHI, *Ann. di mat.*, XV).

Queste congruenze sono state chiamate da BIANCHI, *congruenze pseudosferiche*.

Una congruenza per la quale si ha

$$e : \frac{f + f'}{2} : g = E : F : G$$

si chiama *una congruenza isotropa di* RIBAUCOUR.

La superficie inviluppata dai piani perpendicolari ai raggi di una congruenza isotropa nei loro punti medi, è una superficie d'area minima (RIBAUCOUR).

Insieme alla teoria delle superficie erano state studiate da MONGE e dai suoi discepoli le congruenze formate dalle normali di una superficie; su queste congruenze il MALUS trovò il teorema sopranotato pel caso in cui si abbia inizialmente

un sistema di raggi partenti da un punto (*J. Éc. polit.*, XIV, cah., 1808), teorema che fu poi completato da DUPIN nel modo sopraindicato (*Applic. de géom. etc. pour faire suite aux Développ. de géom.* Paris, 1822).

Le congruenze generali furono poi considerate da vari autori, GERGONNE, QUETELET e specialmente da HAMILTON (*Irish. Trans.*, XV, XVI, XVII, 1828-37), e indi la loro teoria fu ripresa e felicemente sviluppata da KUMMER (*Crelle*, LVII, 1860; *Berl. Monatsb.*, 1859-60).

A questi lavori successero molti altri. I più recenti sono quelli di WEINGARTEN (*Crelle*, XCVIII), BIANCHI *(cit.)*, GUICHARD *Ann. Éc. norm.*, 3.ª s., VI, *Compt. Rend.*, 1890-92), ecc.

CAPITOLO XVII.

Principali generazioni e trasformazioni metricamente specializzate di curve e superficie. La geometria di curve speciali.

§ 1. — Curve e superficie inverse ed arguesiane. Trasformazione per raggi vettori reciproci. Trasformazione Arguesiana.

A pag. 243 abbiamo già detto che la *trasformazione per raggi vettori reciproci o inversione* si può ottenere come caso particolare di una trasformazione birazionale quadratica, ponendo i tre punti fondamentali della trasformazione, due nei due punti ciclici del piano, e il terzo nell'origine delle coordinate *cartesiane*.

Geometricamente questa trasformazione può essere definita nel seguente modo:

Si abbia nel piano un cerchio di raggio R il cui centro è nell' origine O delle coordinate; ad un punto del piano il cui raggio vettore sia r, e l'argomento φ, si faccia corrispondere il punto di argomento φ e di raggio vettore $\frac{R^2}{r}$. Il raggio R

si chiama *modulo della inversione*, e il punto O si chiama *polo*, o *centro d'inversione.*

Se invece di operare nel piano, si opera analogamente nello spazio con una sfera fondamentale di raggio R, si ha la *trasformazione per raggi vettori reciproci nello spazio.*

Da una curva o superficie si ottiene così un'altra curva o superficie detta *inversa della prima.*

Al punto O corrisponde la retta all'infinito, o il piano all'infinito.

I soli punti che si corrispondono a sè stessi sono quelli del cerchio o della sfera.

Ad una retta passante per il polo O, corrisponde sè stessa.

Ad una retta qualunque corrisponde un cerchio passante per O. Nel caso della trasf. piana l'asse radicale dei due cerchi, quello di centro O e questo passante per O, è la retta data.

Ad un cerchio qualunque corrisponde un altro cerchio avente col cerchio fondamentale (nel caso della trasf. piana) il medesimo asse radicale che il cerchio dato. È facile immaginare la estensione di questi teoremi, al caso della trasformazione nello spazio.

Una proprietà importantissima di questa trasformazione è che *essa è una trasformazione conforme, cioè conserva gli angoli.*

È notevole il teorema:

La normale ad una curva in un punto P, e quella alla curva inversa nel punto corrispondente Q, si incontrano in un punto della perpendicolare elevata a $P\,Q$ dal suo punto medio.

Una curva o superficie che ha la proprietà di

trasformarsi in sè stessa per una particolare trasformazione per raggi vettori reciproci si suole chiamare *anallamatica.*

Le curve storte anallamatiche di 4.° ordine sono le *cicliche*, così chiamate da Darboux (*Sur une classe remarquable*, ecc. Paris, 1896), cioè le intersezioni di una sfera e di una quadrica.

Le superficie anallamatiche di 4.° ordine sono le *ciclidi* (v. Cap. XII, § 7).

Moutard ha mostrato che *ogni anallamatica è l' inviluppo di una serie di cerchi ortogonali ad un cerchio fisso, avente il suo centro al centro di inversione e per raggio il modulo d' inversione* (v. le citaz. di Cap. XII, § 7).

Si suol chiamare *trasformazione argùesiana* (dal nome di Desargues) la trasformazione quadratica specializzata metricamente secondo la seguente costruzione geometrica:

Dato un triangolo fondamentale $A\,B\,C$, il corrispondente di un punto P si ottiene congiungendo P coi tre vertici, e indi costruendo le rette simmetriche di $A\,P$, $B\,P$, $C\,P$ rispetto alle bisettrici dei tre angoli del triangolo; il punto d'incontro di quelle tre rette, è il punto corrispondente a P.

La trasformata per una tale trasformazione, di una curva data si chiama *l' arguesiana di quella curva.*

Il cerchio circoscritto al triangolo $A\,B\,C$ è l' arguesiana della retta all' infinito del piano. L' arguesiana di un diametro del medesimo cerchio è un' iperbole equilatera.

Per tale trasformazione si vegga Cayley (*J.*

de Liouville, 1849), MATHIEU (*Nouv. Ann.*, 1865, pag. 393, 481, 529), SALTEL (*Mémoires de Belg.*, 1872), ecc.

La denominazione si deve a quest'ultimo autore; tale trasformazione era stata studiata già da STEINER e MAGNUS.

§ 2. — PODARIA DI UNA CURVA PIANA O DI UNA SUPERFICIE.

Si dice *podaria* o *pedale* (o anche *podaria positiva* o *diretta*) *di un punto P rispetto ad una curva piana,* il luogo geometrico dei piedi delle perpendicolari abbassate dal punto dato sulle tangenti alla curva.

La curva data si dice inversamente *podaria negativa o inversa* rispetto alla podaria già definita.

Analoghe definizioni potrebbero darsi per *le podarie di una superficie.*

La normale in un punto alla podaria passa per il punto medio della congiungente il punto fisso col punto considerato della curva.

La podaria d'un punto P rispetto ad una curva C è la trasformata per raggi vettori reciproci della curva polare reciproca di C per rapporto ad un cerchio qualunque descritto con centro P.

Chiamando s', ρ' l'arco e il raggio di curvatura della pedale, ed s, ρ quelli della curva data, r la distanza del punto P dai punti Q della curva, θ l'angolo di PQ colla tangente in Q, *l'equazione intrinseca della podaria si ottiene eliminando s fra*

le equazioni

$$s' = \int \frac{r}{\rho} d s, \qquad \rho' = \frac{r^2}{2 r - \rho \operatorname{sen} \theta}.$$

Sulle pedali è notevole il seguente teorema di STEINER (*Crelle*, XXI).

Se di una curva, chiusa e senza flessi, si costruisce la podaria rispetto ad un punto P qualunque, e se poi quella medesima curva immaginata rigidamente congiunta a P, si fa rotolare su di una retta cosicchè P descriva una cosidetta curva cicloidale o rulletta (v. § 6), *l'arco di questa è eguale al corrispondente arco della pedale; e l'area racchiusa fra la rulletta e la retta è doppia dell'area racchiusa dalla podaria.*

Inoltre :

Se si fa rotolare la podaria rispetto a P, sulla rulletta descritta dal punto P, nel modo dianzi detto, il luogo del punto P è una retta (*teor. di* HABICH).

L'inversa del raggio vettore d'una curva piana è eguale alla differenza delle inverse dei raggi di curvatura della podaria e della rulletta della stessa curva, la podaria essendo determinata per rapporto all' origine dei raggi vettori, e la rulletta essendo quella generata da questo stesso punto rigidamente connesso alla curva, la quale rotoli su di una retta.

Per un'altra relazione fra la podaria e la caustica v. il § 3.

§ 3. — Curve e superficie caustiche.

Caustica di una curva piana è l'inviluppo dei raggi *riflessi* o *rifratti* da quella curva *, (detta *curva dirimente*) quando i raggi incidenti su questa partono da un punto, a distanza finita o infinita *(punto raggiante)*. Di qui la distinzione di *caustiche per riflessione* (o *catacaustiche*, o *caustiche catottriche)* e *caustiche per rifrazione* (o *diacaustiche*, o *caustiche diottriche)*.

Si può estendere il concetto di caustica in questo senso, che invece di immaginare che i raggi incidenti partano da un punto, si immagina più generalmente che essi partano normalmente ad una data curva, formano cioè ciò che si dice un *sistema normale*. Inoltre si possono naturalmente estendere queste considerazioni nello spazio, e immaginare un sistema doppiamente infinito di raggi incidenti (partenti da un punto, o normali ad una superficie) cioè una cosiddetta *congruenza normale* di raggi incidenti (v. il Cap. XVI), e indi, data un'altra qualunque superficie, considerare il luogo dei punti di incontro dei raggi da

---

* Come si sa dalla fisica elementare, dato un raggio incidente in un punto P di una curva, un raggio si dice *riflesso* dalla curva, quando esso e il raggio incidente formano il medesimo angolo colla normale alla curva in P; e si dice *rifratto*, quando è costante il rapporto dei seni degli angoli che il raggio incidente ed esso formano colla medesima normale (tale rapporto si dice *indice di rifrazione*).

questa riflessi o rifratti e infinitamente vicini fra loro.

Il teorema di MALUS-DUPIN relativo alle congruenze normali di raggi (v. Cap. XVI) contiene evidentemente come caso speciale il seguente: che *dato nel piano un sistema normale di raggi (cioè normale ad una curva), dopo un qualunque numero di riflessioni o rifrazioni, si ha sempre un sistema normale, cioè esisterà sempre una curva avente quei raggi riflessi o rifratti per normali.* In tal maniera le caustiche piane si presentano come le evolute di certe curve chiamate da QUETELET, *caustiche secondarie o anticaustiche.*

Si hanno i seguenti teoremi generali di GERGONNE:

I. *La caustica per riflessione per un sistema normale di raggi, è la evoluta della curva che si ottiene come inviluppo dei cerchi aventi i loro centri sulla curva riflettente, e tangenti alla curva cui sono normali i raggi incidenti.*

II. *La caustica per rifrazione per un sistema normale di raggi è la evoluta della curva che si ottiene come inviluppo dei cerchi aventi i loro centri sulla curva rifrangente e di cui i raggi sono nel rapporto* $\frac{1}{n}$ *(essendo* n *l'indice di rifrazione) alla distanza degli stessi centri dalla curva a cui tutti i raggi incidenti sono normali.*

Se i raggi incidenti partono da un punto P a distanza *finita* e per curva ad essi normale si sceglie la circonferenza di raggio zero con centro in P, si hanno teoremi trovati da QUETELET; se P è a distanza finita o infinita e per curva normale

si sceglie la circonferenza di centro P e raggio qualunque ovvero rispett. una retta perpendicolare alla direzione dei raggi incidenti, si hanno teoremi che erano stati trovati rispett. da GERGONNE e SARRUS prima che GERGONNE avesse trovati i surriferiti eleganti teoremi.

Estensioni di tali teoremi al caso delle *superficie caustiche* di cui le anticaustiche possono anche considerarsi come inviluppi di sfere, si trovano fatte da GERGONNE stesso in un lavoro contenuto nel vol. XV (pag. 13, 307) degli *Ann. de Gerg.*; noi ci dispensiamo dall'enunciarli.

L'angolo formato dalla tangente della caustica secondaria col raggio vettore condotto dal punto raggiante è eguale a quello che la tangente alla curva dirimente fa col raggio vettore condotto anche dal punto raggiante.

L'angolo compreso tra i raggi vettori della caustica secondaria e della curva dirimente è eguale all'angolo di rifrazione.

La podaria di un punto fisso rispetto ad una curva data è la caustica secondaria per riflessione d'una curva simile alla data, supposto il punto raggiante nel punto fisso. (DANDELIN, *Mém. Ac. de Belgique*, IV; GENOCCHI, *Ann. di Tortolini*, VI, pag. 117; E. WEYR, *Zeitsch. für Math.*, 1869, pag. 376.)

TSCHIRNAUSEN considerò per il primo (1682) la caustica piana formata per i raggi paralleli riflessi da un cerchio, e la sua ricerca fu trovata erronea da CASSINI, MARIOTTE, DE LA HIRE commissari dell'Accademia delle scienze di Parigi. Indi si

occuparono delle caustiche i Bernoulli, Hôpital, ecc.

Malus nel 1810 si occupò per il primo della teoria generale delle superficie caustiche, e trovò dei bei teoremi, a cui non potette dare la generalità che nel 1822 dette loro il Dupin (*Ann. de Gerg.*, XIV, pag. 129).

I teoremi sulle anticaustiche, quando i raggi incidenti partono da un punto, preveduti da Gergonne sin dal 1815 (*Ann. de Gerg.*, V, pag. 283; XI, pag. 229; XIV, pag. 1) furono trovati, per il caso particolare in cui la curva dirimente è un cerchio, da Quetelet (*Id.*, XV, pag. 205), e, per il caso di una curva dirimente qualunque, dal medesimo Autore (*Mém. Acad. Bruxelles*, III, pag. 89).

Nel frattempo Sarrus si occupò del caso dei raggi incidenti *paralleli*, e Gergonne dette prima una forma più generale alla costruzione trovata da Quetelet, e indi trovò i teoremi più generali surriferiti (per il caso cioè di un sistema qualunque *normale* di raggi incidenti).

Nel lavoro di Gergonne, che è a pag. 345 e seg. del vol. XV degli *Annales*, l'A. fa la storia di tali ricerche e riferisce anche il risultato che era stato ottenuto da Sarrus.

Altri lavori sul medesimo soggetto furono quelli di Timmermans (*Corresp. math.*, I, pag. 336) sulle superficie anticaustiche, di Cayley (*Phil. Trans.*, CXLVII, pag. 273), ecc.

Una bibliografia sulle caustiche si trova nell'*Interm. des math.*, 1895, pag. 321.

§ 4. — Curve e superficie parallele e curve e superficie concoidi.

Data una curva piana, una curva ad essa *parallela* è l'inviluppo delle rette perpendicolari alle normali della curva e distanti da questa, in ambedue le direzioni, per un segmento fisso $\pm k$.

Così due curve piane parallele sono anche *equidistanti*.

Due curve piane parallele hanno gli stessi centri di curvatura.

Alle volte la curva parallela ad una data si scinde in due parti, in quella cioè corrispondente a $+k$, e in quella corrispondente a $-k$, in generale si hanno però due rami della medesima curva.

Per la teoria delle curve parallele v. Salmon-Fiedler, *Ebene Curven*, ecc., § 118 e seg., Cesàro, *Geom. intrinseca*, pag. 29, ecc.

È evidente che in modo analogo possono definirsi le *superficie parallele.*

Si chiamano *concoidi* le curve ottenute da una data nel seguente modo: Sia O un punto del piano e P un punto di una curva data; sul raggio vettore OP si prendano da una parte e dall'altra di P due segmenti di lunghezza $\pm k$.

Il luogo degli estremi di tali segmenti è la *curva concoide.*

In modo analogo possono definirsi *le superficie concoidi.*

È facile la costruzione della normale alle concoidi; basta condurre per O la perpendicolare al raggio vettore e cercare l'incontro S di essa colla normale alla curva; *le normali alla concoide nei due punti che corrispondono a* P, *passano per* S.

In altri termini:

La concoide ha in ogni punto la stessa sunnormale polare della curva data.

Per la costruzione del centro di curvatura di una concoide vedi l'*Interm. des math.*, 1894, pagina 155; 1895, pag. 112, 224.

Una curva concoidale è poi definita nel seguente modo:

Si abbiano tre curve f, φ, ψ; si conduca una tangente ad f, che incontri φ e ψ in due punti A, B, e si taglino su questa tangente, a partire dal punto di contatto, da una parte e dall'altra, due segmenti eguali ad AB. Il luogo degli estremi di tali segmenti è la *curva concoidale.*

§ 5. — Curve settrici.

Si chiamano *settrici* le curve luogo dell'intersezione A di due rette rotanti *con velocità uniformi* intorno due punti fissi, P, P'.

Se le due velocità di rotazione sono rispett. nel rapporto $\frac{n}{n'}$ *(dove* $n' < n$*), l'angolo supplementare di* $AA'P$ *sta all'angolo* PAA' *nel rapporto* $\frac{n}{n'}$.

La curva settrice passa $n-1$ *volte per* P, $n'-1$ *volte per* P', *e* n' *volte per i punti ciclici del piano.*

Per $n' = 1$ o $n' = n - 1$ si hanno curve unicursali.

Per $n' = 1$ e $n = 3$ si ha *la trisettrice di Maclaurin* (vedi § 9).

Per $n' = 2$, $n = 3$ si ha *la lumaca di Pascal* (v. § 11) che può chiamarsi una *curva sesquisettrice.*

Il nome di *settrici* viene a queste curve dalla relazione che esse hanno col problema della divisione dell'angolo; propriamente se $n' = 1$ tali curve possono servire alla divisione dell'angolo in n parti eguali; se $n' = n - 1$, esse possono servire alla divisione dell'angolo in un numero frazionario $\frac{n}{n-1}$ di parti.

Per tali curve v. SCHOUTE (*J. des math. speciales*, 1885).

§ 6. — CURVE CICLOIDALI O RULLETTE. CURVE DI SDRUCCIOLAMENTO.

Si chiamano *curve cicloidali* o, con parola ricavata dal francese, *rullette*, le curve generate da un punto del piano di una curva, la quale rotola, senza strisciare, su di un'altra curva fissa *(base della rulletta)*.

Si chiamano poi *curve di sdrucciolamento* (i Francesi dicono *glissettes*) quelle generate da un punto del piano di una curva la quale, restando invariata di forma, si muove mantenendosi tangente a date curve o passando per dati punti.

Se $x = y\, f(y)$ è l'equazione della curva di sdrucciolamento luogo di un punto P del piano di una curva la quale è costantemente tangente ad una retta fissa in un punto fisso, sarà $\frac{dy}{dx} = -f(y)$ *l'equazione differenziale della rulletta del medesimo punto quando si fa rotolare quella curva su quella retta.* (Brocard, *Nouv. Corresp.*, II, 1876, pag. 377, 383.)

La normale alla rulletta passa per il punto M di contatto fra la curva fissa e la curva mobile.

Il centro di curvatura della rulletta si trova nel seguente modo: si congiunga il punto P della rulletta col centro di curvatura della curva mobile fino all' incontro in R colla perpendicolare abbassata per il punto M a P M. Congiungendo indi R col centro di curvatura della curva fissa, questa retta incontra P M nel centro di curvatura richiesto.

Per un' altra proprietà della rulletta in rapporto alla podaria v. il § 3.

La prima rulletta che fu studiata fu quella di un punto di un cerchio quando la base è una retta; essa fu considerata da B. Pascal nel 1659 e si chiama *cicloide* propriamente detta (v. § 12).

Per le *rullette* e le *curve di sdrucciolamento* citeremo la monografia abbastanza completa di Besant (*Notes on Roulettes and Glissettes*, Cambridge, 1870); v. anche vari articoli nei *Nouv. Ann.*, 1871 e le indicazioni contenute nel libro recente *litografato* di Brocard (*Notes de bibliogr. des courbes géométriques*, Bar le Duc, 1897).

§ 7. — Superficie di rotazione; cilindriche; coniche; conoidi.

L'equazione in termini finiti di una superficie di rotazione è sempre della forma (se l'asse z è l'asse di rotazione)

$$z = \varphi(x^2 + y^2)$$

dove φ *è il simbolo di una funzione arbitraria.*

Chiamando p, q le due derivate parziali di 1.º ordine di z, rispetto ad x e y, *l'equazione a derivate parziali della superficie di rotazione è*

$$p\,y - q\,x = 0.$$

L'equazione di una superficie cilindrica è della forma

$$\varphi(x - a\,z,\; y - b\,z) = 0$$

e l'equazione differenziale della stessa è

$$a\,p + b\,q = 1.$$

L'equazione di una superficie conica è della forma

$$\varphi\left(\frac{x - x_0}{z - z_0},\; \frac{y - y_0}{z - z_0}\right) = 0$$

essendo $(x_0\, y_0\, z_0)$ *il vertice.*

L' equazione differenziale della superficie conica è

$$p(x - x_0) + q(y - y_0) = z - z_0.$$

Si chiama *superficie conoide* una superficie generata da una retta che si appoggia ad una retta fissa e si mantiene parallela ad un piano fisso.

Se la data retta è l'asse z e il dato piano è il piano xy, *l'equazione differenziale del conoide è*

$$px + qy = 0,$$

e l'equazione in termini finiti è

$$z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

In generale, *l' equazione differenziale del conoide è*

$$p(az - x) + q(bz - y) = 0$$

e l'equazione in termini finiti è

$$z = \varphi\left(\frac{y - bz}{x - az}\right).$$

§ 8. — Coniche.

Alle considerazioni geometriche e analitiche sviluppate sulle coniche in un capitolo apposito (Capitolo IV) aggiungeremo ora i seguenti altri risultati metrici che dipendono specialmente dalla loro geometria infinitesimale.

La loro equazione intrinseca l'abbiamo notata nel Cap. XVI.

La podaria del fuoco di una conica è una circonferenza.

Il raggio di curvatura in un punto di un' ellisse di semiassi a e b è proporzionale al cubo della normale (terminata all'asse maggiore).

L'evoluta di un' ellisse di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (a > b)$$

ha per equazione

$$(a\,x)^{\frac{2}{3}} + (b\,y)^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}.$$

L'area di tutta l'ellisse è data da $\pi\,a\,b$, *e quella della sua evoluta è* $\frac{3}{8}\pi\,a\,b$.

L'arco di ellisse è dato da UN INTEGRALE ELLITTICO DI 2.ª SPECIE:

$$s = a \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}\; d\,\varphi, \qquad \left(e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}\right)$$

essendo φ *la cosiddetta* ANOMALIA, *cioè l'angolo dato dalle formole*

$$x = a \operatorname{sen} \varphi, \qquad y = b \cos \varphi;$$

(disegnando il cerchio concentrico all'ellisse e di raggio a, l'angolo φ è l'angolo che fa con y, il raggio vettore di quel punto del cerchio che ha per coordinate x, e $\frac{a}{b}\,y$, se x, y sono le coordinate del punto dell'ellisse).

Il perimetro di tutta l'ellisse si può esprimere colla serie

$$2\pi a \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} e\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4} e^2\right)^3 - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{5}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6} e^3\right)^2 - \ldots \right\}.$$

Dato un arco di ellisse, se ne può trovare un altro in modo che la differenza dei due è rettificabile (esprimibile immediatamente mediante un segmento di retta) (teor. di FAGNANO, *Prod. matem.* Pesaro, 1750, v. II).

Propriamente, si considerino due punti P, Q, su di un quadrante dell'ellisse tali che le loro anomalie φ, ψ sieno legate dalla relazione

$$\operatorname{tg}\varphi \,.\, \operatorname{tg}\psi = \frac{b}{a}.$$

Se si indicano con B e A rispettivamente gli estremi di quel quadrante, e si conducono le tangenti all'ellisse in P e Q, e dal centro le perpendicolari su tali tangenti, e sieno $P_1\,Q_1$ i piedi di queste perpendicolari, *la differenza fra gli archi* PB *e* QA *è data dalle lunghezze* PP_1 *ovvero* QQ_1 *(tali due lunghezze sono eguali).*

Per la costruzione del punto Q, dato che sia il punto P notiamo la seguente costruzione di EULERO (*Nova Comm. Petr.*, 1761): Si conduca la tangente in P sino a che incontri l'asse minore (passante per B) in R; indi si prenda sulla tangente la lunghezza $RPM = a$; il punto del quadrante che ha la stessa ascissa del punto M è il richiesto Q.

Su queste ricerche vedi le note II e III alla fine dell'opera di ENNEPER (*Ellip. Funct.* Halle, 1890).

L'arco di iperbole di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

si esprime colla formola:

$$a \left[\frac{\operatorname{sen} \varphi \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}{k \cos \varphi} - \frac{1}{k} \int_0^{\varphi} d y \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} + \right.$$

$$\left. + \frac{k'^2}{k} \int_0^{\varphi} \frac{d \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} \right],$$

dove φ *è l'anomalia, definita come sopra, e*

$$k^2 = \frac{a^2}{a^2 + b^2}, \quad k'^2 = \frac{b^2}{a^2 + b^2}.$$

Esso si esprime mediante integrali ellittici di 1.ª e 2.ª specie.

Anche per l'iperbole il FAGNANO trovò un teorema mediante cui è rettificabile la somma di due certi archi di cui uno è arbitrario.

Un teorema di LANDEN (*Phil. Trans.*, 1775) relativo agli archi di iperbole, *esprime un arco di iperbole mediante due archi di ellissi.*

Il limite della differenza fra la lunghezza dell'assintoto a cominciare dal centro sino ad un punto P', e la lunghezza dell'arco di iperbole a cominciare dal vertice A sino al punto P avente la medesima ascissa di P' (gli assi sono situati

come sopra) è una quantità determinata quando P si allontana all'infinito.

Per altre ricerche sugli archi di ellissi e iperboli oltre LEGENDRE (*Traité*, I, pag. 46), citeremo KÜPPER (*Crelle*, LV, LXIII).

Si abbia un'iperbole equilatera di equazione (riferita agli assintoti) $xy = m^2$.

L'area contenuta fra un arco di curva e un assintoto $y = 0$, *è data dalla formola* $m^2 \log \frac{\beta}{\alpha}$ *essendo* β, α *le distanze degli estremi dell'arco dall'altro assintoto* $x = 0$.

Per $m = 1$ e $\alpha = 1$, si ha che *l'area compresa fra un arco di curva contato a partire dal vertice e un assintoto, è eguale al logaritmo neperiano della distanza dell'estremo dell'arco dall'altro assintoto.*

Per altre proprietà dell'iperbole equilatera v. il libro di MILINOWSKI (*Elem. synt. Geom. der gleichseitigen Hyperb.* Leipzig, 1883) in cui è trattata con metodi elementari la geometria dell'iperbole equilatera.

In una parabola il raggio di curvatura è il doppio della porzione di normale intercetta fra il punto e la direttrice.

L'evoluta della parabola conica è una parabola semicubica, detta anche parabola di NEIL; *se* $y^2 = 2px$ *è la equazione della parabola, quella della evoluta è*

$$y^2 = \frac{8}{27p}(x - p)^3.$$

L'arco della parabola, a contare dal vertice, è dato dalla formola

$$s = \frac{y\sqrt{y^2+p^2}}{2p} + \frac{1}{2}p \log \frac{y+\sqrt{y^2+p^2}}{p}.$$

§ 9. — Cissoidi. Cubica o versiera di Agnesi. Trisettrice di Maclaurin. Strofoide. Folium.

La principale fra le *cissoidi* è quella detta di Diocle, il quale pensava di risolvere con questa curva il problema della *duplicazione del cubo (problema di Delo)*; v. Cantor, *Gesch. der Math.*, I, pag. 302-306. Questa curva fu adoperata dagli antichi anche per risolvere il problema di *trovare due medie proporzionali* (v. Newton, *Arith. univ.* Lugd. Batav., 1732, pag. 231).

La curva è generata nel seguente modo: si abbia un angolo retto fisso di cui un lato OP è di lunghezza fissa eguale ad $OP = a$; un altro angolo retto mobile ha un lato passante per P, mentre l'estremo dell'altro lato di lunghezza fissa eguale a $2a$, scorre sull'altro lato del primo angolo retto: *il luogo del punto medio del lato di lunghezza eguale a $2a$ è la cissoide* (Newton).

L'equazione della curva è

$$x^3 = y^2(2a - x).$$

Il punto $x = 0$ è una cuspide; la retta $x = 2a$ è un assintoto; la curva è sempre convessa rispetto all'asse di x. Essa è una curva ciclica, cioè passa

per i due punti ciclici del piano (detti anche da alcuni *ombelichi del piano).*

La curva può anche essere generata nel seguente altro modo: Si conduca un cerchio di diametro $2a$, e sia AB un suo diametro; sia BT la tangente al cerchio in B e da A si conducano tutte le rette BMN le quali taglino in M la circonferenza e in N la tangente BT. Prendendo le lunghezze $AP = MN$, *il luogo del punto P è la cissoide.*

L'area compresa fra la curva e l'assintoto (che è la retta BT) è tre volte l'area del cerchio che serve a generarla.

La cissoide è la podaria di una parabola rispetto al proprio vertice.

Si possono costruire le *cissoidi obliqui* in analogo modo che la cissoide di Diocle si costruisce per mezzo di un cerchio, solo che *in luogo di considerare un diametro del cerchio se ne considera invece una corda.*

Se poi invece di considerare un cerchio si considera una conica si ha *la cissoide di* Zahradnik (*Grunert's Arch.* LVI, 8; *Nouv. Corresp. math.* 1874-75, pag. 86).

Tale cissoide è sempre una *cubica razionale.*

Sia data una circonferenza con due rette diametrali fra loro perpendicolari. Dall'estremo O del diametro orizzontale si conduca una retta che tagli la circonferenza in A e il diametro verticale in B; dai punti A, B si conducano le parallele ai due diametri, le quali si incontrino in un punto P; il luogo di P è la *cubica o versiera di* Agnesi. *È una cubica con un punto doppio all'infinito.*

L'equazione di tale curva è

$$y^2 x + r^2 (x - 2r) = 0$$

r essendo il raggio del cerchio che serve a costruirla.

Per avere la tangente alla curva in P si fa la seguente costruzione: per A si conduca la tangente al cerchio sino a che incontri in M il diametro verticale, e dalla parte opposta si prenda $AM' = AM$; sulla retta OAB si prenda, dalla parte opposta di A rispetto ad O, $OR = AB$; da R si conduca la retta orizzontale sino all'incontro in S colla retta verticale passante per A. Da S si conduca la parallela ad RM' sino all'incontro in K del diametro orizzontale; la retta condotta da K verticalmente incontra la tangente AM al cerchio in un punto T che congiunto con P dà la tangente alla curva.

La tangente al cerchio nel punto O è un assintoto della curva.

L'area compresa fra la versiera e il proprio assintoto è il quadruplo dell'area del circolo che serve a costruire la curva.

La versiera e il circolo che serve a costruirla rotando attorno all'assintoto, generano due solidi di cui il primo ha un volume doppio del secondo.

La *versiera* fu studiata da M. G. Agnesi nelle sue *Istituz. analitiche.* Milano, 1748. Per molte notizie, anche su altre curve analoghe, a torto confuse da alcuni con quella di Agnesi, vedi un articolo di Loria (*Bibliotheca math.*, 1897, pag. 7).

Si chiama *trisettrice di* MACLAURIN la curva rappresentata dall'equazione

$$x(x^2 + y^2) = \frac{r}{2}(y^2 - 3x^2).$$

La sua costruzione è la seguente: si abbia un cerchio di raggio r e centro C con un diametro orizzontale $O\,C\,O'$ e una retta a questo perpendicolare nel punto medio di $O\,C$; dall'estremo O del diametro si conduca una retta che tagli in A il cerchio e in B la retta verticale; indi si prenda in direzioni *opposte* $O\,P = A\,B$*; il luogo di* P *è la trisettrice.*

Questa curva è una cubica con un punto doppio in O.

La tangente in A al cerchio incontra in M la retta verticale; prendendo in direzioni *opposte* $A\,T = A\,M$, *sarà* $T\,P$ *la tangente alla curva.*

Questa curva è una settrice (v. § 5. Per altre proprietà rimandiamo all'opera di BROCARD cit. alla fine del § 6.

Sulla *rettificazione* di questa curva per mezzo delle funzioni ellittiche (v. LONGCHAMPS, *Compt. Rend.*, 1887).

Se nella costruzione precedente si suppone che la retta perpendicolare al diametro orizzontale, anzichè passare pel punto medio di $O\,C$, passi per C (centro), la curva generata colla medesima costruzione è la *strofoide rettangolare* (detta anche *logociclica*), *la cui equazione è*

$$r(x^2 - y^2) = x(x^2 + y^2).$$

Si ha una cubica con un punto doppio in O. La tangente si costruisce come quella della trisettrice.

La strofoide è anche la podaria di una parabola rispetto al piede della direttrice; il vertice della parabola è in C, e la direttrice è la tangente in O al cerchio.

Proiettando ortogonalmente C sul raggio vettore O P, tale proiezione è il punto medio del segmento P B.

Se nella costruzione precedente invece di supporre verticale la retta passante per C, si suppone obliqua al diametro orizzontale si ha la *strofoide obliqua* o *focale di Quetelet*, la quale può anche considerarsi come *la podaria di una parabola rispetto ad un punto della direttrice.*

Per la bibliografia, la storia e altre proprietà di questa curva v. una nota di Tortolini nei *Nouv. Ann.*, 1861, pag. 82, una nota di Loria (*Bull. di Bibliogr. delle scienze mat.,* 1898, pag. 1) e le indicazioni contenute nel libro di Brocard (cit. al § 6); v. anche un articolo recente di Schoute (*Crelle,* IC) e le notizie contenute nell' *Interm. des math.*, 1895, pag. 425, 1896, pag. 278.

Il *folium di Descartes* è un'altra cubica razionale, la cui forma è somigliantissima a quelle della trisettrice e della strofoide.

Esso ha per equazione

$$x^3 + y^3 = 3\,r\,x\,y$$

ovvero, facendo rotare gli assi di 45°,

$$r\,(x^2 - y^2) = x\,(x^2 + 3\,y^2).$$

Per costruire geometricamente questa curva si costruisca, come sopra, la strofoide rettangolare. Indi sul raggio vettore OPB, si prenda il punto Q coniugato armonico di O rispetto al segmento PB; *il luogo di* Q *è il folium.*

La tangente in Q *si ottiene conducendo la tangente alla strofoide in* P (v. sopra); *indi si congiunga* Q *col punto in cui tale tangente incontra il diametro verticale.*

Questa curva fu studiata da ROBERVAL che le avea assegnato una forma erronea (donde il nome), e da DESCARTES. Vedi per più dettagli il libro citato di BROCARD.

§ 10. — OVALI DI CASSINI. LEMNISCATA. CURVA AD OTTO.

Si chiamano *ovali di Cassini* o *cassinoidi* o *ellissi di Cassini* quelle curve piane per le quali è costante il prodotto delle distanze di un loro punto da due punti fissi *(fuochi).*

Se $2a$ è la distanza fra i punti fissi, e b^2 è il prodotto delle distanze, *l'equazione della curva in coordinate cartesiane ortogonali è*

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = b^4 - a^4,$$

prendendo per assi coordinati rispett. l'asse focale e la sua perpendicolare nel punto medio del segmento dei fochi.

In coordinate polari ρ *e* φ, *l'equazione è:*

$$\rho^4 - 2a^2\rho^2\cos 2\varphi = b^4 - a^4.$$

I punti ciclici immaginari all' ∞ sono punti doppi per la curva, la quale è dell'ottava classe.

Il raggio di curvatura è dato da

$$R = \frac{2\,b^2\,\rho^3}{3\,\rho^4 - b^4 + a^4}.$$

Se $b < a$ la cassinoide si compone di due ovali esterne, l'una all'altra; se $b = a$ si ha la lemniscata (v. sotto); *se $a\sqrt{2} > b > a$ la curva ha la forma di un'ellisse schiacciata nei due estremi dell'asse minore; se $b > a\sqrt{2}$ la curva si compone di un' ovale sola.*

La tangente in un punto P si ottiene conducendo dai fuochi F, F' le perpendicolari ai raggi focali FP, $F'P$, e indi per P una retta che incontri tali perpendicolari in modo che il punto medio del segmento intercetto sia P.

Se si iscrive nella cassinoide un parallelogrammo avente il medesimo centro della curva, la somma algebrica degli angoli sotto cui si vedono i lati opposti da un punto della curva è costante (DARBOUX, *Sur une classe remarquable des courbes* etc. Paris, 1896, pag. 82).

Per lo studio di una classe generale di curve algebriche comprendenti come caso particolare le curve di Cassini, vedi il sopracitato libro di DARBOUX (pag. 61 e seg.).

(Lemniscata.) Per il caso in cui $b = a$ si ha la *lemniscata* di JAC. BERNOULLI (*Acta Erud.* 1694).

La lemniscata può anche definirsi come la curva costruita nel seguente modo:

Si consideri un cerchio e due sue tangenti fra loro perpendicolari che si incontrino in O. Su ciascuna retta condotta per O si costruiscano i due segmenti $\pm OP$ eguali rispettivamente alle lunghezze delle corde determinate da quelle rette sul cerchio; *il luogo degli estremi P è la lemniscata.*

Un'altra generazione della lemniscata è ancora la seguente:

Essa è il luogo dei piedi delle perpendicolari abbassate dal centro O di un' iperbole equilatera, sulle tangenti (PODARIA *di O rispetto all' iperbole equilatera).* Per ciò la lemniscata si suole anche chiamare *lemniscata iperbolica.*

La lemniscata è anche un caso particolare della curva di WATT (v. il citato libro di BROCARD).

La lemniscata ha la forma di un 8; ha un punto doppio in O; gli angoli delle due tangenti in O, coll'asse focale sono $\frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi$.

Il diametro passante per O è evidentemente un asse di simmetria della curva, e passa per i due fuochi (asse focale).

L'angolo che la tangente alla curva in un punto P fa col raggio vettore per O, è eguale al doppio dell'angolo che PO forma coll'asse focale, aumentato di un angolo retto; donde anche:

L' inclinazione della normale sull'asse focale è tripla di quella del raggio vettore.

La proiezione del raggio di curvatura sul raggio vettore è la terza parte del raggio vettore stesso.

L'equazione in coordinate ortogonali (prendendo per assi coordinati l'asse focale e la perpendico-

lare in O) è

$$(x^2 + y^2)^2 - 2\,a^2\,(x^2 - y^2) = 0.$$

L'equazione in coordinate polari è (il polo è in O, e l'asse polare è coincidente coll'asse focale):

$$\rho^2 = 2\,a^2 \cos 2\,\varphi.$$

Il raggio di curvatura è dato da

$$R = \frac{2\,a^2}{3\,\rho}.$$

L'area racchiusa dalla lemniscata è misurata da $2\,a^2$.

La evoluta della lemniscata ha per equazione

$$\left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right)\left(x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\,a.$$

Il volume del solido generato dalla rotazione della lemniscata intorno l'asse focale è

$$\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}\,a^3 \left\{ -\frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{2}} \log\,(1 + \sqrt{2}) \right\}.$$

L'arco di lemniscata è dato dalla formola

$$s = a\sqrt{2} \int_0^r \frac{d\,r}{\sqrt{1 - r^4}}\ ,\quad r = \frac{\rho}{a\sqrt{2}}$$

essendo ρ *il raggio vettore.*

Di quì si vede che *la lemniscata è una curva avente la proprietà che il suo arco si esprime per un integrale ellittico* DI 1.ª SPECIE. *Il modulo di*

LEGENDRE *corrispondente a tale integrale ellittico è* $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (v. *Repert.*, I, pag. 413).

Ponendo

$$r = \frac{u\sqrt{2}}{\sqrt{1-u^2}}$$

si ha

$$\frac{dr}{\sqrt{1-r^4}} = \frac{2\,du}{\sqrt{1-u^4}},$$

cosicchè, dato un arco cui corrisponde il raggio vettore $ar\sqrt{2}$, colla formola algebrica precedente (relazione fra r e u) si troverà il raggio vettore $au\sqrt{2}$ il quale corrisponderà ad un arco metà. Si ha così il mezzo di risolvere algebricamente il problema della *bisezione dell'arco di lemniscata.*

Il quadrante della lemniscata si può ALGEBRICAMENTE *dividere in 3 e 5 parti eguali; e quindi anche in ogni numero di parti dato da* 2^m, 3.2^m, 5.2^m (*teor. di* FAGNANO, *Produz. mat.* Pesaro, 1750, II, pag. 368).

A questo teorema è da aggiungersi quello di ABEL (*Crelle*, III):

Si può sempre con cerchi e rette dividere il quadrante della lemniscata in n parti eguali se n è della forma

$$2^m \quad \text{ovvero} \quad 2^m + 1.$$

ABEL dimostrò propriamente che si potea adoperare per ciò un metodo analogo a quello inven-

tato da Gauss per la divisione della circonferenza in parti eguali (risoluzione delle equazioni binomie, v. *Repert.*, I, pag. 120); ciò pare che fosse già conosciuto da Gauss stesso (v. *Op.*, I, pag. 412, 413; *Disq. arithm.*).

Oltre i citati lavori di Fagnano e quelli di Eulero (*Mém. de S. Pétersb.*, V, pag. 1751-52) altri lavori sulla divisione della lemniscata (teoria che ha legami con quella della moltiplicazione complessa delle funzioni ellittiche) sono quelli di Libri (*Crelle*, X), Liouville (*Compt. Rend.*, 1843, Clausen (*Astron. Nach.*, 1842), Wichert (*Prog. Conitz, Gymn.*, 1846), Eisenstein (*Crelle*, XXX, XXXIX), Hoffmann (*Crelle*, XLVIII), Kiepert (*Id.*, LXXV). La funzione inversa dell'integrale lemniscatico si suol chiamare *funzione lemniscatica*. Per altri dettagli v. Enneper (*Ellipt. Funct.*, pag. 382, 531, 546).

Definendo la lemniscata mediante l'iperbole equilatera (v. sopra) e quindi facendo corrispondere a punti dell'iperbole equilatera, punti della lemniscata, Chasles (*Compt. Rend.*, 1845) trovò che *a due archi dell'iperbole la cui differenza è rettificabile, corrispondono archi rettificabili della lemniscata.*

Delle curve che, come la lemniscata, hanno i loro archi che si esprimono per integrali di 1.ª specie, si occupò Legendre (*Traité des fonct. ellipt.*, II, 590), e indi Roberts (*J. de Liouville*, IX), Serret (*Id.*, X). Altri dettagli si trovano in Enneper (*cit.*, pag. 560); vedi anche Cayley (*Funz. ellitt.*, Cap. III, XV).

Il perimetro di tutta la lemniscata si può espri-

mere colla serie

$$4\sqrt{2}\,a\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{9}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{1}{13}+\ldots\right)$$

(Curva ad otto.) Una curva che ha la stessa forma della lemniscata di Bernoulli e che perciò da qualcuno è stata confusa colla lemniscata (vedi *Interm. des math.*, 1897, pag. 98 e 190-191), è quella detta da alcuni *lemniscata di Gerono*, e da altri *curva ad otto. La sua equazione è, sotto la forma più semplice:*

$$y^4 = y^2 - x^2.$$

La sua costruzione è la seguente:

Si proietti ortogonalmente un punto P di un cerchio su di un diametro in P', e sulla tangente all'estremità di questo; indi si congiunga il centro col piede di quest'ultima proiezione, e si determini il punto d'incontro di tale congiungente colla prima retta proiettante cioè con PP'. *Il luogo di tal punto d'incontro è la curva ad otto.*

§ 11. — Ovali di Cartesio. Lumaca di Pascal. Cardioide. Concoide di Nicomede. Spiriche.

Delle *ovali di Cartesio* abbiamo già trattato a pag. 284 di questo volume. Esse sono curve di quart'ordine con *due cuspidi nei due punti ciclici* del piano. Sono perciò *curve cicliche.*

Non ripeteremo le proprietà già enunciate al luogo citato; solo aggiungeremo:

L'equazione di una tal curva in coordinate cartesiane si può scrivere

$$(x^2 + y^2 - a^2)^2 + b\,(x - d) = 0;$$

in coordinate polari, prendendo un fuoco (v. pagina 284) *come polo, l'equazione della curva è*

$$\rho^2 - (a + b \cos \varphi)\,\rho + e^2 = 0;$$

infine in coordinate bipolari (cioè chiamando ρ, ρ' *i raggi vettori condotti da due fuochi della curva), l'equazione è:*

$$l\,\rho + m\,\rho' = c$$

dove l, m, c *sono costanti.*

Questa curva ha tre fuochi reali situati in linea retta, intendendo in generale per *fuochi di una curva* i punti d'intersezione delle rette tangenti alla curva e condotte per i due punti ciclici del piano, *che nel nostro caso appartengono alla curva e sono per essa cuspidi*

Fu Chasles che scoprì il terzo fuoco di questa curva, di cui Cartesio avea considerato solo due fuochi.

Questa curva può generarsi come luogo del terzo vertice di un triangolo, di cui gli altri due vertici (estremi della base) si muovono su due circonferenze, mentre la base rota intorno ad un punto situato sulla retta dei centri, e gli altri due lati rotano intorno ai centri delle due circonferenze. *Tali centri sono due fuochi della curva.*

Una proprietà ottica dei fuochi delle ovali di Cartesio è la seguente;

I raggi partenti da uno dei fuochi, rifratti dalla curva, con un indice di rifrazione eguale al rapporto dei raggi delle due circonferenze che servono a generare la curva stessa, convergono in un altro fuoco.

Le ovali di Cartesio *sono evolventi della caustica per rifrazione di un cerchio* (v. Salmon-Fiedler, *Ebene Curven*, II Aufl., pag. 127).

Nella prima geometria analitica che sia comparsa, cioè in quella di Cartesio del 1637 si trovano studiate, per la prima volta, le proprietà delle ovali cartesiane.

Fra i lavori assai più recenti su tali curve citeremo Genocchi (*Nouv. Ann.*, 1855, *Mathesis*, 1884); Zeuthen (*Nouv. Ann.*, 1864, pag. 304), Sylvester (*Phil. Mag.*, XXXI, 1866), D'Ocagne (*Compt. Rend.*, 1883, pag. 1424, ecc.).

Per un'estesa bibliografia vedi Liguine (*Bull. de Darboux*, 1882), e l'*Interm. des math.*, 1896, pag. 238-239.

Per la rettificazione delle ovali di Cartesio mediante tre archi di ellissi vedi Genocchi (*Ann. di Tort.*, VI, pag. 111; *Compt. Rend.*, 1875).

(Lumaca di Pascal.) Se nella equazione in coordinate polari delle ovali di Cartesio, si fa $e = o$, si ha l'equazione in coordinate polari della *lumaca di Pascal, la quale, oltre avere per cuspidi i punti ciclici, ha anche un punto doppio nell'origine.* A questa curva il nome fu dato da Roberval (*Ac. des scienc.*, 1708, pag. 78). *La sua equazione in coordinate polari può scriversi*

$$\rho = a + b \cos \varphi$$

e in coordinate ortogonali:

$$(x^2 + y^2 - b x)^2 = a^2 (x^2 + y^2).$$

Questa curva può definirsi come una *podaria* e come una *curva concoide*, (v § 2 e 4).

La lumaca di Pascal è una concoide del cerchio, ed è anche una podaria del cerchio.

Si abbia un cerchio di raggio a, e su di un diametro si prenda un punto P distante dal centro della lunghezza b. *La podaria di P rispetto al cerchio è la lumaca avente la equazione sopraindicata.*

Si costruisca poi il cerchio avente per diametro il segmento compreso fra P e il centro del cerchio; *staccando sui raggi vettori a quest'ultimo cerchio e partenti da P, le lunghezze costanti eguali ad a e da ambo le parti dell'estremo del raggio vettore stesso, si ha la lumaca.*

Altre costruzioni della lumaca sono:

Essa è la curva inversa (v. § 1) *di una conica, il centro d'inversione essendo un fuoco di questa.*

Si abbia un triangolo iscritto in un cerchio e di cui un vertice A è fisso e l'angolo A è costante; *la lumaca è il luogo dei centri dei cerchi inscritti ed ex-inscritti.*

Essa è anche il luogo del vertice di un angolo costante di cui i due lati sieno tangenti a due circonferenze date.

La lumaca di Pascal è anche una rulletta (vedi § 6), *generata da un punto connesso al piano di un cerchio, il quale rotola su di un altro cerchio di egual raggio.*

Caso particolare della lumaca di Pascal è la *cardioide, che si ottiene quando* $a = b$.

Questa curva si genera come luogo di un punto di una circonferenza che rotola su di un'altra di eguale raggio; ovvero come podaria di una circonferenza rispetto ad uno dei suoi punti; ovvero come concoide di un cerchio rispetto ad un suo punto, e staccando segmenti eguali al diametro; ovvero come l'inversa di una parabola il centro di inversione essendo nel fuoco.

La normale in un punto della cardiode passa per il punto di contatto delle due circonferenze che servono a generarla come rulletta.

L'area della cardioide è eguale a 6 volte quella del cerchio di cui è concoide, o $\frac{2}{3}$ *di quella del cerchio di cui è podaria (tale ultimo cerchio ha raggio doppio del primo, il quale è eguale ai cerchi che servono a generarla come rulletta).*

La lunghezza della cardioide è 16 volte il raggio del cerchio di cui è concoide e 8 volte quella del cerchio di cui è podaria.

Il raggio di curvatura in un punto è i $\frac{2}{3}$ *del segmento medio proporzionale fra il raggio vettore e il diametro del cerchio di cui la curva è podaria.*

La *concoide di Nicomede* è la *concoide* (v. § 4) di una retta.

In coordinate polari l'equazione della concoide è

$$\rho = \frac{a}{\cos \omega} \pm b$$

e in coordinate cartesiane è

$$y^2 (x - a)^2 = x^2 (b + a - x)(b - a + x),$$

dove a è la distanza del punto dalla retta base, e b è la lunghezza del segmento costante staccato sul raggio vettore.

La retta base della concoide ne è evidentemente un *assintoto.*

La *tangente* si costruisce col metodo generale relativo alle concoidi (v. § 4).

La concoide fu considerata da NICOMEDE per la risoluzione del *problema di Delo*, e fu adoperata da NEWTON per la risoluzione delle equazioni di 3.° e 4° grado (*Arith. univ.*, pag. 115). Vedi la *Geschichte der Math.* di CANTOR.

Si chiamano *curve spiriche* le sezioni del *toro* (superficie generata da un cerchio che rota intorno ad una retta del suo piano, v. anche Cap. XII, § 7) con piani paralleli all' asse di rotazione del toro.

Queste curve hanno per punti doppi i due punti ciclici del piano, e sono in generale di 4.° ordine.

Casi particolari di queste curve sono le ovali di Cartesio, la lemniscata, ecc.

È utile notare che alcuni Autori hanno chiamato in generale *spiriche* le curve passanti per i punti ciclici del piano, cioè le *curve cicliche;* vedi DARBOUX (*Sur une classe remarq.*, ecc. Paris, 1896).

Per la storia delle sezioni del toro vedi TANNERY (*Bull. des sc. mat.*, 1884) e SCHIAPARELLI (*Le sfere omocentriche di Eudosso, Callippo, ecc.).*

§ 12. — Cicloide. Trocoide. Ipocicloide. Epicicloide. Astroide. Tetracuspide.

La *cicloide*, propriamente detta, è la curva generata dal punto di una circonferenza di raggio r che rotola su di una retta (base).

L'equazione cartesiana della cicloide è

$$x = r \operatorname{arc\,cos} \frac{r-y}{r} - \sqrt{2ry - y^2}.$$

Chiamando θ l'angolo che la congiungente il punto P della curva col centro del cerchio generatore fa colla retta perpendicolare alla base (asse di x), *le coordinate* x, y *di* P *si esprimono in funzione di* θ *colle formole*

$$x = r(\theta - \operatorname{sen}\theta)$$
$$y = r(1 - \cos\theta).$$

L'equazione differenziale della cicloide è

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2r-y}{y}}.$$

L'equazione intrinseca della cicloide è

$$\rho^2 + s^2 = 16r^2.$$

La normale in un punto P si ottiene congiungendo P col punto di contatto A del cerchio e della retta.

Prolungando la normale di una lunghezza

eguale a PA oltre A, l'estremo di tal segmento, è il centro di curvatura.

La evoluta della cicloide è un'altra cicloide eguale alla data.

L'area compresa fra la base e uno dei rami di cicloide è tripla di quella del cerchio generatore.

L'arco di uno dei rami della cicloide è otto volte la lunghezza del raggio del cerchio generatore.

Colla cicloide si risolve il *problema della brachistocrona* (v. *Repert.*, I, pag. 268).

La cicloide è anche la curva passante per due punti e comprendente la minima area fra essa, la sua evoluta e le normali agli estremi (v. *Repert.*, I pag. 271).

La cicloide è una curva TAUTOCRONA, *cioè il tempo che impiega un punto pesante e percorrere gli archi di una cicloide rovesciata per giungere al punto più basso è costante qualunque sia il punto di partenza* (HUYGHENS, 1673).

(Per le *curve tautocrone* e la loro storia si vegga una monografia di OHRTMANN, Berlin, 1872, e una di AMODEO, 1883.)

La cicloide è una curva celebre nella storia delle matematiche; essa fu studiata dal Padre MERSENNE e da GALILEI. ROBERVAL nel 1634 ne trovò la quadratura; CARTESIO la costruzione della tangente; indi se ne occuparono B. PASCAL, HUYGHENS, i BERNOULLI, ecc.

Per altre notizie si vegga CHASLES, *Aperçu hist.*, pag. 529; GÜNTHER (*Bibl. math.*, 1887, pag. 8) e il libro citato di BROCARD.

Si chiamano *cicloidi allungate* e *cicloidi accorciate* o generalmente *trocoidi* quelle curve descritte da un punto rigidamente connesso al piano di un cerchio che rotola su di una retta, e la cui distanza dal centro del cerchio è rispett. *minore* o *maggiore* del raggio. Se è a tale distanza ed r il raggio del cerchio, *la equazione della curva è*:

$$x = r \arccos \frac{r - y}{a} - \sqrt{a^2 - (r - y)^2}.$$

Se un cerchio di raggio r rotola su di un altro di raggio R, la curva descritta da un suo punto si chiama *epicicloide* se i due cerchi sono *esterni* l'uno all'altro, e *ipocicloide* se i due cerchi sono *interni* l'uno all'altro.

Le coordinate di un punto sono date da

$$\left.\begin{aligned} x &= (r + R)\cos\theta + r\cos\frac{r+R}{r}\theta \\ y &= (r + R)\,\mathrm{sen}\,\theta - r\,\mathrm{sen}\frac{r+R}{r}\theta \end{aligned}\right\} \text{ per l'epicicloide.}$$

Per l'ipocicloide basta poi mutare $R + r$ *in* $R - r$.

Le evolute o le evolventi delle epicicloidi o ipocicloidi sono curve della stessa specie.

Se $r = R$ *si ha la cardioide* (v. § 10).

Se $r = \frac{R}{4}$ e il cerchio mobile è interno al fisso si ha la *ipocicloide a quattro cuspidi o astroide, la cui equazione è*

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = R^{\frac{2}{3}}.$$

La equazione intrinseca dell'astroide è

$\rho^2 + 4\,s^2 = 9\,R^2$ (CESÀRO, *Nouv. Ann.*, 1885, pag. 258).

Il perimetro dell'astroide è 6 volte il raggio del cerchio fisso; e l'area è $\frac{3}{8}$ *dell'area del medesimo cerchio.*

L'astroide si ottiene anche come inviluppo di una retta di lunghezza costante che si appoggia a due rette ortogonali.

Se $r = \frac{R}{3}$ si ha la *ipocicloide tricuspide o triangolare o di* STEINER.

L'ipocicloide tricuspide è l'inviluppo della cosiddetta retta di SIMPSON *o di* WALLACE *relativa al triangolo delle tre cuspidi, cioè della retta su cui si trovano i piedi delle perpendicolari abbassate sui lati del triangolo da un punto della circonferenza circoscritta* (v. più avanti *Geom. del triangolo*, Capitolo XXII).

Si chiamano generalmente *epitrocoidi* le curve generate da un punto del piano di un cerchio che rotola esternamente ad un altro cerchio fisso. Più specialmente, secondochè il punto è esterno o interno al cerchio mobile, si hanno due specie di curve che si sogliono distinguere coi nomi di *epicicloidi accorciate o allungate.* Analoghe definizioni per le *ipotrocoidi*, ovvero *ipocicloidi accorciate o allungate.*

Le *epi-* e *ipocicloidi* furono considerate da DE LA HIRE (*Mém. de Paris*, 1694, 1706), da NEWTON (*Principia*, ecc.) che ne studiò la rettifica-

zione, e da EULERO (*Nova Comm. Petrop.*, 1766, 1781; *Acta Petrop.*, 1784), RAABE (*Crelle*, I), ECKARDT (*Zeitschr. f. math.*, XV, 1870), KIEPERT (*Id.*, XVII, 1872).

Della ipocicloide tricuspide si occupò STEINER (*Crelle*, LIII, LV), indi CREMONA (*Crelle*, LXIV), CLEBSCH (*Id.*), BATTAGLINI (*Giorn. di Batt.*, IV, 1866), PAINVIN (*Nouv. Ann.*, 1870), CAHEN (*Id.*, 1875), LAGUERRE (*Bull. Soc. math.*, VII, pag. 108), INTRIGILA (*Giorn. di Batt.*, 1885), ecc.

L'area ne fu calcolata da BALITRAND (*Journ. de Longchamps*, 1893, pag. 75). Vedi anche il Cap. VII della *Teoria delle curve piane* di SALMON-FIEDLER).

Se nella seconda costruzione dell' astroide (quella che dà l'astroide come un inviluppo) si suppone invece che le due rette fisse non sieno ortogonali ma inclinate di un angolo α, si ha la curva chiamata *tetracuspide*, inviluppo di una retta di lunghezza costante a, e i cui estremi si appoggiano a due rette inclinate dell'angolo α.

Questa curva è di 6.° ordine e 4.ª classe.

La sua area è $\dfrac{\pi a^2}{8 \operatorname{sen}^2 \alpha}(1 + 2 \operatorname{sen}^2 \alpha)$.

Lo studio di questa curva fu proposto da MERLIEUX nel 1842 (*Nouv. Ann.*, 1842, pag. 59, questione 12); JOACHMISTHAL ne trovò l' equazione (*Id.*, 1847); STEINER (*Id.*, 1858) ne enunciò molte proprietà. Essa fu poi anche studiata da BELLAVITIS che le dette il nome (*Metodo delle equipollenze)*, da MANNHEIM (*Nouv. Ann.*, 1878); per la rettificazione v. *Mathesis*, 1894, pag. 129, e per altre indicazioni v. *Interm. des math.*, V, p. 160).

§ 13. — Le spirali. Le curve di Ribaucour.

Si sogliono indicare col nome di *spirali* delle curve le quali si svolgono in infinite spire attorno un punto, o all'esterno o interno di una curva. Il nome comune di *spirali* si riferisce più alla maniera colla quale la figura di quelle curve si presenta ai nostri occhi, che non ad una proprietà comune a tutte quelle curve.

Una curva a spirale è necessariamente una curva trascendente.

La *spirale d'*Archimede (o anche detta *spirale di* Conon) ha per equazione in coordinate polari $\rho = a\varphi$.

Essa è perciò la traiettoria di un punto che si allontana con moto uniforme su di una retta, mentre questa rota con moto uniforme intorno ad un suo punto. Essa si compone di due parti simmetriche fra loro e corrispondenti alle due parti nelle quali la retta mobile è divisa dal punto fisso.

Nella spirale d'Archimede la sunnormale polare è costante ed eguale al parametro a.

L'area polare compresa fra un arco della spirale d'Archimede e i due raggi vettori estremi è data dalla formola

$$\frac{a^2}{b}({\varphi_1}^3 - {\varphi_2}^3)$$

essendo φ_1, φ_2 *gli argomenti dei due estremi dell'arco.*

La spirale d'Archimede è la podaria della evolvente di un cerchio rispetto al centro del cerchio stesso.

La *spirale logaritmica* ha per equazione polare

$$\rho = e^{a\varphi}.$$

La sua evoluta, la sua caustica per riflessione, e la caustica per rifrazione sono delle nuove spirali logaritmiche eguali alla data (JACQ. BERNOULLI, *Acta Erud.*, 1691).

La curva incontra il raggio vettore sotto angolo costante (donde anche il nome di *spirale equiangolare*).

L'origine dei raggi vettori è un punto assintotico della curva.

Gli archi contati a partire dal punto $\rho = 1$, $\varphi = 0$, *e nel senso negativo di rotazione, tendono alla quantità finita* $\frac{\sqrt{1 + a^2}}{a}$ *quando l'estremo tende al polo.*

Il centro di curvatura è l'estremità della sunnormale polare.

La rulletta e la curva di sdrucciolamento (v. § 6) *del polo della spirale logaritmica rispetto ad una stessa retta base sono due rette ortogonali.*

La spirale logaritmica è la sua propria polare reciproca rispetto ad ogni iperbole equilatera che ha il suo centro al polo della spirale e che le è tangente. (KLEIN-LIE, *Bull. des scienc. math.* 1872, pag. 331.)

L' inversa della spirale logaritmica, il centro di

inversione essendo nel polo, è ancora una spirale logaritmica eguale alla prima.

La spirale logaritmica fu considerata prima da CARTESIO, indi da JACQ. BERNOULLI. Alcune indicazioni bibliografiche si trovano nel libro citato di BROCARD; una breve monografia su questa curva è quella di WHITWORTH (*Nouvelles Ann.*, 1869). Vedi anche il Cap. VII del Trattato sulle curve piane di SALMON.

La *spirale iperbolica* è l'inversa della spirale d'Archimede; *la sua equazione polare è*

$$\rho = \frac{a}{\varphi}.$$

La curva ha il polo per punto assintotico, e una retta per assintoto; essa si compone di due rami simmetrici rispetto alla retta perpendicolare all'assintoto e passante pel polo.

La sottangente polare è costante.

La spirale iperbolica è la proiezione di un'elica in un piano perpendicolare all'asse, e da un punto di quest'asse

---

La *spirale parabolica o di* FERMAT è quella di equazione

$$\rho^2 = \varphi.$$

Sia O il polo e OM l'asse polare incontrato dalla spirale successivamente nei punti

$$O,\ M,\ M',\ M'',\ldots$$

Fatto centro in O e raggio OM e descritta la circonferenza, *l'area racchiusa fra il primo arco OM di spirale e l'asse OM, è metà dell'area del cerchio; la medesima area è metà di quella compresa fra il primo ramo di spirale, il secondo ramo MM' e la retta MM'; mentre questa ultima area è eguale a quella compresa fra il secondo ramo, il terzo ramo e la retta $M'M''$, la quale a sua volta è eguale all'area compresa fra il terzo ramo, il quarto e la retta $M''M'''$ e così di seguito.*

Le linee tali che la proiezione del centro di curvatura sul raggio vettore, divida questo raggio in un rapporto costante, si chiamano *spirali sinusoidi* (De la Goupillière); *la loro equazione polare è data da*

$$\rho^n = a^n \operatorname{sen}(n\varphi)$$

e la loro equazione intrinseca è

$$s = \frac{n+1}{n-1} \int \frac{d\rho}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{a}\right)^{\frac{2n}{n-1}} - 1}}.$$

L'angolo che la tangente alla curva fa col raggio vettore è $n\varphi$.

Per valori particolari di n *(indice)* si hanno curve già conosciute e semplici; p. es. per $n=1$ si ha la circonferenza, per $n=-1$ si ha la retta.

Affini alle spirali sinusoidi sono le *curve di Ri-*

baucour, la cui equazione intrinseca è

$$s = \frac{n+1}{n-1} \int \frac{d\rho}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{a}\right)^{2\frac{n+1}{n-1}} - 1}} .$$

Le *curve di Ribaucour* sono quelle il cui raggio di curvatura è proporzionale al segmento di normale compreso fra il punto della curva e una retta fissa.

Il numero n si dice *indice*, sia per la spirale sinusoide che per la curva di Ribaucour.

Se una spirale sinusoide di indice n rotola su di una retta, il suo polo (origine dei raggi vettori) descrive una curva di RIBAUCOUR *d'indice*

$$\frac{n-1}{n+1} .$$

Per le spirali sinusoidi citeremo DE LA GOUPILLIERE (*Nouv. Ann.*, 1876, pag. 97), BROCARD (*Id.*, 1886), ecc.

Le curve di RIBAUCOUR furono incontrate da questo Autore nelle sue ricerche sulle superficie minime (*Mém. de l'Acad. de Belgique*, XLIV; *Nouv. Ann.*, 1888), ecc.

Una trattazione di tali due specie di curve si trova in CESÀRO (*Geom. intrins.*, 1896, pag. 45). Per altre indicazioni v. BROCARD (*cit.* al § 6).

§ 14. — Catenaria. Curve di Delaunay. Trattrice. Sinusoide. Quadratrice. Curva elastica.

La *catenaria* è la curva d'equilibrio d'un filo pesante fisso in due dei suoi punti.

La sua equazione è

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

e la sua equazione intrinseca è

$$a\rho = a^2 + s^2.$$

L'asse delle x, che dista della lunghezza a dal punto più basso A della curva, si chiama *asse della catenaria; rispetto ad esso la curva è convessa.*

La catenaria è la rulletta del fuoco della parabola che rotola su di una retta.

La tangente alla catenaria in un punto P si costruisce conducendo il cerchio di centro il piede dell'ordinata di P, e di raggio a, e conducendo da P una tangente a tal cerchio.

Il raggio di curvatura è eguale alla porzione di normale sino all'incontro dell'asse di x; quindi il centro di curvatura si ottiene trasportando in direzione opposta tale lunghezza di normale.

La catenaria è, di tutte le curve isoperimetriche, quella di cui il centro di gravità è il più basso (v. *Repert.*, I, pag. 270).

Colla rotazione intorno all'asse la catenaria ge-

nera il *catenoide* che è una superficie minima (v. Cap. XVI, e *Repert.*, vol. I, pag. 272 in cui si riferisce anche un'altra proprietà del catenoide).

L'arco AP della catenaria si ottiene conducendo dal punto d'incontro della tangente in P con quella in A, la perpendicolare alla tangente in P sino all'incontro dell'asse in R, e indi proiettando in Q sull'asse x, il medesimo punto di incontro. *La lunghezza* QR *è eguale all'arco* AP.

L'area compresa fra l'arco AP *della catenaria e l'asse di* x *è eguale al prodotto dell'arco* AP *per il parametro* a.

La curva d'equilibrio d'un filo pesante fu considerata erroneamente da Galilei (il quale avea creduto che fosse una parabola); indi da Leibnitz e Jacq. Bernoulli.

Per notizie storiche v. un articolo di Laisant (*Ass. Franç. Congrès de Toulouse*, 1887, pag. 64).

Insieme alla catenaria ordinaria, che è la rulletta del fuoco di una parabola, si possono considerare le rullette dei fuochi di un'ellisse o di un iperbole. Le curve generate sono chiamate *catenarie ellittiche o iperboliche*, ovvero *curve di* Delaunay, il quale le studiò per il primo riconoscendole come *le curve meridiane d'una superficie di rivoluzione a curvatura media costante (onduloide e nodoide*, v. Cap. XVI).

L' equazione differenziale delle curve di Delaunay è

$$(y^2+b^2)\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}-2ay=0,$$

e l'equazione intrinseca è

$$\frac{e}{a}\rho = e - \cos\frac{s}{a} + \frac{\operatorname{sen}^2\frac{s}{a}}{e - \cos\frac{s}{a}}.$$

Ogni curva di Delaunay è parallela ad una curva eguale.

Per queste curve si può vedere p. es. Cesàro, *Geom. intrins.*, pag. 69.

La *trattrice* è la curva tale che le lunghezze delle tangenti comprese fra il punto di contatto e una retta fissa, è costante ($= a$). La retta fissa si chiama *assintoto della trattrice.*

La equazione differenziale è

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}$$

e l'equazione in termini finiti è

$$x = -\sqrt{a^2 - y^2} + a\log\frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y}.$$

Questa curva è anche la traiettoria ortogonale dei cerchi di raggio a e i cui centri stieno sull'asse; o anche una evolvente di una catenaria.

Essa è anche l'inviluppo dell'asse di una parabola che rotola su di una retta.

La trattrice è anche la curva meridiana della pseudosfera, e dell'elicoide pseudosferica del Dini (v. Cap. XVI).

Il raggio di curvatura in un punto P si determina conducendo dal vertice della curva

$$(x = 0, \qquad y = x)$$

la parallela alla tangente in P, fino ad incontrare l'assintoto in R; *il segmento* OR (essendo O la proiezione ortogonale del vertice sull'assintoto) *è il raggio di curvatura.*

Si chiamano *trattrice allungata e accorciata* le proiezioni della trattrice ordinaria su di un piano passante per l'assintoto, con rette proiettanti rispett. perpendicolari al piano della trattrice, ovvero perpendicolari al piano di proiezione (vedi BIANCHI, *Geom. diff.*, pag. 243).

La trattrice fu studiata da BOMIE (*Acad. des sciences de Paris*, 1712, pag. 281); v. anche CESÀRO (*Mathesis*, 1882, pag. 217).

La *sinusoide* ha per equazione

$$y = \operatorname{sen} x.$$

Essa ha infiniti flessi sull'asse di x, *a distanze eguali; in tali punti la tangente è inclinata di 45.°*

L'area compresa fra un arco di sinusoide limitato fra due flessi consecutivi e l'asse di x, *è il doppio di quella del quadrato costruito sull'unità lineare, che è rappresentata dall' altezza, sull'asse di* x, *del punto della sinusoide in cui la tangente è parallela all'asse di* x *stesso.*

La lunghezza del medesimo arco di sinusoide è quella di una semiellisse, di semiassi $\sqrt{2}$ *e* 1; *in*

formola è data da

$$\pi\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2+\frac{1}{5}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2-\dots\right].$$

La *quadratrice* di Dinostrato è la curva di equazione

$$\rho=\frac{2}{\pi}\,\frac{\varphi}{\operatorname{sen}\varphi}$$

ovvero:

$$y=x\operatorname{tg}\frac{\pi y}{2}.$$

Essa ha per assintoti le rette parallele alla retta $y=0$, *e distanti da questa delle quantità* ± 2, $\pm 4, \dots$

La quadratrice può definirsi nel seguente modo: si immagini un cerchio con due diametri ortogonali, OA, OB. Si facciano contemporaneamente partire da O e da A, due mobili con velocità uniformi l'uno su OB e l'altro sull'arco di cerchio AB; in modo che contemporaneamente si trovino in B; *se* L, M *sono due posizioni in cui contemporaneamente si trovano i due punti mobili, il luogo dell' incontro di* OM *colla parallela ad* OA *condotta da* L *è la quadratrice.*

La distanza del vertice della quadratrice dal centro del cerchio è $\frac{2}{\pi}$; così indirettamente, costruita la quadratrice, si viene a conoscere π; ecco perchè tale curva potrebbe servire alla *quadratura del cerchio.*

Questa curva fu studiata anche da Newton

(*Opuscula*, I, pag. 102). Per notizie storiche vedi un articolo di P. TANNERY (*Bullett. des sciences math.*, 1883, pag. 278).

La *curva elastica* è quella di equazione differenziale

$$dx = \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^4 - x^4}}.$$

Essa è la curva di equilibrio di una lamina elastica fissa in un estremo, e premuta con forze convenienti all'altro estremo. Fu studiata la prima volta da JACQ. BERNOULLI (*Ac. de Paris*, 1703, 1705).

Questa curva ha il raggio di curvatura inversamente proporzionale all'ascissa.

La curva elastica è fra tutte le curve isoperimetriche passanti per due punti fissi quella che ha il volume di rotazione massimo (v. *Repert.*, I, pagina 272).

Per questa curva dal punto di vista delle funzioni ellittiche vedi ENNEPER, *Ellipt. Funct.*, pagina 525 e il secondo volume dell'opera di HALPHEN (*Fonct. ellipt.*).

§ 15. — CURVE GOBBE. ELICHE. LOSSODROMICHE.

Si dice *elica cilindrica* la curva tracciata su di un cilindro e che incontra sotto angolo costante le generatrici del cilindro stesso. *Essa è una geodetica del cilindro.*

Per lo sviluppo del cilindro su di un piano, la elica diventa una retta.

In ogni punto la normale principale dell'elica coincide colla normale alla superficie.

Per ogni elica cilindrica è costante il rapporto delle due curvature, e reciprocamente.

Le due curvature sono costanti solo per le eliche tracciate su di un cilindro circolare retto (PUISEUX; v. anche Cap. XVI, § 4).

Le eliche si distinguono in *sinistrorse* e in *destrorse* secondo la loro direzione rispetto alle generatrici del cilindro; propriamente supponiamo messo il cilindro in modo che le sue generatrici sieno nella direzione del raggio visivo, e che un punto percorra l'elica in maniera da avvicinarsi all'osservatore; se il movimento del punto appare secondo la direzione del movimento dell' indice dell'orologio, si ha l'elica *sinistrorsa*; e si ha l'elica *destrorsa* nel caso contrario.

Così l' elica tracciata su di una ordinaria vite da falegname è una *elica destrorsa.*

Le coordinate di un punto di un'elica cilindrica circolare (descritta su di un cilindro circolare retto) sono date dalle formole

$$x = r \cos \theta$$
$$y = r \operatorname{sen} \theta$$
$$z = \operatorname{tg} \varphi \,.\, r \,.\, \theta$$

essendo r il raggio del cerchio base e φ *l'angolo costante sotto cui l'elica incontra le generatrici.*

L'arco di elica circolare è dato da

$$s = r\,\theta \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}.$$

L'elica cilindro-conica è quella tracciata su di un cono di rotazione e che taglia sotto angolo costante le generatrici.

La proiezione di tale elica su di un piano perpendicolare all'asse del cono è una spirale logaritmica; tale elica è dunque anche tracciata su di un cilindro avente per base una spirale logaritmica, e per tale cilindro essa è anche un'elica, cioè ne incontra sotto angolo costante le generatrici.

Sviluppando il cono su di un piano, l'elica cilindro-conica si distende anche in una spirale logaritmica.

La normale principale è perpendicolare all'asse del cono.

Le eliche considerate di sopra appartengono alla classe più generale delle *curve lossodromiche* cioè di quelle tracciate su di una superficie di rotazione, e che incontrano sotto angolo costante i meridiani di tale superficie.

È stato specialmente studiato il caso in cui la superficie di rotazione è una sfera. Vedi per es. JOACHMISTHAL (*Anwend. der Diff. und Integralrech.*, Leipzig, 1872, pag. 83).

Per la storia delle lossodromiche v. un lavoro di GÜNTHER, *Studien zur Geschichte der math. Geographie*, Halle, 1879, e anche un esteso articolo bibliografico di BROCARD (*Bull. de Darboux*, 1879, 1.ª p., pag. 329).

§ 16. — Cicliche sferiche. Finestre di Viviani. Spiriche sferiche.

Si sogliono chiamare *cicliche sferiche* le intersezioni di una sfera con superficie di 2.° grado. Caso particolare delle cicliche sferiche sono dunque le *coniche sferiche* (v. Cap. X, § 1).

Le cicliche piane possono considerarsi come le inverse delle cicliche sferiche; basterà fare un'inversione per la quale la sfera si trasformi in un piano.

Per lo studio di tali curve citeremo il libro di Darboux, *Sur une classe remarq.* ecc. Paris, 1896), dove si trovano anche molte altre indicazioni bibliografiche.

Se data una semisfera, si descrive un diametro del piano equatoriale, e sui due raggi del diametro si descrivono due cerchi aventi quei raggi per diametri, e indi i cilindri retti aventi quei cerchi per basi, l'intersezione di uno di questi cilindri colla sfera è una curva che si chiama *curva di Viviani* o *finestra di Viviani.*

Tale curva fu originata dal problema proposto da Viviani nel 1692, e risoluto poi da Viviani stesso, da Leibnitz (*Acta Erud.*, 1692) e da Giov. Bernoulli (*Ibid.*); si proponeva di descrivere su di una volta emisferica quattro finestre eguali e in modo che la parte restante sia quadrabile.

Descrivendo i due cilindri sopraindicati, l'area

rimanente della sfera equivale al quadrato costruito sul diametro della sfera stessa.

Le *spiriche sferiche* sono intersezioni di una sfera con un toro (v. DARBOUX, cit.).

Per indicazioni su altre curve speciali si potrà con profitto consultare un libro recente di BROCARD (*Notes de Bibliographie des courbes géom.* Bar Le Duc, 1897, litogr. *con suppl.* 1899), originato da una quistione proposta da DE LA GOUPILLIERE nel volume I, pag. 37 dell'*Interm. des mathematiciens* (1894), in cui si domandava una monografia su tutte le curve speciali che aveano ricevuto nomi particolari. Una medesima quistione fu proposta per tema di concorso per gli anni 1894 e 1897 dall'Accademia delle scienze di Madrid, e tal concorso fu vinto recentemente dai Sig.[ri] GINO LORIA e F. GOMES TEIXEIRA. Il lavoro premiato del primo di questi due Autori è intitolato: *Le curve piane algebriche e trascendenti; teoria e storia. Saggio di geometria comparata del piano.*

CAPITOLO XVIII.

Analysis situs o Topologia.
Teoria dei poliedri.
Connessione delle superficie di Riemann.

§ 1. — Connessione delle superficie. Superficie unilatere e bilatere. Numero fondamentale. Genere.

Una superficie può essere *aperta o chiusa;* è *aperta* quando possiede degli *orli*, cioè delle linee nei cui punti essa si termina; è *chiusa* quando non possiede orli.

Un'area infinitesima attorno ad un punto su di una superficie potrà essere guardata da due versi o *facce* opposte, che corrispondono alle due direzioni della normale alla superficie in quel punto; in relazione a tali due facce, ogni punto può essere considerato come doppio, secondochè si immagina appartenere all'una o all'altra; diremo allora che tali due punti, in cui un medesimo punto si immagina sdoppiato, sono *coniugati* l'uno dell'altro.

Una superficie può essere *bilatera*, ovvero *a due facce*, e *unilatera* ovvero *a una faccia*.

È *bilatera* quando, partendo da un punto della superficie, e seguendo cammini continui tracciati sulla stessa e senza attraversare gli orli, non si può mai giungere al punto coniugato a quello di partenza; è invece *unilatera* quando ciò si può fare.

Esempi di superficie bilatere sono la sfera, una porzione di piano, ecc.

Esempi di superficie unilatere sono quelli dati da Möbius (*Zur Theorie der Polyëder*, ecc. Opere, II; *Ueber die Bestimmung des Inhalts einer Polyëders*, 1865; Opere, II).

Si abbia un rettangolo di carta convenientemente lungo $ABCD$; i lati più lunghi sieno AC, BD; si riunisca l'orlo CD coll'orlo AB, dopo averlo fatto rotare intorno alla congiungente i punti medi dei lati AB, CD, in modo che il punto D venga a coincidere con A, e C con B. *La superficie che si viene a formare è unilatera aperta con un orlo solo.*

Se prima di far coincidere CD con AB, si fa rotare CD un numero dispari di volte intorno alla congiungente i punti medi dei lati AB, CD, e poi si stabilisce, come prima, la coincidenza dei due lati, si ha ancora una *superficie unilatera aperta ad un orlo solo.*

Si può formare anche una superficie unilatera *chiusa* nel seguente modo (Möbius).

Se A, B, C, D, E sono cinque punti, quattro qualunque non appartenenti ad un piano, i cinque triangoli ABC, BCD, CDE, DEA, EAB costituiscono una *superficie unilatera aperta* che ha per contorno il pentagono $ACEBD$.

Preso un punto P che insieme a tre qualunque dei primi cinque punti, non stia in un piano, i cinque triangoli considerati e i cinque altri PAC, PCE, PEB, PBD, PDA, sono le facce di un poliedro intrecciato che costituisce una *superficie chiusa unilatera.*

Un'altra superficie chiusa unilatera si può ottenere nel seguente modo:

Immaginiamo una sfera con *due* buchi; da uno di questo facciamo partire un tubo esternamente alla sfera, indi facciamolo rientrare nella sfera formando un intreccio, e terminare all'altro buco ma incontrando la sfera dall'interno. Si ha una superficie *unilatera chiusa* (DYCK, *Math. Ann.*, XXXII).

Tagliando la superficie lungo i punti di una sua qualunque linea, si fa ciò che si chiama *un taglio.*

Un taglio può essere *aperto* o *chiuso*. Fra i tagli aperti notiamo quelli i cui estremi sono due punti di uno stesso orlo *(tagli di 1.ª specie)* e quelli i cui estremi sono due punti di orli diversi *(tagli di 2.ª specie).*

Un taglio chiuso, ovvero aperto di 1.ª o 2.ª specie, non può spezzare la superficie in più che in DUE *pezzi.*

Se una superficie è bilatera un taglio aperto di 1.ª specie aumenta di 1 il numero degli orli; se una superficie è unilatera, un analogo taglio invece o non muta il numero degli orli o lo aumenta di 1.

Un taglio di 1.ª specie lo diremo rispett. *di 1.ª o di 2.ª classe* secondochè, nel caso della superficie unilatera, *aumenta o no* il numero degli orli.

Il taglio di 1.ª specie e 2.ª classe non spezza mai una superficie unilatera.

Un taglio di 2.ª specie diminuisce di 1 il numero degli orli di questa, e non può mai spezzarla.

*Un taglio eseguito lungo una linea aperta di cui uno estremo è su di un orlo, e l'altro estremo, come anche tutta la linea, è nell'interno * della superficie, non aumenta il numero degli orli e non spezza mai la superficie.*

Se infine i due estremi della linea aperta e tutta situata nell'interno della superficie, non sono su alcun orlo, il numero degli orli si aumenta di 1, ma la superficie non si spezza.

Se una superficie è bilatera un taglio chiuso aumenta di 2 il numero degli orli; e se è unilatera un taglio chiuso aumenta di 2 o di 1 il numero degli orli. Diremo che il *taglio chiuso, su di una superficie unilatera, è di 1.ª o di 2.ª classe* secondochè si verifica l'una o l'altra circostanza.

Un taglio chiuso di 2.ª classe non spezza mai una superficie unilatera.

Se in una superficie si può fare un taglio aperto di 1.ª specie senza spezzarla, si potrà anche fare un taglio chiuso senza spezzarla, e viceversa.

Una superficie si dice *semplicemente connessa* se è finita, aperta, limitata da *un* orlo solo, e tale che qualunque taglio chiuso (ovvero, ciò che è equivalente, qualunque taglio aperto congiungente due punti dell'orlo) la spezzi.

---

* Si intende ovviamente per *interno di una superficie* l'assieme di tutti i punti della stessa che non appartengono al contorno.

Una superficie semplicemente connessa è sempre bilatera.

La porzione piana limitata da un cerchio è l'esempio più semplice di una superficie semplicemente connessa.

Immaginando la superficie formata di una tela flessibile ed elastica, ogni superficie semplicemente connessa si può sempre intendere, trasformabile in questa sopraindicata, con deformazioni continue, cioè con stiramenti e restringimenti, ma senza rotture.

Si possono sempre eseguire su di una superficie bilatera, tagli chiusi o aperti di 1.ª e 2.ª specie in modo da ridurla semplicemente connessa.

Con tagli aperti di 1.ª specie e 2.ª classe o chiusi di 2.ª classe si può sempre ridurre bilatera una superficie unilatera.

Si abbia una superficie e con opportuni tagli dividiamola in un numero finito α di parti ciascuna semplicemente connessa. Supponiamo che per ciò fare si eseguano: un certo qualunque numero di tagli chiusi, e tagli aperti di cui uno solo degli estremi appartenga ad un orlo; e poi τ_1 tagli aperti di 1.ª specie, τ_2 tagli aperti di 2.ª specie, τ_3 tagli aperti del tutto interni alla superficie (anche i loro *estremi* sieno interni alla superficie). Si ha allora:

Il numero

$$\tau_1 + \tau_2 + \iota_3 - \alpha$$

è costante in qualunque modo si eseguano quei tagli.

Tal numero aumentato di 2 si suol chiamare *il numero fondamentale* della superficie.

Se invece di una superficie se ne ha un gruppo

di s di esse, allora sussiste l'analogo teorema rispetto a tutto il gruppo, e si dà analoga definizione per il *numero fondamentale* del gruppo.

Il numero fondamentale K del gruppo, si esprime mediante i numeri fondamentali K_i di ciascuna superficie colla formola

$$K = \sum_{i=1}^{s} K_i - 2s + 2.$$

Il numero fondamentale di una superficie non può essere negativo, e non può essere zero se la superficie è aperta.

Il numero fondamentale di una superficie semplicemente connessa è 1; e reciprocamente, purchè si supponga che la superficie sia aperta, ovvero sia bilatera.

Se una superficie si spezza in due parti con un taglio chiuso, ovvero con un taglio aperto di 1.ª specie, la somma dei numeri fondamentali delle due parti è eguale al numero fondamentale della superficie aumentato di 2 ovvero di 1 rispett.

Sia data una superficie bilatera chiusa o aperta con ω ($\geqq 0$) orli.

Si chiama *genere* di quella superficie il massimo numero di tagli chiusi o aperti di 1.ª specie che si possono eseguire sulla superficie senza spezzarla.

Se è p il genere di una superficie bilatera, aperta o chiusa, il numero fondamentale K è dato da

$$K = 2p + \omega.$$

Si chiama *genere* di una superficie unilatera il numero rappresentato dalla somma del numero

dei tagli chiusi di 2.ª classe, ovvero aperti di 1.ª specie e di 2.ª classe, che occorrono per ridurla bilatera, e del doppio del genere di quest'ultima superficie.

Se è π il genere della superficie unilatera, aperta o chiusa, con ω ($\geqq 0$) orli, e K il numero fondamentale, è

$$K = \pi + \omega.$$

Si chiama *ordine di connessione* o *connessione* di una superficie qualunque il numero $K + 2$ se la superficie è chiusa, e il numero K se la superficie è aperta.

Il teorema fondamentale riguardante il genere di una superficie è il seguente: *Due superficie ambedue bilatere o ambedue unilatere aventi il medesimo genere e lo stesso numero di orli sono deformabili l'una nell'altra.*

Il genere di una superficie non muta facendo in essa un buco.

Un buco aumenta di 1 la connessione di una superficie aperta, diminuisce di 1 la connessione di una superficie chiusa; e aumenta in ogni caso di 1 il numero fondamentale.

Le considerazioni sulla connessione delle superficie furono iniziate da Riemann (*Theorie der Abelsch. Funct.*, § 2, *Crelle*, LIV; e *Fragment aus der Analysis situs.* Opere, pag. 448), e continuate da Neumann (*Abelsche Integr.*, 1.ª ediz., 1865; 2.ª ediz , 1884).

A poco a poco tali studi, affini ad altri (che erano stati già fatti da Listing (*Vorst. zur To-*

pologie, Gött. Stud., 1847), hanno costituito una parte a sè e *sui generis* della Geometria moderna, parte che suol chiamarsi *Analysis situs*, o, meglio ancora, *Topologia* (sebbene sembri che alcuni intendano di riserbare al nome *Topologia* una significazione alquanto più ristretta che quella di *Analysis situs*) e che studia certe proprietà degli enti geometrici indipendentemente dalla loro forma e dalla loro grandezza.

In altri termini questa parte della Geometria studia le forme che può affettare un ente geometrico non riguardando come distinte due forme di quell'ente quando si può passare dall'una all'altra con deformazione *continua*, cioè quando esse si possono far corrispondere punto per punto in modo biunivoco, senza però necessariamente supporre che la legge di corrispondenza sia *analitica*, ma solamente che sia *continua*.

Le prime estensioni agli spazi a tre dimensioni (cominciate già da Riemann nel cit. *Fragment*) furono fatte da Listing (*Census räuml. Complexe, Gött. Abh.*, X, 1861; *Gött. Nach.*, 1867), e estensioni più generali furono fatte per la prima volta da Betti (*Ann. di mat.*, IV, 1870).

Altri lavori furono quelli di Picard (*Journ de Liouville*, serie 4.ª, I), W. Dyck (*Math. Ann.*, XXXII, XXXVII), De Paolis (*Teoria dei gruppi geometr.* ecc. *Soc. it. delle scienze*, serie 3.ª, VII), Tonelli (*Lincei*, 1890), e Poincaré (*Journ. Éc. Polyt.*, 2.ª serie, I, 1895), nel primo dei quali possono trovarsi molte altre indicazioni.

Ricerche affini a quelle di cui qui si tratta sono quelle sulla maniera di sciogliere o di formare gli intrecci nelle curve, e altre cose simili, delle quali ricerche hanno trattato SIMONY (*Math. Ann.*, XIX, XXIV) e, coll'introduzione degli spazi a più dimensioni, HOPPE (*Arch. der Math.*, LXIV, 1879; LXV, 1880), DURÈGE (*Wien. Bericht.*, 1880), SCHLEGEL (*Zeitschr. f. Math.*, XXVIII, 1883).

§ 2. — CONNESSIONE DEGLI SPAZI.

Le considerazioni riguardanti la connessione delle superficie furono estese da LISTING agli spazi a tre dimensioni, e da BETTI agli spazi a più dimensioni. Nel *Fragment* già citato di RIEMANN si trovano anche alcuni risultati su tal soggetto.

Se $z_1 \ldots z_n$ sono n variabili che possono prendere tutti i valori reali da $-\infty$ a $+\infty$, il campo n volte infinito dei sistemi di valori di queste variabili, lo diremo *spazio a n dimensioni*, e lo denoteremo con S_n; un sistema di valori delle z costituirà le *coordinate* di un punto in tale spazio.

Un sistema di m equazioni fra le z, determinerà uno spazio ad $n-m$ dimensioni *contenuto* in S_n.

Uno spazio S_{n-m} contenuto in S_n si dirà *linearmente connesso* o avente la *connessione di 1.ª specie* quando due suoi punti si possono sempre congiungere con una linea tutta contenuta in esso, cioè quando un punto può con continuità trasportarsi nell'altro e restando sempre in S_{n-m}.

Se $F(z_1 \ldots z_n) = 0$ è una relazione fra le z, e la F è continua e ad un sol valore per ogni sistema di valori reali delle z, le spazio S_{n-1} rappresentato dalla $F = 0$, separerà in generale lo spazio S_n in due regioni, per una delle quali è $F > 0$, e per l'altra è $F < 0$.

Se tali due regioni sono linearmente connesse, lo spazio S_{n-1} si dirà *chiuso*.

Uno spazio S_{n-m} lo diremo avente la *connessione superficiale o di 2.ª specie*, se qualunque linea chiusa in esso contenuta può con continuità deformarsi in ogni altra analoga e restando sempre appartenente ad S_{n-m}; in generale, diremo che S_{n-m} ha la *connessione di r^{ma} specie* se ogni spazio chiuso a $r - 1$ dimensioni in esso contenuto, può con continuità deformarsi in ogni altro analogo, senza cessare, in tutti gli stadi della deformazione, di appartenere ad S_{n-m}.

Se uno spazio S_{n-m} non ha la connessione di r^{ma} specie, si potranno sempre in esso segnare degli spazi chiusi ad $r - 1$ dimensioni, e tali che due di essi non sieno deformabili con continuità l'uno nell'altro nè ciascuno di essi in un punto, ma che ogni altro consimile spazio chiuso sia sempre deformabile in uno di essi, o in un punto.

Il numero p_r di tali spazi chiusi è COSTANTE, *qualunque sia il modo con cui essi vengono segnati; il numero $p_r + 1$* si chiama *ordine della connessione di r^{ma} specie.*

Per uno spazio avente la connessione di r^{ma} specie, il numero p_r corrispondente, è zero; l'ordine della connessione r^{ma} è 1.

La porzione di piano compresa fra due cerchi

uno interno all'altro, ha 1 per ordine della connessione lineare, 2 per ordine della connessione superficiale.

Per lo spazio compreso fra due sfere una interna all'altra, la connessione lineare ha per ordine 1, la connessione superficiale ha per ordine 1, la connessione spaziale ha per ordine 2.

Lo spazio compreso da un anello ha la connessione lineare semplice (di 1.° ordine), la superficiale doppia (di 2.° ordine), la spaziale semplice.

Lo spazio compreso fra due anelli l'uno interno all'altro ha la connessione lineare semplice, la superficiale tripla, la spaziale doppia.

Lo spazio compreso fra una sfera e un anello interno, ha la connessione lineare semplice, la superficiale doppia, la spaziale doppia.

Per altri particolari e per la bibliografia vedi le indicazioni contenute nel paragrafo precedente. Per il concetto di *spazi unilateri e bilateri* v. la soprac. memoria di Poincaré.

§ 3. — Rete poliedrale. Teorema di Eulero. Poliedri dello spazio a tre e a più dimensioni.

Su di una superficie di genere p distendiamo una rete poliedrale in modo che il contorno di ogni faccia racchiuda un pezzo semplicemente connesso di superficie.

Se questa rete contiene F facce, S spigoli, V vertici, *si ha la relazione*

$$V + F = S - 2p + 2.$$

Se si suppone che la superficie data sia di genere zero p. es. una sfera, si ha il teorema trovato già da Eulero:

Dato un poliedro ordinario convesso, di cui sieno rispett. V, F, S il numero dei vertici, delle facce, e degli spigoli, si ha sempre la relazione fondamentale

$$V + F = S + 2.$$

I poliedri di tale specie si sogliono chiamare *poliedri Euleriani* (v. Hessel, *Crelle*, VIII).

Questo teorema forse fu noto anche ai geometri antichi; esso si trova in un frammento di Cartesio edito solo nel 1860 (v. Baltzer, *Monatsb. Berl. Acad.*, 1861), ma fu pubblicato e dimostrato da Eulero (*Nova Comm. Petrop.*, IV, 1752). Altre dimostrazioni di questo teorema furono quelle di Legendre *(Geom.)*, L'Huilier (*Ann. de Gerg.*, 1812, III), Cauchy (*Journ. Éc. polyt.*, 1813), Steiner (*Crelle*, I), Grunert (*Crelle*, II), Staudt (*Geom. der Lage*) ecc.

Altre considerazioni sul teorema di Eulero e sui casi nei quali esso non sussiste, furono fatte da Poinsot (*Journ. Éc. polyt.*, cah. X, 1801), L'Huilier, *cit.*, Legendre, *cit.*, Gergonne (*Ann. de Gerg.*, XV), Steiner (*Id.*, XIX), ecc. Si vegga anche l'ottimo trattato di *Stereometria* di Baltzer (*trad. da* Cremona, 1877).

Per la estensione del teorema agli spazi a più dimensioni, v. Stringham (*Americ. J. of Math.*, III), Biermann (*Wiener Berichte*, XC, 1884), Hoppe (*Grunert's Arch.*, LXVII), Schlegel (*Nov. acta der Leop. Deutsch. Acad.*, XLIV), Eberhard (*Math. Ann.*, XXXVI) (v. più sotto pag. 802).

Dato un poliedro, se al solito con F, S, V si rappresentano il numero delle facce, degli spigoli e dei vertici, si hanno le disuguaglianze

$$6 + S \leq 3F \leq 2S$$
$$6 + S \leq 3V \leq 2S$$
$$4 + V \leq 2F \leq 4V - 8$$
$$4 + F \leq 2V \leq 4F - 8.$$

Il numero degli angoli piani dei poligoni (facce) in un poliedro, è doppio del numero degli spigoli.

Nè tutte le facce possono avere più di cinque vertici, nè tutti gli angoli solidi possono avere più di cinque facce.

Non esiste alcun poliedro con 7 spigoli.

Se si indica con F_3 il numero delle facce triangolari di un poliedro, con F_4 quello delle facce quadrangolari, ecc. con V_3 quello degli angoli solidi trilateri, con V_4 quello degli angoli solidi quadrilateri, ecc. del poliedro stesso, *si hanno le relazioni*

$$2(F_3 + F_4 + \ldots) = 4 + V_3 + 2V_4 + 3V_5 + \ldots$$
$$2(V_3 + V_4 + \ldots) = 4 + F_3 + 2F_4 + 3F_5 + \ldots$$
$$F_3 + V_3 = 8 + (F_5 + V_5) + 2(F_6 + V_6) + \ldots$$

Dato un poliedro ne esiste in generale un altro ad esso *duale*, avente cioè lo stesso numero di spigoli, e tale che ad ogni faccia m-latera dell'uno corrisponde un angolo solido m-latero dell'altro e reciprocamente.

Le proprietà dei poliedri sono dunque sottoposte ad una evidente *legge di dualità*.

Diconsi *poliedri regolari* o anche *platonici* quelli che hanno facce regolari e angoli solidi regolari e tutti della medesima specie.

Nello spazio ordinario esistono solo cinque poliedri regolari.

Essi sono:

1. *Tetraedro.* 4 faccie triangolari; 4 vertici di angoli solidi trilateri; 6 spigoli. Supposto eguale a 1 il raggio della sfera cui il tetraedro è iscritto, la lunghezza di uno spigolo è

$$l = 1.632994\ldots$$

2. *Cubo.* 6 facce quadrangolari; 8 vertici di angoli solidi trilateri; 12 spigoli, di lunghezza

$$l = 1.154700\ldots$$

3. *Ottaedro.* 8 facce triangolari; 6 vertici di angoli solidi quadrilateri; 12 spigoli di lunghezza

$$l = 1.414214\ldots$$

4. *Dodecaedro.* 12 facce pentagonali; 20 vertici di angoli solidi trilateri; 30 spigoli di lunghezza

$$l = 0.713644\ldots$$

5. *Icosaedro.* 20 facce triangolari; 12 vertici di angoli solidi pentalateri; 30 spigoli di lunghezza

$$l = 1.051462\ldots$$

Si dicono *poliedri semiregolari o di Archimede* quelli in cui gli angoli solidi sono tutti eguali o simili, e le facce sono sempre poligoni regolari, ma in generale diversi; ovvero i poliedri correlativi di questi.

Se gli angoli solidi sono tutti m-lateri si ha

$$V = 2\,\frac{F-2}{m-2}$$

e quindi i casi possibili sono:

$$m = 3\ , \quad 2S = 3V = 6\ (F-2)$$
$$m = 4\ , \quad S = 2V = 2\ (F-2)$$
$$m = 5\ , \quad 2S = 5V = \frac{10}{3}\ (F-2).$$

Nei soli due primi casi $m = 3, 4$, sono possibili poliedri di $2n$ vertici (n qualunque), ogni angolo solido essendo formato rispett. con due facce triangolari e una faccia n-latera, ovvero con tre facce triangolari e una n-latera; oltre questi casi di poliedri *indeterminati* esistono solo 13 altri poliedri d'Archimede, e cioè 7 per $m = 3$, 4 per $m = 4$, 2 per $m = 5$.

Questa enumerazione fu fatta da Pappo (*Coll. math.*, V) e Kepler (*Harm. mundi*, II, pag. 28). Per altri dettagli si vegga la *Stereometria* del Baltzer.

Nello spazio a 4 dimensioni esistono 6 poliedri regolari, e cioè:

1) *il pentaedroide* limitato da 5 tetraedri, di cui 4 hanno sempre un vertice in co-

mune; ha 5 vertici, 10 lati e 10 facce; questo poliedro è correlativo di sè stesso;

2) *l'ottaedroide* limitato da 8 cubi, di cui sempre 4 hanno un vertice comune; ha 16 vertici, 32 lati, 24 facce;

3) *l'esadecaedroide*, con 16 tetraedri, 8 vertici, 24 lati, 32 facce; questo poliedro è la figura correlativa della precedente, a cui sta, come l'ottaedro sta al cubo;

4) un poliedro contenente 24 ottaedri, 24 vertici, 96 spigoli, 96 facce triangolari; questo poliedro è correlativo di sè stesso;

5) un poliedro con 600 tetraedri, 120 vertici, 720 spigoli, 1200 facce triangolari;

6) un poliedro con 120 dodecaedri, 600 vertici, 1200 spigoli, 720 facce pentagonali; questo poliedro è correlativo del precedente.

Per gli spazi a più che 4 dimensioni *non esistono che solo 3 poliedri regolari*, i quali sono le estensioni dei primi tre poliedri sopraindicati, che a loro volta sono le estensioni del tetraedro, del cubo, e dell'ottaedro.

Se lo spazio è a n dimensioni il numero dei vertici di tali poliedri è rispettivamente

$$n + 1, \quad 2^n, \quad 2n,$$

il primo essendo correlativo di sè stesso, e gli altri due essendo l'uno correlativo dell'altro.

Immaginando che sia 1 il raggio della *sfera*

nello spazio a n dimensioni dentro cui essi sono iscritti, *le lunghezze dei lati sono date rispettivamente da:*

$$\sqrt{\frac{2(n+1)}{n}}, \quad \sqrt{2}, \quad \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

La estensione della formola di Eulero per un poliedro in uno spazio a n dimensioni è

$$1 - N_0 + N_1 - N_2 + \ldots + (-1)^{n-1} = 0$$

dove N_0, N_1, N_2... rappresentano rispett. i numeri dei vertici, degli spigoli, delle facce, degli spazi a tre dimensioni, ecc. appartenenti al poliedro dato (Stringham).

Per i poliedri regolari nello spazio a 4 e più dimensioni si vegga Stringham *(cit.)*, Scheffler (*Die polydimens. Grössen*, Braunschweig, 1880) e Schlegel (*cit.* e *Bull. de la Soc. math.*, X, pagina 172; *Rend. Palermo*, 1891).

Per altre ricerche riguardanti i poliedri citeremo Möbius (*Op.*, II), Kirkmann (*Mem. Phil. Soc. Manchester*, 1854, 1862), Jordan (*Crelle*, LXVI, LXVIII, LXX), Eberhard (*Id.*, CVI).

Nella collezione di modelli di L. Brill a Darmstadt si trovano dei modelli che rappresentano le proiezioni nello spazio a 3 dimensioni dei poliedri regolari dello spazio a 4 dimensioni.

§ 4. — Connessione delle superficie di Riemann. Riemanniane regolari e simmetriche.

Al Cap. XV, § 2 del vol. I di quest'opera abbiamo trattato, a proposito delle funzioni algebriche, delle cosiddette *Riemanniane* o *superficie di Riemann*. Ivi abbiamo specialmente trattato delle superficie a due falde *(iperellittiche)* e abbiamo detto in che modo, cioè con quali tagli, quelle superficie si possono ridurre *semplicemente connesse*.

Per le superficie di genere qualunque si presenta in modo analogo prima il problema di ridurre la superficie a un tipo determinato, e indi il problema di costruire quei tagli che rendono la superficie semplicemente connessa.

Non entreremo nei particolari della soluzione di questi problemi; solo diremo che di essi si occuparono Lüroth in un breve lavoro nei *Math. Ann.*, IV; indi Clebsch (*Id.*, VI) i cui risultati furono applicati da Kasten (*Diss.* Göttingen, 1876), al caso di una superficie a tre falde, e da Graf (*Diss.* Bern, 1878) per una superficie a 6 falde con 20 punti di diramazione. Altri lavori affini sono quelli di Lüroth (*Erlangener Sitz. Bericht.*, 1883; *Abh. der k. bayer. Acad.* München, 1885, 1887).

Ogni punto di diramazione nel quale m_1 falde della superficie si riuniscono in ciclo equivale a

$m_1 - 1$ punti di diramazione semplici, cioè punti nei quali due sole falde si connettono (v. anche vol. I, pag. 377).

Se la superficie ha n falde, è di genere p_1, e chiamiamo t il numero totale dei punti di diramazione semplici, cui equivalgono tutti i punti di diramazione della superficie, si ha:

$$t = 2m + 2p - 2.$$

Il genere di una superficie di Riemann è dato dalla formola

$$p = -n + 1 + \frac{1}{2} \Sigma_i (m_i - 1)$$

dove il Σ *si intende esteso a tutti i numeri* m_i *che rappresentano quelli delle falde ciclicamente fra loro connesse in ciascun punto di diramazione.*

Dato il genere p, *il minimo valore per il numero* n *è il massimo intero contenuto in* $\frac{p+3}{2}$.

Il seguente è un problema risoluto da Hurwitz (*Math. Ann.*, XXXIX): Dati i t valori di z pei quali una Riemanniana con n falde e di genere p deve avere diramazione, quante di tali Riemanniane si possono costruire?

Si trova che per

$n = 2$ *il numero delle Riemanniane è* 1

$n = 3$ „ „ „ $\frac{1}{2}(3^{t-2} - 1)$

$n = 4$ „ „ „ $\frac{1}{2}(2^{t-4}-1)(3^{t-2}-1)$

. . . .

Se il genere è $p = 0$ e il numero delle falde è n (> 2), si ha che il numero delle Riemanniane è

$$\frac{(2n - 2)!}{(n-1)!} n^{n-4}.$$

Di questo problema per $n = 3$ si occupò anche KASTEN nel lavoro sopracit.

Una Riemanniana di genere p può in generale in ∞^ρ modi rappresentarsi conformemente su sè stessa, dove $\rho = 3$ per $p = 0$, $\rho = 1$ per $p = 1$ e $\rho = 0$ per $p > 1$. SCHWARZ, *Crelle*, LXXXVII; HETTNER, *Gött. Nach.*, 1880, pag. 386; NOETHER, *Math. Ann.*, XX, XXI; KLEIN, *Ueber Riemann's Theorie der alg. Funct.* Leipzig, 1882, pag. 66-67.

Tutte le superficie di genere zero possono trasformarsi conformemente le une nelle altre; esse non hanno alcun invariante assoluto o modulo, cioè non esiste alcuna espressione dipendente dalle costanti che determinano la Riemanniana e che resti inalterata per una trasformazione della Riemanniana stessa.

Nel caso di $p = 1$ di moduli ve ne è invece uno solo, e per $p > 1$ ve ne sono $3p - 3$; in generale vi sono $3p - 3 + \rho$ moduli, dove ρ ha lo stesso significato sopraindicato. (RIEMANN, *Abel'sche Funct.* § 12.)

Ogni Riemanniana con n falde e t punti di diramazione può con variazione CONTINUA *delle costanti trasformarsi in ogni altra col medesimo numero di falde e di punti di diramazione.*

Questo teorema può ricavarsi dalle memorie di LÜROTH, *Math. Ann.*, IV; CLEBSCH, *Id.*, VI; v. KLEIN, cit., pag. 66.

Servendosi della proprietà delle superficie minime, che la loro rappresentazione sferica è conforme (v. Cap. XVI), si ha che *una Riemanniana distesa sulla sfera (invece che sul piano) a varie falde, può rappresentarsi in modo conforme su di una superficie minima* (Weierstrass). Si ha così una superficie di aspetto ordinario, la quale può servire, come la Riemanniana, per lo studio delle funzioni analitiche; coi principi dell'*Analysis situs* si può, come si sa, ottenere sempre una superficie di aspetto ordinario (cioè senza diramazioni) la quale sia la deformazione di una Riemanniana qualunque di genere p (p. es. la sfera con p manichi, v. *Repert.*, I, pag. 381) però l'importanza del sopranotato teorema sta nel fatto che la superficie *minima* e la Riemanniana stanno fra loro in rappresentazione *conforme*, ciò che invece non si verifica per la sfera con p manichi in rapporto alla Riemanniana.

Una Riemanniana di genere $p > 1$ non può avere ∞ trasformazioni biunivoche in sè stessa; essa ne può avere un numero *finito*.

Se $f(w, z) = 0$ è l'equazione che corrisponde alla superficie di Riemann nel piano z, poniamo

$$w_1 = R_1(w, z)$$
$$z_1 = R_2(w, z)$$

dove le R sieno funzioni razionali le quali dieno reciprocamente le w, z in funzione razionale delle w_1, z_1.

Supponiamo che la precedente trasformazione, che chiameremo S, sia tale che *per essa la Riemanniana si trasformi in sè stessa.*

Il numero delle trasformazioni birazionali o biunivoche di una Riemanniana in sè stessa non può essere maggiore di $84(p-1)$ *per* $p > 1$ (HURWITZ, *Math. Ann.* XLI, pag. 424).

Una trasformazione birazionale di una Riemanniana in sè stessa è sempre periodica, cioè partendo da un punto P, *e applicando* m *volte la trasformazione si deve tornare a* P. *Il massimo valore per* m *è* $10(p-1)$.

Ogni Riemanniana che ha una trasformazione in sè stessa di periodo m, *si può definire con un'equazione del tipo* $\varphi(w^m, z) = 0$, *e la trasformazione colle formole ridotte*

$$w_1 = e^{\frac{2i\pi}{m}} w.$$
$$z_1 = z.$$

Questo ultimo teorema vale anche per $p = 0$ e $p = 1$; esso ed i precedenti sono di HURWITZ (*Math. Ann.* XXXII).

Possiamo immaginare oltre le trasformazioni S, le altre definite dalle formole

$$w_1 = R_1(\overline{w}, \overline{z})$$
$$z_1 = R_2(\overline{w}, \overline{z})$$

dove con $\overline{w}$, $\overline{z}$ intendiamo i valori complessi *coniugati* a w, z.

Una tale trasformazione la chiamiamo Σ, e possiamo immaginare che alla Riemanniana appartengano anche delle trasformazioni Σ,

Tutte le trasformazioni S o Σ che appartengono ad una Riemanniana formano evidentemente un *gruppo.*

Una Riemanniana cui appartiene una trasformazione Σ di periodo 2 (in modo che $\Sigma^2 = 1$) si dirà *simmetrica.*

Se la relazione $f(w, z) = 0$ ha coefficienti reali, è chiaro che alla Riemanniana corrisponde la sostituzione Σ del tipo

$$w_1 = \overline{w}$$
$$z_1 = \overline{z}$$

e quindi *la Riemanniana è simmetrica.*

Ma viceversa si ha anche: *Se la Riemanniana è simmetrica, fra le infinite forme dell'equazione $f = 0$ che le corrispondono ve n'è sempre una avente i coefficienti* REALI.

Sulle superficie *simmetriche* esistono delle linee le quali restano inalterate colla trasformazione *di linee (simmetria); il numero di queste linee non può superare il numero $p+1$.*

Le Riemanniane simmetriche furono considerate da KLEIN (*Riemann's Theorie* ecc. Leipzig, 1881) e indi da WEICHOLD (*Zeitsch. f. Math.*, XXVIII); ad esse è dedicata buona parte del 2.° volume delle lezioni litografate di KLEIN, *Ueber Riemann'sche Flächen.* Göttingen, 1892.

Una Riemanniana a N falde, le quali sieno tutte egualmente diramate, in modo cioè che esistano N trasformazioni per le quali da una falda si può

passare ad un'altra qualunque, si dice una *Riemanniana regolarmente diramata (regulär verzweigte)* o anche semplicemente *regolare.*

Una Riemanniana corrispondente ad un'equazione binomia, è regolare.

In una tal Riemanniana i punti di diramazione devono essere disposti nel seguente modo: se $z = z_0$ è un valore di z per cui vi è diramazione, le N falde si distribuiscono per $z = z_0$ in $\frac{N}{r_i}$ cicli di r_i falde ciascuno.

La equazione del genere diventa allora

$$p = -N + 1 + \frac{N}{2} \sum_i \frac{r_i - 1}{r_i}$$

dove r_i rappresenta il numero delle falde riunite ciclicamente in ciascun punto di diramazione, e il Σ si estende a tutti i cosiddetti *posti* di diramazione, cioè a tutti i punti di diramazione contenuti *in una sola* delle falde.

Data l'equazione $f(w, z) = 0$, considerandola come un'equazione algebrica rispetto alla sola variabile w, immaginando cioè che la variabile z vi figuri come un parametro, si formi la *risolvente di* Galois di tale equazione.

Si avrà un'altra equazione di un certo grado N (che corrisponde al numero delle sostituzioni del gruppo che appartiene all'equazione algebrica data v. *Repert.*, I, pag. 128); *la Riemanniana a N falde corrispondente alla risolvente di Galois con un parametro, è regolarmente diramata.*

Le Riemanniane regolarmente diramate furono

considerate per la prima volta da KLEIN (*Math. Ann.*, XIV), il quale studiò specialmente il caso $p=3$, $N=168$ che corrisponde ad una risolvente di Galois della equazione modulare per la trasformazione di 7.° ordine delle funzioni ellittiche.

Indi se ne occupò DYCK (*Diss.* München, 1879; *Math. Ann.*, XVII, XX) il quale considerò i casi $p=1, 2, 3$, e in un altro lavoro del medesimo vol. XVII dei *Math. Ann*, pag. 510, considerò anche il caso $p=3$, $N=96$.

Per i valori di N corrispondenti a $p=0, 1, 2$ si può vedere le pag. 241 e seg. del libro di APPELL-GOURSAT (*Fonct. algeb.*, 1895) dove possono trovarsi alcune altre indicazioni. Per $p=0$ si hanno Riemanniane a 12, 24, 60 falde; *i gruppi corrispondenti sono i gruppi poliedrali* (v. *Repert.*, I, pag. 359 e seg.).

Le equazioni algebriche corrispondenti a questi casi sono le seguenti:

$$N=12,\ z=\frac{(w^4-2\sqrt{-3}\,w^2+1)^3}{(w^4+2\sqrt{-3}\,w^2+1)^3}$$

$$N=24,\ z=\frac{(w^8+14\,w^4+1)^3}{108\,w^4\,(w^4-1)^4}$$

$$N=60,\ z=\frac{(-w^{20}+228\,w^{15}-494\,w^{10}-228\,w^5-1)^3}{1728\,w^5\,(w^{10}+11\,w^5-1)^5}.$$

I polinomi contenuti nella prima formola sono quelli cosiddetti del *tetraedro* (v. *Repert.*, I, pagina 360); il numeratore e denominatore della seconda formola corrispondono rispett. ai polinomi detti del *cubo* e dell' *ottaedro*; il denominatore del-

l'ultima formola è la quinta potenza del polinomio dell'*icosaedro*, e il numeratore è la sua forma Hessiana. (Vedi il libro di KLEIN, *Ikosaeder*, ecc. Leipzig, 1884.)

È importante il seguente teorema di DYCK (*Math. Ann.*, XX, pag. 30) generalizzato da HURWITZ (*Id.*, XLI, pag. 421):

Dato un gruppo finito di N trasformazioni, si può sempre trovare una Riemanniana ad N falde regolarmente diramata, il cui gruppo sia oloedricamente isomorfo col gruppo dato.

Con questo teorema, data una Riemanniana avente un gruppo di trasformazioni in sè stessa, si può costruire sempre una Riemanniana regolarmente diramata avente il medesimo gruppo.

Inoltre:

Dato un gruppo di trasformazioni si può sempre in molti modi costruire una Riemanniana avente un gruppo isomorfo oloedricamente a quello dato (HURWITZ).

§ 5. — LE RIEMANNIANE IN SENSO PROIETTIVO DI KLEIN.

Per affinità di soggetto faremo qui un cenno delle cosiddette *Riemanniane in senso proiettivo* considerate da Klein.

Consideriamo una curva di una certa classe m. Da un punto reale P del piano possono condursi m tangenti alla curva, alcune delle quali possono essere immaginarie; ad ogni tangente immagina-

ria corrisponderà un punto di contatto immaginario, cioè un punto immaginario della curva.

Quindi se noi immaginiamo il punto P tante volte contato in altrettanti fogli sovrapposti, per quante sono le tangenti immaginarie condotte da P alla curva, e quindi per quanti sono i punti (di contatto per tang. condotte da P) immaginari della curva, l'assieme dei punti P così disposti rappresenta un ente geometrico reale i cui punti corrispondono uno ad uno ai punti immaginari della curva; in quanto ai punti reali di questa, essi si otterranno così quando il punto P viene a cadere sul ramo reale della curva stessa, perchè allora due tangenti immaginarie coniugate si riuniscono e danno una tangente reale con punto di contatto reale. Perciò le porzioni di piani formate da punti P devono terminare al contorno reale della curva, e ivi connettersi fra loro a due a due.

Si abbia p. es. una ellisse. I soli punti del piano da cui si possano condurre tangenti immaginarie sono i punti interni, dai quali possono propriamente condursi *due* tangenti immaginarie coniugate; bisognerà dunque immaginare la porzione di piano compresa internamente all'ellisse, come sdoppiata in due fogli eguali, e questi connessi lungo l'ellisse stessa. Si ha una superficie la quale, come si vede, può immediatamente deformarsi in una sfera (superficie di genere zero).

Non così facile è la costruzione della superficie quando la curva fondamentale è di classe più elevata; il problema che si presenta è quello di ricercare in che modo bisogna connettere le diverse falde; vi saranno certe porzioni del piano che re-

stano considerate come doppie, certe altre come quadruple, ecc.

Per la letteratura su questo argomento citeremo Klein (*Math. Ann.*, VII, X), Harnack (*Math. Ann.*, IX) il quale costruì le Riemanniane corrispondenti alle curve di 3.ª classe, Haskell (*Diss.* Baltimore, 1890) il quale si occupò della speciale curva di 4.ª classe di equazione (in coordinate di rette)

$$u_1^3 u_2 + u_2^3 u_3 + u_3^3 u_1 = 0.$$

CAPITOLO XIX.

Geometria proiettiva degli iperspazi.

§ 1. — GENERALITÀ. VARIETÀ LINEARI. RELAZIONI PROIETTIVE E METRICHE. CORRISPONDENZE OMOGRAFICHE.

Date n variabili $x_1 x_2 \ldots x_n$, ogni gruppo di valori particolari (reali o anche complessi) di queste variabili, è un elemento (punto) in uno *spazio a n dimensioni*, che indicheremo con S_n.

Invece di considerare n variabili, se ne possono considerare $n+1$, e i rapporti di n di esse all' ultima; il punto di S_n resta determinato dai valori di tali rapporti, e i valori corrispondenti delle $n+1$ variabili possono chiamarsi *coordinate omogenee* del punto; queste possono assumere tutti i possibili valori, meno che essere tutti zero.

Un'equazione *lineare omogenea* fra queste coordinate omogenee definirà una *varietà lineare* contenuta in S_n, che si suol chiamare un *iperpiano*. *Lo spazio* S_n *contiene* ∞^n *iperpiani come contiene* ∞^n *punti.*

L'iperpiano e il punto possono considerarsi come elementi fra loro *duali* dello spazio S_n; questo può intendersi composto di punti, ovvero, dualmente, composto di iperpiani.

Per *coordinate omogenee di un iperpiano* possono assumersi gli $n + 1$ coefficienti della sua equazione.

L'assieme dei punti le cui coordinate soddisfanno a *due* equazioni lineari, forma una varietà a $n - 2$ dimensioni che si chiama *bipiano*; e così la varietà data da k equazioni lineari si suol chiamare un *k-piano*. Si hanno così i *multipiani*.

Un *n-piano* è un *punto;* un *$(n - 1)$-piano* è una *retta*, un *$(n - 2)$-piano* è un *piano ordinario;* un *$(n - 3)$-piano* è uno *spazio ordinario.*

Prendendo per elementi di S_n gli iperpiani anzichè i punti, con ovvie e note considerazioni, invece dei *multipiani* si hanno i *multipunti.*

I multipiani e i multipunti costituiscono le due serie di forme fondamentali, corrispondentisi una ad una per dualità, nello spazio S_n; l'$(n - 1)$-piano (composto di punti) e l'$(n - 1)$-punto (composto di iperpiani) sono le forme di 1.ª specie (ad una dimensione); l'$(n - 2)$-piano e l'$(n - 2)$-punto sono le forme di 2.ª specie; e così di seguito.

Un k-piano è determinato in generale da $n - k + 1$ punti; esso è uno spazio lineare di dimensione $n - k$, un S_{n-k} contenuto S_n.

Due spazi lineari S_{n-k}, $S_{n-k'}$ contenuti in S_n non hanno in generale punti comuni se $k + k' > n$; essi hanno comune ALMENO *uno spazio S_r se*

$$k + k' = n - r;$$

però anche essendo $k + k' > n$ essi possono avere punti comuni.

Se S_r, $S_{r'}$ non hanno punti comuni e appartengono ad S_n, lo spazio lineare di dimensione minima che appartiene ad S_n e che li contiene entrambi è di dimensione $r + r' + 1$.

Se poi S_r e $S_{r'}$, hanno in comune uno spazio S_m si ha:

Se due spazi lineari S_r, $S_{r'}$ hanno in comune uno spazio S_m, lo spazio lineare di dimensione minima t che li contiene è di dimensione

$$t = r + r' - m,$$

cioè è

$$t + m = r + r'.$$

Altri risultati relativi agli spazi lineari contenuti in un S_n, si trovano in Bertini (*Rend. Istit. Lomb.*, 1886), Segre (*Rend. Palermo*, II, 1888), Castelnuovo (*Rend. Lincei,* 1889).

Estendendo le ordinarie formole e considerazioni di Geometria analitica si può stabilire la Geometria *metrica* degli spazi a più dimensioni, introducendo i concetti di *parallelismo*, di *perpendicolarità*, di *distanza*, di *angoli*, ecc.

Tali considerazioni furono fatte da Jordan (*Bull. de la Soc. math.*, III, 103) e da D'Ovidio (*Mem. Lincei*, 1877; *Math. Ann.*, XII), il quale ultimo Autore stabilì tali formole in maniera più generale, assumendo cioè come assoluto dello spazio (v. Cap. XXI), una *iperquadrica* qualunque.

Due *iperpiani* di equazioni (in coord. non omogenee)

$$a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + \alpha = 0$$
$$b_1 x_1 + \dots + b_n x_n + \beta = 0$$

si dicono *paralleli* quando

$$\frac{a_1}{b_1} = \dots = \frac{a_n}{b_n}.$$

Sieno date due varietà lineari S_{n-k}, $S_{n-k'}$, la prima, di dimensione $n-k$, data dalle equazioni

$$\left.\begin{array}{l} A_1 = a_{11}\ x_1 + \dots + a_{1n}\ x_n + \alpha_1 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_k = a_{k1}\ x_1 + \dots + a_{kn}\ x_n + \alpha_k = 0 \end{array}\right\} S_{n-k}$$

e l'altra, di dimensione $n-k'$, data dalle equazioni

$$\left.\begin{array}{l} B_1 = b_{11}\ x_1 + \dots + b_{1n}\ x_n + \beta_1 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ B_{k'} = b_{k'1}\ x_1 + \dots + b_{k'n}\ x_n + \beta_{k'} = 0 \end{array}\right\} S_{n-k'}.$$

Fra gli iperpiani contenuti in S_{n-k} ve ne sieno ρ fra loro indipendenti * e che sieno paralleli ad altrettanti iperpiani contenuti in $S_{n-k'}$; noi diremo allora che le due varietà lineari S_{n-k}, $S_{n-k'}$, hanno *un parallelismo d'ordine* ρ.

---

* Cioè tali che non sussista alcuna relazione lineare identica a coefficienti costanti fra i primi membri delle loro equazioni.

Se è $k \leqq k'$ ed è $\rho = k$, allora noi diremo che la prima varietà è *parallela* alla seconda.

Le due varietà hanno un parallelismo d'ordine ρ *quando le* n *equazioni*

$$\lambda_1 a_{11} + \ldots + \lambda_k a_{k1} = \mu_1 b_{11} + \ldots + \mu_{k'} b_{k'1}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\lambda_1 a_{1n} + \ldots + \lambda_k a_{kn} = \mu_1 b_{1n} + \ldots + \mu_{k'} b_{k'n}$$

si riducono solo a $k + k' - \rho$ *equazioni distinte, cioè quando la matrice dei coefficienti di queste equazioni ha per caratteristica* $k + k' - \rho$.

La *distanza* di due punti (x) (y) è data da

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}.$$

La *distanza di un punto da una varietà lineare* è la distanza del punto dato, dal punto della varietà, che è *più vicino* al primo; tal ultimo punto si dice *proiezione ortogonale* del primo.

La *distanza di due varietà lineari* è la distanza dei due punti dell'una e dell'altra che sono fra loro più vicini.

Una varietà $S_{n-k'}$, si dice *perpendicolare* ad un'altra S_{n-k} quando condotte per un punto dello spazio due varietà rispettivamente parallele all'una e all'altra $S'_{n-k'}$, S'_{n-k}, ogni punto di $S'_{n-k'}$ si proietta su S'_{n-k} in un punto appartenente alla comune intersezione delle due varietà S'.

Se $S_{n-k'}$ *è perpendicolare a* S_{n-k}, *sarà reciprocamente* S_{n-k} *perpendicolare a* $S_{n-k'}$.

Date due *rette* di equazioni

$$\frac{x_1 - a_1}{\alpha_1} = \frac{x_2 - a_2}{\alpha_2} = \ldots = \frac{x_n - a_n}{\alpha_n}$$

. . . .

$$\frac{x_1 - b_1}{\beta_1} = \frac{x_2 - b_2}{\beta_2} = \ldots = \frac{x_n - b_n}{\beta_n}.$$

l'espressione

$$\cos^2 \theta = \frac{(\Sigma\, \alpha_r\, \beta_r\,)}{\Sigma\, \alpha^2{}_r\, \Sigma\, \beta^2{}_r}$$

resta inalterata in valore (è un invariante) per una qualunque trasformazione lineare ortogonale delle coordinate, cioè per una trasformazione lineare operata sulle variabili x e tale che il determinante della trasformazione sia un determinante ortogonale (v. *Repert.*, I, pag. 65).

L'angolo θ si chiama *angolo* delle due rette.

Date due varietà lineari qualunque, si può calcolare colla precedente formola l'angolo di una retta dell'una con una retta dell'altra; il *minimo* di tutti gli angoli così formati si chiama *angolo delle due varietà.*

Le due varietà sono perpendicolari quando il loro angolo è un angolo retto; in tal caso ogni retta dell'una è sempre perpendicolare ad ogni retta dell'altra.

Segare uno spazio S_r con uno spazio $S_{r'}$ significa costruire lo spazio $S_m = S_{r+r'-n}$ comune ad ambedue; *proiettare* lo spazio S_r da uno spazio $S_{r'}$ significa costruire lo spazio $S_{r+r'+1}$ che li contiene entrambi.

Dati in due spazi S_n, S'_n due gruppi di $n + 2$ punti, si può sempre con proiezioni e sezioni passare dal primo gruppo al secondo.

Due spazi a n dimensioni S_n, S'_n si dicono *proiettivi* o *omografici* o *collineari* quando fra gli spazi lineari contenuti nell'uno e quelli omonimi contenuti nell'altro vi è corrispondenza biunivoca continua, tale che a due spazi appartenentisi nell'uno corrispondono due spazi pure appartenentisi nell'altro, e quando inoltre ad una punteggiata dell'uno corrisponde nell'altro una punteggiata proiettiva.

Due spazi S_n, S'_n omografici e sovrapposti, non possono avere $n + 2$ punti uniti senza coincidere, purchè $n + 1$ qualunque di quei punti non si trovino in un medesimo iperpiano.

In modo simile si definiscono le *correlazioni o dualità* o *reciprocità* fra due spazi.

Una omografia fra due spazi resta rappresentata al solito, analiticamente, stabilendo delle relazioni lineari fra le coordinate dei punti corrispondenti nei due spazi; la omografia è *generale* quando il determinante dei coefficienti di tali relazioni lineari è diverso di zero; ma può immaginarsi che questo determinante sia zero, e che abbia propriamente per *caratteristica* $n - h + 1$ (v. *Repert.*, I, pag. 111); allora si hanno le cosiddette *omografie singolari di specie h.* In tal caso *esiste in uno dei due spazi uno spazio lineare S'_{h-1} di dimensione $h - 1$ (spazio singolare) ad ogni punto del quale corrispondono tutti i punti dell'altro spazio;* e reciprocamente: *nell'altro spazio esiste uno spazio S_{n-h} di dimensione $n - h$ (spazio singolare) ai cui punti corrispondono nel*

primo tutti quelli di un S'_h *comprendente* l' S'_{h-1} *singolare.*

La teoria delle omografie per gli iperspazi fu cominciata da VERONESE nel lavoro sottoc. e indi proseguita da SEGRE (*Mem. Lincei*, 1884-1886; *Mem. Torino*, 1885), da BERTINI (*Rend. Ist. Lomb.*, 1886-87; *Acc. di Torino*, 1887), da PREDELLA (*Ann. di mat.*, XVII; *Acc. Torino*, 1891-92), ecc.

Furono CAYLEY (*Camb. math. J.*, IV, 1845; *Crelle*, 1846; *Opere*, I, pag. 55, 317) e CAUCHY (*Compt. Rend.*, 1847) i primi ad adoperare le espressioni della *Geometria ad n dimensioni*, mentre si può dire che la prima definizione delle varietà ad n dimensioni si deve a GRASSMANN nella *Ausdehnungslehre* (1844).

La prima discussione profonda sui principi della Geometria in uno spazio qualunque si deve a RIEMANN (*Ueber die Hypothesen die der Geometrie zu Grunde liegen*, 1854; pubblicata nel 1867), cui si deve anche il primo concetto di *curvatura* di uno spazio (v. § XX).

Possiamo attualmente classificare in tre categorie i lavori e le ricerche riguardanti la Geometria ad n dimensioni.

Nella prima categoria possiamo porre tutti quelli che riguardano i principi fondamentali della geometria in un senso *assoluto*, indipendente cioè da *certe* ipotesi fondamentali sulla natura dello spazio, p. es. l'ipotesi della *linearità.*

In tale ordine di studi, che si collega poi anche con quello che riguarda i fondamenti della *Geometria non Euclidea* di LOBATSHEWSKY e BOLYAI

(vedi Cap. XXI), i lavori principali sono quelli di RIEMANN *(cit.)*, di CAYLEY (*Phil. Trans.*, 1859; *Opere*, II), di BELTRAMI (v. § 6), di HELMHOLTZ (*Ueber die Thatsachen die der Geometrie zu Grunde liegen*, *Gött. Nach.*, 1868), di KLEIN (*Math. Ann.*, IV, VI), di DE TILLY (*Essai sur les principes fondam. de la Géom.* Bordeaux, 1879), di CANTOR (*Crelle*, LXXXIV, ovvero *Acta*, II), di LIE (*Leipz. Berichte.* 1886, 1890) ecc.

Trattati sistematici sul medesimo soggetto sono quelli di PASCH (*Neuere Geom.* Leipzig, 1882), di VERONESE (*Fondamenti di Geometria* ecc. Padova, 1891), di KILLING (*Einführung in die Grundlagen der Geom.* Paderborn, 1893). Alla fine dell'opera voluminosa di VERONESE si trovano raccolte molte indicazioni storico-critiche.

Il secondo ordine di studi è quello riguardante la estensione agli spazi superiori dei concetti, delle formole e dei teoremi della ordinaria Geometria infinitesimale (v. Cap. XX) e finalmente il terzo ordine di studi è quello in cui si cerca di estendere alle varietà comunque estese i concetti e i problemi della geometria proiettiva e metrica del piano e dello spazio.

I lavori di JORDAN e D'OVIDIO, già citati, appartengono a tale ultimo ordine di studi, a cui appartiene ancora il lavoro fondamentale di VERONESE nei *Math. Ann.*, XIX.

Fu con questo lavoro che si cominciò a stabilire la geometria proiettiva degli iperspazi, e cioè la teoria delle omografie generali, la teoria delle varietà di ordine superiore contenute in un S_n, e specialmente quella delle iperquadriche, delle curve, delle superficie rigate contenute in un S_n, ecc.

È naturale che si è cercato anche di estendere agli spazi a più dimensioni la teoria delle corrispondenze birazionali dei piani e degli spazi ordinari (v. Cap. VI, § 5; Cap. IX, § 6). Lavori su ciò sono quelli di NOETHER (*Math. Ann.*, II), KANTOR (*Rend. Ist. Lomb.*, 1894), BRILL (*Quart. Journ.*, XXVII, 1895), e (per lo spazio a 4 dimensioni) DEL PEZZO (*Acc. Napoli*, 1896-97).

La geometria descrittiva nello spazio a 4 dimensioni fu trattata da VERONESE (*Atti Ist. Veneto*, 1882); considerando inoltre come elemento dello spazio a 4 o più dimensioni non più il punto, ma la retta, si può stabilire una *Geometria della retta;* ricerche su ciò sono quelle di SEGRE (*Rend. Palermo*, II) e CASTELNUOVO (*Atti Ist. Veneto*, 1891).

È utile infine notare che la *cinematica* negli spazi superiori fu trattata da JORDAN nel lavoro cit., e poi ancora da CLIFFORD (*Proc. Lond. math. Soc.*, 1876), BELTRAMI (*Bull. Scienc. math.*, 1876) e da altri; una lunga lista di lavori su ciò può vedersi in LORIA (*Teor. geom.*, 1896, p. 308-309).

§ 2. — VARIETÀ NON LINEARI. IPERSUPERFICIE. RAPPRESENTAZIONE MONOIDALE.

La totalità dei punti di S_n, le cui coordinate soddisfanno ad un'equazione razionale, intera, omogenea di ordine ν nelle coordinate, si dice una *ipersuperficie algebrica di ordine* ν.

Il numero ν *rappresenta il numero dei punti in cui una retta incontra la ipersuperficie.*

Una ipersuperficie di ordine ν *è determinata da*

$$N(\nu) = \binom{n+\nu}{\nu} - 1$$

punti ARBITRARI.

Per un punto P di una ipersuperficie possono condursi delle rette le quali abbiano in quel punto colla ipersuperficie, *due* intersezioni riunite *(un contatto bipunto)*; *il luogo di tutte tali rette è un iperpiano* che si chiama *iperpiano tangente* alla ipersuperficie in P.

Si dice *classe della ipersuperficie* il numero dei suoi iperpiani tangenti passanti per un S_{n-2} generico dello spazio S_n; *la classe di una ipersuperficie di ordine* ν *è* IN GENERALE *eguale a* $\nu(\nu-1)^{n-1}$, *se la ipersuperficie non ha singolarità, cioè se è rappresentata da un'equazione affatto generale.*

Si chiamano *punti singolari di ordine* r di una ipersuperficie quelli tali che ogni retta per essi passante, incontra ivi la ipersuperficie in r punti coincidenti.

Ogni punto singolare di ordine r, *diminuisce la classe della ipersuperficie di* $r(r-1)^{n-1}$ *unità.*

Una ipersuperficie d'ordine ν *con un punto* ν^{plo} *risulta di* ∞ *rette passanti per quel punto (cono).*

Diremo *varietà algebrica di dimensione* k *e di ordine* ν uno spazio a k dimensioni contenuto in S_n e tale che ogni S_{n-k} di S_n la seghi in generale in ν punti distinti.

Le varietà a *due* dimensioni si sogliono chiamar *superficie* e quelle ad *una* dimensione *curve.*

Una varietà algebrica si dice *normale pel proprio spazio* quando non può considerarsi come proiezione di una varietà dello *stesso* ordine e contenuta in uno spazio superiore.

Ogni varietà algebrica di dimensione k e di ordine ν è sempre contenuta in uno spazio lineare $S_{k+\nu-1}$, ma può anche stare in uno spazio lineare inferiore.

In particolare:

Ogni varietà di secondo ordine a k dimensioni è sempre contenuta in uno spazio lineare S_{k+1}.

Ogni curva d'ordine ν è sempre contenuta in uno spazio lineare di dimensione al massimo eguale a ν.

Da questo teorema si deduce che una curva di 2.° ordine è sempre *al più* piana; una curva di 3.° ordine *al più* è una cubica storta, ecc.

Data una varietà di dimensione k, l'assieme di tutte le rette tangenti ad essa in un punto (v. sopra) *forma una varietà lineare della stessa dimensione k.* Per gli spazi lineari tangenti ad una varietà v. Del Pezzo (*Acc. Napoli*, 1886).

Due varietà algebriche una d'ordine ν e dimensione k, e l'altra d'ordine ν' e dimensione k' si intersecano in una varietà d'ordine $\nu\nu'$ e dimensione $k+k'-n$, purchè sia $k+k' \geqq n$ e le due varietà non abbiano in comune una varietà d'ordine maggiore o eguale a $k+k'-n+1$.

Se è $k+k'<n$ le due varietà non hanno in generale *alcun punto comune*; *se $k+k'=n$ le due varietà hanno $\nu\nu'$ punti comuni* (Halphen, *Bull. Soc. math.*, II; Noether, *Math. Ann.*, XI).

Come per le curve storte dello spazio ordinario, si presenta naturalmente anche qui il problema della rappresentazione analitica delle varietà nello spazio S_n, le quali *non sempre* sono intersezioni *complete* di ipersuperficie.

L'Halphen (loc. cit.) estese a tal proposito la *rappresentazione monoidale* proposta da Cayley per le curve storte, (v. Cap. IX, § 2, pag. 305 e seg.).

Un monoide è una ipersuperficie d'ordine ν con un punto $(\nu - 1)^{plo}$. *Ogni retta passante pel punto multiplo la incontra in un solo altro punto;* di qui viene il nome di *monoide.*

Ogni varietà di dimensione k può essere rappresentata analiticamente da una relazione omogenea fra sole $k + 2$ coordinate (omogenee)

$$x_0 \, x_1 \ldots x_{k+1}.$$

che rappresenta una ipersuperficie conica, e da $n - k - 1$ monoidi.

Un altro metodo per la rappresentazione analitica delle varietà è dato dal seguente teorema di Kronecker al quale abbiamo già accennato a proposito della teoria delle curve storte nello spazio ordinario (v. pag. 303-304).

Ogni varietà di dimensione k dello spazio S_n può sempre considerarsi come intersezione completa di $n + 1$ ipersuperficie al più.

§ 3. — Le iperquadriche di S_n. Indicazioni sulle ipersuperficie cubiche di S_4.

Una *iperquadrica* di S_n è una ipersuperficie di 2.° ordine; è rappresentata quindi da un'equazione di 2.° grado nelle coordinate.

Per $\frac{n(n+3)}{2}$ *punti di* S_n *passa in generale una sola iperquadrica.*

La iperquadrica è anche di 2.ª classe.

Ponendo l'equazione della iperquadrica sotto la forma

$$\sum_{ij} a_{ij} x_i x_j = 0 \qquad (i, j = 0, 1, 2, \ldots n)$$

il suo *discriminante* è

$$A = | a_{ij} |.$$

Se questo discriminante è diverso da zero si ha la iperquadrica generale; altrimenti si hanno *i coni quadrici* ovvero le *iperquadriche specializzate.* Di queste ve ne sono di varie specie secondo il valore della *caratteristica* del determinante A; propriamente se la *caratteristica* di A è $n - h + 1$, si dirà che il *cono quadrico è di* h^{ma} *specie.*

Un cono quadrico di h^{ma} *specie contiene* ∞ *punti doppi formanti uno spazio lineare* S_{h-1}; *se* $h = 1$ *si ha un solo punto doppio.*

Le iperquadriche non hanno invarianti assoluti, e hanno un solo invariante (il discriminante); esse sono dunque tutte equivalenti dal punto di vista della Geometria proiettiva.

In un' iperquadrica generale vi sono spazi lineari di dimensione $\frac{n-2}{2}$ *o* $\frac{n-1}{2}$ *secondochè n è pari o dispari.*

Se la iperquadrica è di h^{ma} *specie, questi numeri diventano rispett.* $\frac{n+h-2}{2}$, $\frac{n+h-1}{2}$ *secondochè* $n+h$ *è pari o dispari.*

Se n è un numero dispari, esistono DUE *sistemi distinti di* $S_{\frac{n-1}{2}}$ *contenuti nella iperquadrica; secondochè* $\frac{n-1}{2}$ *è pari o dispari si ha poi questa fondamentale differenza, che cioè nel primo caso si tagliano due* $S_{\frac{n-1}{2}}$ *solo se sono dello stesso sistema, e nell' altro caso invece esse si tagliano solo se sono di sistema diverso* (SEGRE).

Più generalmente:

Considerando uno spazio (non lineare) di dimensione $\frac{n-1}{2}$ *che sia contenuto nella iperquadrica, e incontri in k punti gli spazi lineari* $S_{\frac{n-1}{2}}$ *del primo sistema e in k' punti gli spazi lineari* $S_{\frac{n-1}{2}}$ *del secondo sistema, e un altro spazio analogo cui corrispondano similmente i numeri* k_1, k_1', *il numero dei punti in cui i due spazi si intersecano è*

$$k\,k_1' + k_1\,k' \qquad \text{se } \frac{n-1}{2} \text{ è dispari;}$$

ed è

$$k\, k_1\, k' + k_1' \qquad \textit{se } \frac{n-1}{2} \textit{ è pari.}$$

Questo teorema di SEGRE è la estensione di un teorema di CHASLES per le curve algebriche tracciate sulle quadriche dello spazio ordinario (vedi pag. 350).

Delle iperquadriche si occupò prima VERONESE nel 3.° Cap. della sua Mem. nei *Math. Ann.*, XIX; indi ad esse fu dedicato un esteso lavoro di SEGRE (*Mem. Torino*, 1884), il quale fece anche lo studio dei fasci di iperquadriche e della superficie quartica *base* del fascio, facendone la classificazione mediante la teoria dei *divisori elementari* di WEIERSTRASS (v. pag. 563 di questo volume). *

Lo studio e la classificazione di questa quartica ha affinità con quello della *superficie di 4.° ordine a conica doppia, la quale è la proieziene nello spazio S_3 di quella quartica.* Vedi a questo proposito quanto abbiamo detto a pag. 460 di questo volume.

Dei fasci di iperquadriche si occupò anche BERTINI (*Rend. Lincei*, 1886) e dei fasci di iperquadriche specializzate (coni) si occupò SEGRE (*Acc. Torino*, 1884); altri lavori sulle iperquadriche sono quelli di DEL PEZZO (*Acc. Napoli,* 1885, 1895), e sulla equazione differenziale delle iperquadriche v. BERZOLARI (*Rend. Lincei*, 1896).

---

* Una trattazione della teoria dei divisori elementari è stata pubblicata in questi giorni durante la stampa di questo volume; essa è: MUTH, *Theorie und Anwendung der Elementarteiler.* Leipzig, Teubner, 1899.

Per la generazione proiettiva delle iperquadriche come estensione della generazione ordinaria (v. pag. 159) vedi i citati lavori di Veronese e Segre.

Le ipersuperficie cubiche dello spazio a 4 dimensioni sono studiate nei loro casi più notevoli (specialmente quelle contenenti piani, e quelle con 6, 7, 8, 9, 10 punti doppi) da Segre (*Mem. di Torino*, XXXIX; *Atti di Torino*, 1887) e da Castelnuovo (*Atti Ist. Veneto*, 1887).

Di alcune varietà a tre dimensioni composte di serie di piani si occupò Segre (*Atti*, *Torino*, XXI, 1886).

§ 4. — Le superficie cioè le varietà a due dimensioni dello spazio S_n. Le rigate. La superficie di Veronese per lo spazio S_5.

Fra le varietà a k dimensioni contenute in S_n sono state più specialmente studiate le superficie ($k = 2$), e fra queste le superficie rappresentabili sul piano e le *rigate* da Veronese *(cit.)*, da Segre (*Atti Torino*, 1884, 1886; *Rend. Lincei*, 1887; *Math. Ann.*, XXX, XXXIV), e da Del Pezzo (*Acc. Napoli*, 1885-86-87; *Rend. Palermo*, I, 1887).

Molte delle considerazioni che si fanno sulle superficie dello spazio ordinario possono estendersi facilmente alle superficie degli spazi superiori;

così la *rappresentazione piana*, le considerazioni riguardanti i *generi* della superficie, ecc. Per queste ultime vedi i lavori citati a pag. 317; si noti a questo proposito che nel lavoro ivi cit. di SEGRE si estendono anche a varietà qualunque, le considerazioni riguardanti un CARATTERE invariantivo analogo al genere.

Una superficie rappresentabile punto per punto sul piano è un *omaloide* (o *superficie di genere zero*, o *razionale*, o *unicursale*).

Segando una rigata appartenente ad S_n con spazi lineari S_{n-1} si hanno naturalmente curve del medesimo *genere*; * tal genere si assume come *genere della rigata* (v. pag. 317).

Tutte le superficie di ordine $n-1$ appartenenti ad un S_n (e non ad uno spazio lineare inferiore) sono o rigate o coni, eccetto (se $n=5$) la cosiddetta superficie di 4.° ordine di Veronese, di cui discorreremo più sotto (DEL PEZZO).

Le superficie di ordine n contenute in S_n, per $n>9$, sono tutte rigate.

Le superficie d'ordine ν contenute in S_n per ν inferiore a certi limiti sono tutte rigate. Questi limiti sono stati calcolati da DEL PEZZO (*Acc. Napoli*, 5 febbraio 1887) ma risultano in modo non semplice.

Una superficie rigata di ordine $n-1$ appartenente ad S_n è sempre razionale.

Su di una rigata si dice *direttrice* una curva incontrata da *tutte* le generatrici.

---

* Per il genere di una curva v. il § 5.

Ogni rigata d'ordine $n-1$ di S_n ammette UNA SOLA *direttrice d'ordine minimo, salvo nel caso in cui n è dispari e l'ordine minimo sia proprio $\frac{n-1}{2}$ nel qual caso le direttrici minime sono ∞^1.*

Condizione necessaria e sufficiente perchè due rigate d'ordine $n-1$ di S_n sieno proiettivamente identiche è che abbiano direttrici minime dello stesso ordine.

Di qui si ha una classificazione delle rigate di ordine $n-1$ di S_n a secondo dell' ordine della direttrice minima, *questo ordine potendo variare da* 1 *a* $\frac{n}{2}$ *o rispett.* $\frac{n-1}{2}$ (SEGRE).

Su di una rigata d'ordine $n-1$ di S_n due direttrici d'ordini $n-k$, $n-k'$ si tagliano in

$$n-k-k'-3$$

punti.

Le rigate razionali ($p=0$) di ordine $n-1$ di uno spazio qualunque si possono tutte ottenere come proiezioni di quelle di ordine $n-1$ appartenenti ad S_n.

Le rigate ellittiche ($p=1$) di ordine $n+1$ di uno spazio qualunque, e che non sieno coni, sono sempre proiezioni di rigate di ordine $n+1$ di S_n.

Tutte le rigate (non coni) di genere 2 e ordine $n+3$ sono proiezioni di quelle del medesimo ordine appartenenti a S_n.

Più generalmente:

Tutte le rigate di ordine ν e genere p appartenenti ad uno spazio inferiore a $S_{\nu-2p+1}$ sono proiezioni di rigate del medesimo ordine appartenenti a tale spazio (Id.)

Ogni rigata di ordine ν e genere p contiene curve direttrici d'ordine $\leqq \frac{\nu + p}{2}$; di qui si presenta, come per le rigate razionali (v. sopra) un criterio di classificazione delle rigate a secondo delle *direttrici minime.*

Per una formola di STURM-SEGRE riguardante l'ordine e il genere di una curva tracciata su di una rigata v. pag. 328.

Una rigata di genere $p > 0$ e ordine $\nu \geqq 4p$, * *se non è un cono, è contenuta* AL PIÙ *in un $S_{\nu-p}$. Se è contenuta in $S_{\nu-p}$ ed è $p > 1$, essa ha una direttrice doppia; se è contenuta in $S_{n\ p-1}$ ed è $p > 2$, essa ha una conica doppia, oppure una retta direttrice doppia o tripla, od infine (se $p = 3$) una curva semplice piana di 4.° ordine* (SEGRE).

Passiamo ora alla superficie di VERONESE cui abbiamo già accennato.

La superficie di VERONESE (che indicheremo con $V_2{}^4$) è di 4.° ordine contenuta nello spazio a 5 dimensioni; *essa è rappresentabile punto per punto su di un piano (è un omaloide,* v. pag. 831) ed è una superficie *normale* (v. pag. 825) per S_5.

Essa si genera facendo corrispondere omograficamente alle coniche di un piano, gli iperpiani di S_5; a tutte le coniche passanti per un punto corrispondono ∞^4 iperpiani di S_5, i quali si incon-

* Questa limitazione serve solo a rendere più semplici i risultati. Vedi i lavori del SEGRE, specialmente quelli nei *Math. Ann.* che sono più completi degli altri.

trano in un punto; *il luogo di questi punti è la superficie richiesta.*

La superficie contiene un sistema doppiamente infinito di coniche K; per due punti di essa passa una sola conica e per un punto ne passano ∞^1.

Due coniche K si incontrano in un punto e sono situate in uno spazio S_4 *tangente in tal punto alla superficie.*

I piani tangenti formano una ipersuperficie di 3.ª classe.

I piani delle coniche *K* si chiamano *piani secanti di 1.ª specie.*

Due piani secanti di 1.ª specie non si incontrano mai in una retta, ma sempre in un punto solo. Essi costituiscono una ipersuperficie di 3.° ordine.

Un piano di S_5 non ha in generale alcun punto comune colla superficie (non è secante); ma ne può avere *uno*, *due* o *tre*; quando ne ha tre e non è di 1.ª specie, allora si chiama *piano secante di 2.ª specie.*

Fra gli infiniti iperpiani S_4 *passanti per il piano tangente alla superficie in un punto ve n'è uno solo che taglia la superficie in due coniche coincidenti;* un tale iperpiano si chiama *un iperpiano tangente doppio.*

Gli ∞^2 *iperpiani tangenti doppi inviluppano la superficie reciproca (di 4.ª classe) della data.*

Due di tali iperpiani si incontrano in un piano tangente, come due punti della superficie determinano un piano secante di 1.ª specie.

Due piani tangenti si incontrano sempre in un sol punto.

Fra le superficie non contenute in un S_4, *la super-*

ficie di Veronese è l'unica i cui piani tangenti si incontrino a due a due (Del Pezzo).

Proiettando nel nostro spazio da una retta S_1 *la* V_2^4 *si ottiene una superficie di Steiner* (v. Cap. XII, § 9).

Se la retta S_1 *incontra la* V_2^4 *in un punto, la proiezione è una superficie rigata di 3.° ordine; se* S_1 *incontra in due punti la* V_2^4 *si ha una quadrica, e se infine* S_1 *è tangente a* V_2^4 *si ha un cono quadrico.*

La superficie di Veronese è compresa nella categoria generale delle superficie normali omaloidi d'ordine n^2 dello spazio a $\frac{n(n+3)}{2}$ dimensioni; tali superficie hanno la proprietà fondamentale, che con proiezione di esse sul nostro spazio, si deducono *tutte* le superficie di S_3 rappresentabili punto per punto su un piano mediante curve di ordine n o minore di n.

Essa fu notata da Veronese prima nel cit. lavoro dei *Math. Ann.*, XIX, e poi studiata in un lavoro apposito (*Mem. Lincei*, XIX, 1884).

A queste ricerche sono affini quelle sulla Geometria *delle coniche del piano*, citate a pag. 549.

§ 5. — Le curve negli spazi S_n.

Passiamo alle varietà ad una sola dimensione *(curve)*.

Prima di tutto è facile l'estensione (e noi, per brevità, non vi insisteremo) dei concetti di *piano*

osculatore (avente colla curva tre intersezioni infinitamente vicine) in un punto della curva, di spazio S_3 osculatore avente quattro intersezioni infinitamente vicine), e così di seguito.

Inoltre, una retta tangente si dirà *stazionaria* o *di flesso* quando ha colla curva *tre* intersezioni infinitamente vicine; un piano osculatore si dirà *stazionario* quando, in luogo di tre, ha *quattro* intersezioni infinitamente vicine colla curva, ecc.

Un primo problema che si presenta per le curve è quello riguardante le relazioni esistenti fra i numeri caratteristici, cioè riguardante la estensione delle note formole di Plücker per le curve piane e di Cayley per le curve storte dello spazio ordinario. Questo problema fu risoluto per la prima volta da Veronese cit.)

Consideriamo la proiezione della curva C^m di S_n da un punto dello spazio S_n su di uno spazio lineare S_{n-1}; abbiamo una curva di S_{n-1}; indi la proiezione di questa in uno spazio lineare S_{n-2}, abbiamo un'altra curva di S_{n-2}, e così di seguito. Consideriamo poi la ipersuperficie *sviluppabile* generata dalle tangenti alla curva C^m, e la sezione fatta in questa da uno spazio lineare S_{n-1}; indi proiettiamo, come avanti, questa sezione consecutivamente in spazi lineari inferiori. Consideriamo poi ancora la sviluppabile relativa alla suindicata sezione e seghiamo tale sviluppabile con uno spazio lineare S_{n-2}; e indi proseguiamo come avanti, cioè con successive proiezioni in spazi inferiori.

Così procedendo si vede che si vengono ad ottenere $n - 1$ curve piane, i cui numeri caratteri-

stici corrispondono a altrettanti numeri caratteristici della curva data; applicando le formole di Plücker a ciascuna di esse si hanno in tutto $3(n-1)$ relazioni fra *i numeri caratteristici* della curva data.

Indichiamo con:

m, l'ordine di C^m,

k, il *primo rango* di C^m, cioè il numero delle tangenti (S_1) di C^m che tagliano un S_{n-2} arbitrario,

w, il *secondo rango* di C^m, cioè il numero dei piani S_2 osculatori a C^m che tagliano un S_{n-3} arbitrario,

$w^{(1)}$, il *terzo rango* di C^m, cioè il numero degli spazi S_3 osculatori a C^m e che tagliano un S_{n-4} arbitrario,

. . . .

$w^{(n-4)}$, l'$(n-2)^{mo}$ *rango* di C^m, cioè il numero degli spazi S_{n-2} osculatori a C^m e che incontrano una retta arbitraria,

w^{n-3}, la *classe* della curva,

w_1, il numero delle tangenti d'inflessione (con *tre* punti infinitamente vicini comuni colla curva),

$w_1^{(1)}$, il numero dei piani osculatori stazionari (con *quattro* punti infinitamente vicini comuni colla curva),

$w_1^{(2)}$, il numero degli spazi S_3 stazionari,

. . . .

$w_1^{(n-3)}$, il numero degli spazi S_{n-2} stazionari,

w_1^{n-2}, il numero degli spazi S_{n-1} stazionari,

R, il numero delle cuspidi di C^m,

D_1, il numero dei punti doppi di C^m,

D, il numero degli spazi S_{n-2} che passano per $n - 2$ punti arbitrari, e segano due volte la curva storta (punti doppi apparenti),

$D^{(1)}$, il numero di quelle coppie di tangenti non consecutive di C^m, le quali tagliano un S_{n-1} in due punti di una retta che incontra un S_{n-4} arbitrario,

$D^{(2)}$, il numero di quelle coppie di piani osculatori non consecutivi di C^m, che tagliano un S_{n-2} in due punti di una retta, la quale incontra un S_{n-5} arbitrario,

. . . .

$D^{(n-2)}$, il numero di quelle coppie di spazi S_{n-2} osculatori non consecutivi di C^m, che si incontrano in un punto di un piano arbitrario dato (o anche l'ordine della ipersuperficie doppia a $(n - 2)$ dimensioni della sviluppabile formata dagli spazi S_{n-2} osculatori a C^m),

d, il numero degli spazi S_{n-1} passanti per $n - 2$ punti arbitrari, e contenenti due tangenti non consecutive di C^m,

$d^{(1)}$, il numero delle coppie di piani osculatori non consecutivi di C^m, che tagliano un S_{n-1} in due rette che insieme a $n - 3$ punti arbitrari fissi di S_{n-1} sono situate in un medesimo spazio S_{n-2},

. . . .

$d^{(n-2)}$, il numero delle coppie degli spazi osculatori S_{n-1} non consecutivi di C^m, che si tagliano in una retta di un piano fisso,

d_1, il numero delle tangenti doppie di C^m,

$d_1^{(1)}$, il numero dei piani osculatori doppi di C^m,

. . . .

$d_1^{(n-2)}$, il numero degli spazi S_{n-1} osculatori doppi di C^m.

*Stabilite queste notazioni, si hanno le seguenti relazioni:**

$$\begin{cases} k = m(m-1) - 2(D + D_1) - 3R \\ m = k(k-1) - 2(d + d_1) - 3(w + w_1) \\ w + w_1 - R = 2(k-m) \end{cases}$$

$$\begin{cases} w = k(k-1) - 2(D^{(1)} + d_1) - 3(m + w_1) \\ k = w(w-1) - 2(d^{(1)} + d_1^{(1)}) - 3(w^{(2)} + w_1^{(2)}) \\ m + w_1 - (w^{(1)} + w_1^{(1)}) = 3(k-w) \end{cases}$$

$$\begin{cases} w^{(1)} = w(w-1) - 2(D^{(2)} + d_1^{(1)}) - 3(k + w_1^{(1)}) \\ w = w^{(1)}(w^{(1)}-1) - 2(d^{(2)} + d_1^{(2)}) - 3(w^{(2)} + w_1^{(2)}) \\ k + w_1^{(1)} - (w^{(2)} + w_1^{(2)}) = 3(w - w^{(1)}) \end{cases}$$

. . . .

* Abbiamo creduto utile conservare le stesse notazioni adoperate da VERONESE, e non alterarle per metterle d'accordo colle notazioni da noi già adoperate nel Cap IX a proposito delle curve storte dello spazio ordinario; l'unica modificazione che abbiamo fatta è stata quella di porre $w_1^{(n-2)}$ in luogo di $w^{(n-2)}$.

$$\begin{cases} w'^{(n-3)} = w^{(n-4)}(w^{(n-4)}-1)-2(D^{(n-2)}+d_1^{(n-3)})-3(w^{(n-5)}+w_1^{(n-3)} \\ w^{(n-4)} = w^{(n-3)}(w^{(n-3)}-1)-2(d^{(n-2)}+d_1^{(n-2)})-3w_1^{(n-2)} \\ w^{(n-5)}+w_1^{(n-3)}-w_1^{(n-2)} = 3(w^{(n-4)}-w^{(n-3)}). \end{cases}$$

Definendo il *genere p della curva* C^m, come il genere di una qualunque sua proiezione piana, si ha

$$p = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - (D + D_1) - R =$$

$$= \frac{(k-1)(k-2)}{2} - (d + d_1) - (w + w_1) =$$

$$= \frac{(k-1)(k-2)}{2} - (D^{(1)} + d_1) - (m + w_1) =$$

$$= \frac{(w-1)(w-2)}{2} - (d^{(1)} + d_1^{(1)}) - (w^{(1)} + w_1^{(1)}) =$$

$$= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

La curva intersezione completa di $(n-1)$ *ipersuperficie di* S_n *di ordini rispett.* $\nu_1 \nu_2 \dots \nu_{n-1}$ *ha per ordine* $m = \nu_1 \dots \nu_{n-1}$ *e per primo rango*

$$k = \nu_1 \dots \nu_{n-1} [\Sigma \nu_i - n + 1],$$

e per espressione di D

$$2D = \nu_1 \dots \nu_{n-1} [\nu_1 \dots \nu_{n-1} - \Sigma \nu_i + n - 2].$$

Di qui colle formole di VERONESE si possono trovare i valori degli altri numeri caratteristici.

In particolare:

La intersezione completa di 8.° ordine di tre iperquadriche dello spazio a quattro dimensioni,

ha il primo rango eguale ad 8, il 2.° rango eguale a 48, la classe eguale a 32, il genere 5, e 120 spazi S_3 stazionari.

Lo spazio più elevato cui può appartenere una curva d'ordine ν e genere p (quando $\nu > 2p - 2$) è un $S_{\nu-p}$. Questo teorema importante, che ricorda un altro sulle rigate (v. § 4) è di CLIFFORD (*Phil. Trans.*, 1878); di esso si occuparono anche VERONESE (*Math. Ann.*, XIX, pag. 213), e SEGRE (*Math. Ann.*, XXX, pag. 207).

Da un teorema del § 2 risulta che l'ordine più basso delle curve appartenenti allo spazio S_n *è l' n stesso.*

La curva di ordine n e appartenente a S_n è razionale (di genere zero).

Evidentemente tale curva è una *curva normale* per lo spazio S_n.

Per tale curva il 1.° e l'$(n-2)^{mo}$ rango, il 2.° e l' $(n-3)^{mo}$ rango, ecc. sono rispett. a due a due eguali a

$$2(n-1), \quad 3(n-2), \ldots$$

La classe di tale curva è n, e tal curva non ha elementi doppi o stazionari.

Per $n+3$ punti di S_n di cui $n+1$ non stieno mai in un iperpiano, passa una e una sola curva di ordine n di S_n.

Due curve di ordine n di S_n sono sempre proiettivamente identiche.

Colla curva normale di ordine n di S_n, una retta, un piano, uno spazio S_3, ... possono avere AL PIÙ *due, tre, quattro, ... punti comuni.*

Questa curva può riguardarsi come il luogo delle intersezioni degli iperpiani corrispondenti di $n-1$ fasci di iperpiani proiettivi.

Per un punto P di S_n possono condursi n iperpiani osculatori alla curva; e se n è dispari, gli n punti di contatto di questi stanno in un piano che passa per P (v. il teor. analogo di CHASLES per la cubica storta a pag. 356).

Le curve di ordine $n+1$ di S_n sono ellittiche (di genere $p=1$); non hanno elementi doppi o stazionari, salvo che hanno $(n+1)^2$ spazi S_{n-1} stazionari. La loro classe è $n(n+1)$ e i loro ranghi sono rispettivamente:

$$k = 2(n-1) + 2$$
$$w = 3(n-2) + 6$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$w^{(n-4)} = n^2 - 1.$$

Anche questa curva è normale per lo spazio S_n, non potendo essere proiezione di una di ordine $n+1$ dello spazio S_{n+1}, perchè tale ultima sarebbe *razionale.*

Tutte le curve RAZIONALI *di ordine $m \leq n$ contenute in $S_2\, S_3 \ldots S_{n-1}$ sono sempre proiezioni di una curva normale di ordine n di S_n.*

Tutte le curve ELLITTICHE *di ordine $m \leq n+1$ contenute in $S_2\, S_3 \ldots S_{n-1}$ sono sempre proiezioni di una curva normale di ordine $n+1$ di S_n.*

In generale:

Le curve di ordine $n+p$ e genere p appartenenti a S_n, insieme alle loro proiezioni in spazi inferiori costituiscono la TOTALITÀ *delle curve di*

quell'ordine e genere, appartenenti ad un S_r *dove* $r \leqq n$; *e se è* $n+p > 2p-2$ *allora tutte quelle curve costituiscono la totalità di tutte le curve di quell'ordine e genere*; perchè nel caso indicato (pel teorema di Clifford sopranotato) oltre le curve di quell'ordine e genere esistenti in spazi S_r $(r \leqq n)$ non ne esistono altre.

Per le curve algebriche dello spazio S_n, v. gli stessi lavori citati nel § precedente, e anche Segre (*Giorn. di Batt.*, XXVI; *Rend. Palermo*, II).

CAPITOLO XX.

La Geometria infinitesimale e intrinseca negli iperspazi lineari e negli spazi a curvatura costante.

§ 1. — Le curve negli iperspazi lineari.

Immaginiamo le coordinate x di un punto della curva assegnate in funzione di un parametro t.

Per $k+1$ punti della curva si può far passare uno spazio lineare a k dimensioni; facciamo come al solito che i $k+1$ punti si avvicinino indefinitamente accostandosi ad un punto P; la posizione limite di tale spazio lineare si dice *spazio lineare a k dimensioni osculatore* alla curva in P. *Il numero k può variare da* 1 *a* $n-1$.

La distanza di un punto della curva vicino a P dallo spazio lineare a k dimensioni osculatore in P, è un infinitesimo di $k+1^{mo}$ *ordine.*

Le equazioni dello spazio lineare a k dimensioni osculatore alla curva, sono quelle che si ottengono

eguagliando a zero i minori della matrice

$$\begin{Vmatrix} X_1 - x_1, & X_2 - x_2, & \ldots & X_n - x_n \\ x_1' & x_2' & \ldots & x_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{(k)} & x_2^{(k)} & \ldots & x_n^{(k)} \end{Vmatrix}.$$

indicando con $x_1 x_2 \ldots x_n$ le coordinate di P, e con $x'_1 x''_1, \ldots x'_2 x''_2 \ldots$ le derivate di quelle coordinate rispetto alla variabile indipendente t.

Indichiamo con θ_k l'angolo fra due spazi lineari osculatori a k dimensioni in due punti prossimi della curva, e con s l'arco intercetto fra i due punti; il limite del rapporto $\frac{\theta_k}{s}$ quando s tende a zero, è ciò che si chiama *la k^{ma} curvatura della curva in quel punto;* e, al solito, l'inversa di tale curvatura sarà chiamata *k^{mo} raggio di curvatura. Vi sono $n-1$ raggi di curvatura.*

Indicando con M_k $(0 \leqq k \leqq n)$ la somma dei quadrati dei minori di ordine k contenuti nella matrice

$$\begin{Vmatrix} x_1' & \ldots & x_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{(k)} & \ldots & x_n^{(k)} \end{Vmatrix}$$

ponendo $M_0 = 1$, e chiamando R_k il k^{mo} raggio di curvatura, *si ha la formola generale*

$$\frac{1}{R^2_k} = \frac{M_{k+1}\, M_{k-1}}{M_1\, M_k}$$

essendo evidentemente

$$M_1 = x_1'^2 + x_2'^2 + \dots + x_n'^2.$$

Si ha la formola

$$\frac{1}{R^2_k\, R^4_{k-1} \dots R_1^{2k}} = \frac{M_{k+1}}{M_1^{\frac{(k+1)(k+2)}{2}}}.$$

Se M_n è zero per tutti i punti della curva, allora questa è situata in uno spazio lineare inferiore; se M_{k+1} è zero per tutti i punti della curva, e non è invece zero M_k, allora la curva è situata in uno spazio lineare a k dimensioni.

I punti della curva nei quali è $M_n = 0$ sono i cosiddetti *punti stazionari della curva.*

Sia P il punto della curva, e consideriamo il seguente sistema di n rette a due a due perpendicolari: prima di tutto la tangente alla curva; indi la retta perpendicolare alla tangente e situata nello spazio osculatore a due dimensioni; indi la retta perpendicolare a tale ultimo spazio e situata nello spazio osculatore a tre dimensioni e così di seguito.

Chiamando allora

$$\begin{matrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{matrix}$$

rispettivamente gli angoli di direzione, rispetto agli n assi coordinati primitivi, di tali n rette, *si hanno le seguenti formole, da reputarsi come estensione*

delle formole di Frenet *e* Serret *relative alle curve storte* (v. pag. 656), *e che danno i differenziali degli* n^2 *coseni degli angoli* α, *in funzioni lineari dei coseni stessi:*

$$\frac{d \cos \alpha_{ki}}{ds} = \frac{\cos \alpha_{k+1,i}}{R_k} - \frac{\cos \alpha_{k-1,i}}{R_{k-1}}$$

dove si intenda che quando è $k = 1$, *allora nel secondo membro si sopprima il secondo termine, e quando è* $k = n$, *nel secondo membro si sopprima invece il primo termine.* Per queste formole vedi Brunel (*Math. Ann.*, XIX) e Landsberg (*Crelle*, CXIV).

Per la estensione del teorema di Bonnet sulla distanza di due tangenti infinitamente vicine della curva, e sulla distanza di un punto della curva dal piano osculatore in un punto infinitamente vicino v. Jordan (*Compt. Rend.*. LXXIX, 1874, pag. 796). Altri lavori sulla teoria infinitesimale delle curve in uno spazio qualunque sono quelli di Hoppe (*Arch. der Math.*, LXIV (1.ª serie); VI, XI, XII (2.ª serie) 1880-1892).

§ 2. — Geometria differenziale delle varietà a più dimensioni immerse in spazi lineari. Forme differenziali quadratiche.

Come in teoria delle superficie si introduce la nota forma differenziale quadratica a due variabili che dà il quadrato dell'*elemento lineare* appartenente alla superficie stessa, così, per le varietà a più di due dimensioni, si introduce in generale una forma *differenziale quadratica ad n variabili*

$$d\,s^2 = \sum_1^n a_{ij}\,d\,x_i\,d\,x_j \qquad (1)$$

la quale ci rappresenti il quadrato della distanza infinitesima fra due punti infinitamente vicini della varietà medesima, cioè, come si dice, *il quadrato dell'elemento lineare appartenente a quella varietà. Supporremo che la* (1) *sia* DEFINITA POSITIVA *e che il determinante della a sia diverso da zero.*

L'ipotesi che si debba prendere a fondamento una forma differenziale *quadratica*, anzichè un'altra qualunque p. es. di 4.° o 6.° ecc. è un' ipotesi affatto particolare, e si potrebbe non supporla; essa però è una *conseguenza* di un'altra ipotesi che noi qui facciamo esplicitamente che cioè la nostra varietà sia sempre immersa in uno spazio *lineare* ad un numero di dimensioni maggiore.

Inoltre:

Supposto che l'elemento lineare sia esprimibile con una forma quadratica come la (1), *si può sempre trovare un numero h*

$$0 \leqq h \leqq \frac{n(n-1)}{2}$$

in modo che prendendo $y_1 \ldots y_{n+h}$, *funzioni opportune di* $x_1 \ldots x_n$, *la* (1) *si possa dedurre dalla forma differenziale*

$$\sum_{i=1}^{n+h} d\, y^2_i$$

che converrebbe ad uno spazio lineare ad $n+h$ *dimensioni* (v. SCHLAEFLI, *Ann. di mat.*, V, pagina 190; RICCI, *Id.*, XII, pag. 137).

Il minimo fra i numeri h si dice *classe* della varietà (RICCI).

La Geometria intrinseca delle varietà si riduce così allo studio delle forme differenziali quadratiche e delle loro trasformazioni.

Nella teoria delle forme differenziali quadratiche, è utile introdurre i cosiddetti *simboli di* CHRISTOFFEL; di questi ve ne è quattro categorie, quelli a tre indici di 1.ª e 2.ª specie, e i simboli a quattro indici di 1.ª e 2.ª specie (v. CHRISTOFFEL, *Crelle*, LXX, e anche sopra pag. 676). *I simboli a tre indici di 1.ª specie sono*

$$\begin{bmatrix} k\,h \\ i \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\, a_{ki}}{\partial\, x_h} + \frac{\partial\, a_{hi}}{\partial\, x_k} - \frac{\partial\, a_{kh}}{\partial\, x_i}\right);$$

quelli di 2.ª specie sono

$$\left\{ \begin{matrix} k\,h \\ i \end{matrix} \right\} = \sum_l A_{il} \left[\begin{matrix} k\,h \\ l \end{matrix} \right]$$

dove le A sono i complementi algebrici degli elementi che hanno i medesimi indici nel determinante delle a.

I simboli a quattro indici di 2.ª specie sono

$$\{k\,h,\, i\,j\} = \frac{\partial \left\{ \begin{matrix} k\,i \\ h \end{matrix} \right\}}{\partial x_j} - \frac{\partial \left\{ \begin{matrix} k\,j \\ h \end{matrix} \right\}}{\partial x_i} + \sum_l \left[\left\{ \begin{matrix} k\,i \\ l \end{matrix} \right\} \cdot \left\{ \begin{matrix} l\,j \\ h \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} k\,j \\ l \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} l\,i \\ h \end{matrix} \right\} \right]$$

e finalmente quelli a quattro indici di 1.ª specie sono

$$(k\,h,\, i\,j) = \sum_l a_{il} \{k\,l,\, i\,j\}.$$

Fra questi simboli sussistono molte relazioni per le quali rimandiamo al Cap. II della *Geom. differenziale* del BIANCHI.

Data una forma differenziale quadratica (1), ponendo le x funzioni di altre n variabili x', si può trasformare la (1) in un'altra forma differenziale

$$\sum_1^n a'_{ij}\, d\,x'_i\, d\,x'_j.$$

Le due forme differenziali si dicono allora *equivalenti.*

Un problema fondamentale nella teoria delle forme differenziali è quello in cui si cercano le condizioni perchè due forme differenziali quadratiche sieno equivalenti.

Prima di tutto si cercano le condizioni a cui devono soddisfare le funzioni x delle x', e *tali condizioni sono date da* $\frac{n^2(n+1)}{2}$ *equazioni a derivate parziali simultanee, del tipo:*

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial x'_r \, \partial x'_s} + \sum_{hk} \left\{ \begin{matrix} h\,k \\ i \end{matrix} \right\} \frac{\partial x_h}{\partial x'_s} \frac{\partial x_k}{\partial x'_r} =$$

$$= \sum_j \left\{ \begin{matrix} r\,s \\ j \end{matrix} \right\}' \frac{\partial x_i}{\partial x'_j}$$

dove con $\left\{ \begin{matrix} r\,s \\ j \end{matrix} \right\}'$ *si intende il simbolo di* CHRISTOFFEL *calcolato per la forma trasformata.*

Le condizioni di integrabilità di questo sistema di equazioni a derivate parziali saranno delle equazioni di condizioni cui devono soddisfare le a e le a', e le loro derivate. Opportunamente combinandole tali equazioni di condizione potranno porsi sotto una forma invariantiva, e potranno così ottenersi degli invarianti o parametri differenziali, cioè espressioni che restano inalterate per trasformazioni di variabili (v. *Repert.*, I, pag. 239 e seg.).

Noi non entreremo però nei dettagli della costruzione di questi *parametri differenziali;* per essi v. i lavori sottoc.

Le condizioni per la trasformabilità di due forme differenziali quadratiche a n variabili, sono

in numero di

$$\frac{n^2(n^2-1)}{12}.$$

Perchè una forma differenziale quadratica a n variabili sia trasformabile in una il cui elemento lineare sia della forma $\sum_1^n dx_i^{\,2}$ *sono necessarie le condizioni*

$$(hk, ij) = 0$$

dove (hk, ij) *è il noto simbolo di* CHRISTOFFEL (v. sopra).

Il problema della trasformazione delle forme differenziali contiene come caso particolare quello delle condizioni perchè un dato spazio sia *lineare*, e quindi il suo elemento lineare sia riducibile alla forma

$$\sum_{i=1}^{n} dx'^{\,2}_i.$$

Le equazioni di LAMÈ relative ai sistemi tripli ortogonali (v. Cap. XVI, § 14) corrispondono appunto alle *condizioni perchè lo spazio a tre dimensioni sia lineare.*

Affine a questo problema di trasformazione è quello di ricercare quando una forma differenziale sia *di classe zero*, *di classe uno*, ecc. (v. sopra). In tale indirizzo citeremo i lavori di RICCI (*Ann. di mat.*, XII, e *Lincei Rend.*, marzo 1888).

Il problema della trasformazione delle forme differenziali quadratiche fu cominciato a trattare da CHRISTOFFEL (*Crelle*, LXX) e da LIPSCHITZ (*Id.*, LXX, LXXI, LXXII, LXXIV, LXXVIII, LXXXI, v. anche *Bull. de Darboux*, IV, 1873), il quale considerò anche il caso di forme differenziali di grado superiore. In un lavoro di SOUVOROF (in russo, riprodotto in sunto in *Bull. de Darboux*, IV) si considera solo il caso delle forme differenziali quadratiche *ternarie*, e si costruiscono per tal caso *tre* espressioni invariantive; del caso generale delle forme quadratiche si occupò posteriormente poi anche VOSS (*Math. Ann.*, XVI).

§ 3. — DEFORMAZIONE, SPOSTAMENTI E CURVATURA RIEMANNIANA DI UNO SPAZIO. SPAZI A CURVATURA RIEMANNIANA COSTANTE.

Ricordando la proprietà fondamentale della curvatura K di GAUSS relativa alla superficie, d'essere un invariante per una trasformazione della forma differenziale fondamentale, viene spontanea l'idea di passare dagli studi sulla trasformazione delle forme differenziali, a quelli sull'estensione del *concetto di curvatura.* Tratteremo in questo paragrafo della curvatura di uno spazio secondo il concetto dato da RIEMANN.

Prima di tutto enunciamo il seguente teorema importante di BEEZ (*Zeitsch. f. Math. und Physik*, XX, XXI; v. anche RICCI, *Ann. di mat.*, XII, pag. 163 e CESÀRO, *Geom. intrinseca*).

Uno spazio ad un numero $n > 2$ di dimensioni immerso in uno spazio a $n + 1$ dimensioni, non si può in generale deformare, restando sempre nello spazio a $n + 1$ dimensioni cioè non è possibile fletterlo nel proprio spazio ambiente, conservandone inalterato l'elemento lineare, come invece può farsi colla massima libertà per gli spazi ad una dimensione (linee) e con una libertà più ristretta per gli spazi a due dimensioni (superficie). La flessione è possibile solo per spazi speciali. I soli cangiamenti che uno spazio generale a $n > 2$ dimensioni può avere, senza uscire dallo spazio ad $n + 1$ dimensioni in cui si suppone contenuto, sono gli spostamenti rigidi, cioè le traslazioni, le rotazioni, ecc.

Passiamo ora a dare l'idea della *curvatura di uno spazio in un punto*, secondo Riemann.

Consideriamo un punto P dello spazio e da esso conduciamo, in un suo intorno infinitamente piccolo, tutte le possibili linee *geodetiche* in tutte le direzioni, cioè le linee che rappresentano il *più breve* cammino dal punto P ad un punto ad esso infinitamente vicino nello spazio medesimo, linee per le quali è un minimo l'integrale che ne rappresenta l'arco. *Di tali linee se ne possono condurre ∞^{n-1} se lo spazio è ad n dimensioni. Fra esse se ne possono scegliere sempre n (e non più di n) tali che chiamando $ds_1 \ldots ds_n$ i differenziali dei loro archi computati a partire dal punto P, le quantità $ds_1 \ldots ds_n$ sieno* LINEARMENTE INDIPENDENTI; *il differenziale dell'arco di ogni altra linea geodetica si esprimerà allora sempre linearmente mediante $ds_1 \ldots ds_n$.*

Consideriamo *due* di tali linee p. es. quelle corrispondenti a $d\,s_1$, $d\,s_2$, insieme a tutte le altre infinite di cui il differenziale dell'arco si esprima colla formola.

$$d\,s_{12} = \lambda_1\,d\,s_1 + \lambda_2\,d\,s_2.$$

I punti di tutte queste infinite linee, estese per un tratto infinitesimo attorno P, formeranno una varietà a *due* dimensioni (superficie), compresa nello spazio totale, e di tali estensioni superficiali *infinitesime* attorno P se ne potranno formare

$$\frac{n\,(n-1)}{2}.$$

Di ciascuna di tali superficie calcoliamo, al modo di Gauss, la *curvatura* in P (che sarà formata, nel modo solito, mediante i coefficienti della forma differenziale quadratica a *due* variabili, che rappresenta il quadrato dell'elemento lineare di quella superficie) tale curvatura la chiamiamo, seguendo Riemann, *curvatura dello spazio nel punto P e secondo quella determinata orientazione superficiale.* Come si vede dunque, secondo questo concetto, in ogni punto dello spazio vi saranno tante curvature per quante sono le $\frac{n\,(n-1)}{2}$ orientazioni superficiali fra loro distinte. Ammettendo che tutte queste varie curvature relative ad un medesimo punto sieno tutte fra loro eguali, e che si conservino costanti passando da un punto ad un altro dello spazio, si hanno *gli spazi a curvatura di Riemann costante.*

Tale curvatura costante può essere positiva, negativa, o nulla; *quando essa è nulla lo spazio è lineare.*

Quando la curvatura è costante positiva, lo spazio si suol chiamare *sferico*, o *di Riemann*, o *ellittico;* quando essa invece è negativa lo spazio si suol chiamare *pseudosferico*, o di *Lobatschewsky*, o *iperbolico*, o *non euclideo* in senso ristretto; quando infine la curvatura è zero, si ha, come abbiamo detto, lo spazio *lineare*, il quale suol chiamarsi anche *Euclideo*, o *parabolico* (v. Cap. XXI). *Uno spazio pseudosferico o iperbolico si estende all'infinito, invece uno spazio ellittico non è infinito* (RIEMANN).

Gli spazi a curvatura costante di Riemann godono della proprietà rimarchevole *d'essere applicabili su sè stessi in modo che da un punto si può trasportarsi in qualunque altro, e ciò senza deformazione che del resto non sarebbe possibile secondo il teorema di Beez; per tali spazi cioè vige il principio della perfetta trasportabilità delle figure senza deformazione, come si verifica p. es. per le superficie sferiche dello spazio ordinario* (LIPSCHITZ, cit. nel § preced.; v. BIANCHI, *Rend. Lincei*, 1898). *L'elemento lineare di ogni spazio a curvatura di Riemann K costante si può sempre, con opportuna scelta di coordinate (che alcuni chiamano* STEREOGRAFICHE), *porsi sotto la forma* (di RIEMANN)

$$d s^2 = \frac{d x_1{}^2 + d x_2{}^2 + \ldots + d x_n{}^2}{1 + \frac{K}{4}(x_1{}^2 + x_2{}^2 + \ldots + x_n{}^2)} ;$$

i coefficienti della forma differenziale quadratica sono cioè proporzionali a quantità costanti, il fat-

tore di proporzionalità essendo una funzione di tutte le x.

Scegliendo altro sistema di coordinate, l'elemento lineare per ogni spazio a curvatura costante negativa $-\frac{1}{R^2}$ *può essere rappresentato dalla formola*

$$d s^2 = \frac{R^2}{x^2}(d x^2 + d x_1^2 + \ldots + d x_n^2)$$

dove le x sono legate dalla relazione

$$x^2 + x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = a^2$$

essendo a una costante; e l'elemento lineare per ogni spazio a curvatura costante positiva $+\frac{1}{R^2}$, *può essere rappresentato dalla formola*

$$d s^2 = \frac{R^2}{x^2}(d x_1^2 + d x_2^2 + \ldots + d x_n^2 - d x^2)$$

dove le x sono legate dalla relazione

$$x^2 = a^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2.$$

Una proprietà importante degli spazi Riemanniani a curvatura costante è la seguente:

Scegliendo opportunamente in essi il sistema di coordinate (propriamente scegliendo quel medesimo sistema per cui l'elemento lineare diventa della forma ultimamente indicata) le linee geodetiche restano espresse con equazioni LINEARI *(teor. di* BELTRAMI, *Ann. di mat.,* II); *e, viceversa, se in uno*

spazio si verifica quest' ultima proprietà per una speciale scelta del sistema di coordinate, lo spazio è a curvatura costante nel senso di Riemann (Schlaefli, *Ann. di mat.*, V; Beltrami, *Id. Id.*) v. anche Cap. XVI, § 11, pag. 701.)

In uno spazio a curvatura costante negativa, due punti individuano una geodetica, E CIÒ SENZA ECCEZIONE, *e due geodetiche passanti per un punto non hanno altri punti comuni; invece negli spazi a curvatura costante positiva*, PUÒ AVVENIRE *che due geodetiche passanti per un punto si incontrino ancora in un altro punto* (si ricordi a tal proposito il caso della sfera ordinaria); non è però detto che per tutti gli spazi a curvatura costante positiva questo teorema si verifichi (osservazione di Klein), v. Cap. XXI, § 2.

L' elemento lineare di uno spazio a curvatura costante positiva $\frac{1}{R^2}$ *può porsi sotto la forma* (Bianchi, *Lincei Rend.*, VII, 1898, pag. 155).

$$ds^2 = R^2 [d x_1{}^2 + \operatorname{sen}^2 x_1 \, d x_2{}^2 + \operatorname{sen}^2 x_1 \operatorname{sen}^2 x_2 \, d x_3{}^2 + \ldots + \operatorname{sen}^2 x_1 \ldots \operatorname{sen}^2 x_{n-1} \, d x_n{}^2],$$

e quello di uno spazio a curvatura costante negativa $-\frac{1}{R^2}$ *può porsi sotto ciascuna delle tre forme seguenti* (Bianchi) (v. Cap. XVI, § 11):

$$d s^2 = d x_1{}^2 + \cosh^2 \left(\frac{x_1}{R} \right) \sum_{i,k}^{2 \ldots n} b_{ik} \, d x_i \, d x_k$$

(tipo iperbolico)

$$d s^2 = d x_1^2 + e^{\frac{2x_1}{R}} \sum_{i,k}^{2\ldots n} b_{ik}\, d x_i\, d x_k$$

(tipo parabolico),

$$d s^2 = d x_1^2 + \operatorname{senh}^2 \left(\frac{x_1}{R}\right) \sum_{i,k}^{2\ldots n} b_{ik}\, d x_i\, d x_k$$

(tipo ellittico).

Un'altro dei più semplici sistemi di coordinate per gli spazi a curvatura costante è quello cosiddetto di WEIERSTRASS sebbene si trovi già sin nell'antica Memoria di BELTRAMI del 1868, e che dà all'elemento lineare le seguenti forme:

$$d s^2 = R^2 \left(\sum_i d y^2_i - d y^2\right)$$

con

$$y^2 - \sum_i y^2_i = 1$$

per gli spazi a curvatura costante negativa $-\frac{1}{R^2}$.

$$d s^2 = R^2 \left(d y^2 + \sum_i d y^2_i\right)$$

con

$$y^2 + \sum_i y^2_i = 1$$

per gli spazi a curvatura costante positiva $\frac{1}{R^2}$.

Tale sistema di coordinate si ricava da quello già indicato e che ha la proprietà rimarchevole di far prendere forma lineare alle equazioni delle geodetiche, ponendo

$$\frac{a}{x} = y, \qquad \frac{x_i}{x} = y_i\,.$$

Per le forme che fanno passare da questo si-

stema a quello di RIEMANN v. BIANCHI (*Ann. di mat.*, 3.ª s., II, pag. 102).

Le relazioni che devono verificarsi perchè uno spazio a tre dimensioni sia di curvatura K costante nel senso di Riemann sono sei (v. § 2), *e, ponendo l'elemento lineare dello spazio sotto la forma*

$$ds^2 = H_1 dx_1^2 + H_2 dx_2^2 + H_3 dx_3^2,$$

tali condizioni sono (per i, j, k ≡ 1, 2, 3):

$$\frac{\partial^2 H_i}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{1}{H_k}\frac{\partial H_k}{\partial x_j}\frac{\partial H_i}{\partial x_k} + \frac{1}{H_j}\frac{\partial H_j}{\partial x_k}\frac{\partial H_i}{\partial x_j}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{H_i}\frac{\partial H_k}{\partial x_i}\right) + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{1}{H_k}\frac{\partial H_i}{\partial x_k}\right) +$$

$$+ \frac{1}{H_j^2}\frac{\partial H_i}{\partial x_j}\frac{\partial H_k}{\partial x_j} = - K H_i H_j ,$$

(v. SOUVOROF, *Bull. de Darboux*, IV, pag. 192).

Per $K = 0$ si hanno le formole di LAMÈ (vedi Cap. XVI, § 14, pag. 720) che danno le condizioni perchè lo spazio sia lineare.

Il concetto di curvatura di uno spazio nel senso sopraindicato si deve a RIEMANN nell'opera postuma *Ueber die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen*, cui successero il lavoro di BELTRAMI già citato (*Ann. di mat.*, II) sugli spazi a curvatura costante, e quelli altri anche citati di SCHLAEFLI, e di BELTRAMI stesso (*Ann. di mat.*, V).

Nei lavori di LIPSCHITZ, VOSS, ecc. citati al § 2, estendendo in altro senso il concetto di cur-

vatura di GAUSS per una varietà immersa in uno spazio superiore, si recò anche un notevole contributo alla teoria Riemanniana della curvatura; in essi si trova anche una formola che dà la curvatura di Riemann espressa mediante i coefficienti della forma differenziale quadratica fondamentale.

Uno spazio a curvatura di Riemann costante ha, come abbiamo detto, infiniti movimenti in sè stesso; *esso è propriamente applicabile su se stesso in* $\infty^{\frac{n(n+1)}{2}}$ *modi, se n è il numero delle sue dimensioni.*

Si presenta la ricerca di studiare la natura di quegli altri spazi i quali non ammettendo altrettante trasformazioni in se stessi, ne ammettono però ∞^r dove r sia minore di $\frac{n(n+1)}{2}$. Per es. nello spazio ordinario, oltre la sfera che ammette ∞^3 movimenti in se stessa, vi sono le superficie di rotazione che ne ammettono ∞^1, ecc.

Di questo problema si occuparono LIE (*Th. der Transf.*, I, pag. 310, III, pag. 575), KILLING (*Crelle*, CIX, pag. 121) e in modo completo per il caso di $n=3$, BIANCHI (*Mem. della Soc. ital. delle scienze*, XI_3, pag. 267 (1897)).

§ 4. — Altra estensione del concetto di curvatura per una varietà o spazio a più che 2 dimensioni, immerso in uno spazio superiore.

L'estensione data da Riemann al concetto di curvatura per uno spazio superiore riesce importante ed è stata specialmente utilizzata per il caso in cui tale *curvatura Riemanniana* sia dappertutto costante. In altro caso si ha un'estensione della *curvatura Gaussiana*, la quale ha sopratutto l'inconveniente di non avere un solo valore per ogni punto dello spazio o varietà, ma tanti valori per quante sono le $\frac{n(n-1)}{2}$ orientazioni superficiali appartenenti a quel punto.

Si presenta quindi la opportunità di estendere in altro senso il concetto di *curvatura*.

Consideriamo uno spazio o varietà M_{n-1} a $n-1$ dimensioni immersa in uno spazio *qualunque* M_n ad n dimensioni. Come nel caso delle superficie immerse in uno spazio lineare, consideriamo le rette tangenti alla superficie in un punto, così nel caso generale consideriamo le *geodetiche* di M_n tangenti alla M_{n-1} in un punto P.

Per le superficie ordinarie, le direzioni delle *linee di curvatura* si possono considerare come le bisettrici delle direzioni delle linee assintotiche, cioè come gli assi della conica avente per assintoti tali ultime direzioni (v. Cap. XVI, § 9); similmente

in generale, in luogo delle tangenti alle linee assintotiche consideriamo *le geodetiche di M_n osculatrici (con un contatto tripunto) alla M_{n-1} nel punto P,* e queste formano una varietà quadratica i cui $(n-1)$ assi sono da considerarsi a buon diritto come le direzioni *delle linee di curvatura*; *tali assi sono a due a due fra loro perpendicolari, e le loro lunghezze, precisamente come si verifica nel caso ordinario della indicatrice di Dupin per le superficie, rappresentano i raggi di curvatura delle sezioni normali alla varietà M_{n-1} prese nelle direzioni stesse di quelle linee di curvatura (raggi principali); essi corrispondono precisamente a massimi e minimi per i raggi di curvatura di tutte le infinite sezioni normali.*

L'inversa del prodotto di tali raggi di curvatura principali la chiamiano *la curvatura totale della varietà nel punto considerato.*

I precedenti concetti derivano da considerazioni sviluppate da Lipschitz e Voss (*Op. cit.* al § 2), i quali si fondano sulla teoria delle forme differenziali quadratiche.

Kronecker (*Berl. Berich.*, 1869, pag. 170, 695) e Beez *Zeitsch. f. Math.*, XXI, XXIV, *Math. Ann.*, VII) hanno cercato invece di prendere le mosse da un altro ordine di idee, che del resto si presenta assai naturale.

Limitiamoci per semplicità al caso in cui la varietà M_{n-1} sia immersa in uno spazio LINEARE, S_n, e consideriamo in questo una varietà sferica, ad $n-1$ dimensioni, di raggio 1, cioè la varietà rappresentata dall'equazione

$$f = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 - 1 = 0,$$

mentre la varietà data sia rappresentata dalla equazione

$$F(x_1 \dots x_n) = 0.$$

Facciamo corrispondere ogni punto di F ad ogni punto di f, imitando ciò che si fa ordinariamente per la rappresentazione sferica delle superficie (v. Cap. XVI, § 8), cioè facendo corrispondere i punti in cui le *rette normali* sono parallele. Consideriamo il volume di un elemento infinitesimale della varietà attorno ad un punto P, e dell'elemento corrispondente della sfera; il limite del rapporto fra questo e quello della varietà è la *curvatura di Gauss* della varietà nel punto P; *essa è l'inversa del prodotto dei raggi principali di curvatura, come nelle considerazioni precedenti.*

L'espressione della curvatura K è

$$K = -\frac{1}{S^{n+1}} \begin{vmatrix} 0 & F_1 & F_2 & \dots & F_n \\ F_1 & F_{11} & F_{12} & \dots & F_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_n & F_{n1} & F_{n2} & \dots & F_{nn} \end{vmatrix}$$

dove le F_i F_{ij} sono le derivate prime e seconde di F, ed S è

$$S = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_n^2}.$$

Per l'espressione di K vedi anche Ricci (*Ann. di mat.*, XII, pag. 165, e per $n = 4$ Souvorof (*Bull. de Darboux*, IV, pag. 186).

Chiamando in generale *varietà M_{n-1} piane o sferiche* quelle appartenenti ad un M_n e tali che

in ogni punto gli $(n-1)$ raggi principali di curvatura sono tutti eguali rispett. a ∞ o ad una medesima quantità finita, la quale si mantiene anche la stessa quando da un punto della varietà si passa ad un altro, si ha che:

In uno spazio M_n qualunque non esistono in generale varietà piane e sferiche; se i coefficienti dell'elemento lineare di M_n soddisfanno a certe condizioni, allora M_n contiene ∞^n piani o sfere (di dato raggio); nel caso in cui M_n contiene ∞^n piani, in esso non possono però esistervi varietà tali che i raggi principali di curvatura pur essendo per ciascun punto tutti fra loro eguali, sieno variabili però da punto a punto della varietà (v. Voss, *Math. Ann.*, XVI, pag. 157). Ciò è identico a ciò che si verifica nello spazio ordinario in cui, oltre le sfere, non esistono altre superficie di cui ogni punto sia un ombelico.

In uno spazio a curvatura costante di Riemann (v. § 3) *esistono varietà le quali in ogni punto hanno i loro raggi principali di curvatura tutti fra loro eguali, ma variabili da punto a punto* (Voss, pag. 160).

Se la curvatura totale è zero per ogni punto di una varietà, questa ha la proprietà che da ogni suo punto esce una linea geodetica di M_n, avente con essa un contatto quadripunto. Adoperando le denominazioni in uso per le superficie si potrebbe dire che ogni punto è un *punto parabolico* (v. Capit. XVI, § 9).

Quando la *curvatura totale* è zero e propriamente $n-2$ dei raggi principali di curvatura sono ∞ per ogni punto della varietà di $n-1$

dimensioni, questa si dirà, per analogia colle superficie dello spazio ordinario, *una sviluppabile*, giacchè allora essa è generata da una geodetica dello spazio M_n in modo analogo a quello col quale una sviluppabile è generata da una retta dello spazio ordinario.

Un altro teorema affine a quelli anzidetti è il teorema di A. Brill (*Math. Ann.*, XXVI, pagina 302):

Una varietà pseudosferica (a curvatura di Riemann costante negativa) a tre dimensioni non può esistere reale in uno spazio lineare a 4 dimensioni, ma solo in uno spazio lineare a 5 dimensioni.

Terminando questo paragrafo ricorderemo che sono state fatte estensioni alle varietà superiori di altri dei concetti e teoremi della teoria delle superficie.

L'estensione delle *formole di Codazzi* porta ad un sistema di $\frac{1}{6} n(n-1)(5n-1)$ formole per una varietà ad n dimensioni immersa in uno spazio lineare; per l'estensione del *teorema di Eulero* v. Jordan (*Compt. Rend.*, LXXIX, 1874, p. 912), e per l'estensione del *teorema di Dupin* vedi Lie [*Gött. Nach.*, 1871) e Klein (*Math. Ann.*, V); v. poi anche Cesàro, *Geom. intrinseca.* Un'esposizione della Geometria differenziale degli spazi superiori si trova in Killing, *Die Nicht-Euclid. Raumf.* Leipzig, 1885.

§ 6. — La Geometria differenziale delle varietà a due dimensioni (superficie) immerse negli spazi a curvatura costante di Riemann.

In alcuni lavori recenti, specialmente di Bianchi, si cerca di estendere la ordinaria geometria differenziale delle superficie al caso in cui queste sieno immerse in spazi a tre dimensioni *a curvatura costante*.

Prendiamo l'elemento dello spazio a tre dimensioni a curvatura costante positiva $\frac{1}{R^2}$, o negativa $-\frac{1}{R^2}$, sotto le forme rispett. (v. § 3)

$$ds^2 = R^2 (\pm\, dx_1 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)$$

essendo le x legate dalla relazione

$$x^2 \pm x_1^2 \pm x_2^2 \pm x_3^2 = 1.$$

dove i segni superiori valgono per lo spazio ellittico, e gli inferiori per lo spazio iperbolico.

Ad ogni superficie in tale spazio appartengono le solite due forme differenziali quadratiche, coi coefficienti E, F, G, D, D', D'', fra cui sussistono le tre relazioni di cui le due prime sono le stesse *formole di* Codazzi (v. pag. 669-670), e la terza di Gauss resta modificata invece nel seguente modo:

$$\frac{D\,D'' - D'^2}{E\,G - F^2} = k - K$$

dinotando K la curvatura dello spazio, e k la *curvatura assoluta* della superficie (quella che conviene alla prima forma differenziale fondamentale).

Il primo membro di tale ultima relazione si dirà la *curvatura relativa* della superficie, ed essa è eguale all' inversa del prodotto dei due *raggi principali* RIDOTTI di curvatura r_1, r_2.

Il BIANCHI ha studiato negli spazi a curvatura costante le *superficie a curvatura assoluta nulla* (*Acc. Torino*, 1895; *Ann. di mat.*, $XXIV_2$, II_3); a queste appartiene la *superficie di* CLIFFORD (v. KLEIN, *Math. Ann.*, XXXVII; KILLING, *Id.*, XXXIX); le *superficie minime* (*Rend. Lincei*, 1888; *Ann. di mat.*, II_3): di queste si occuparono anche LIPSCHITZ (*Crelle*, LXXVIII) e CAYLEY (*Compt. Rend.*, CXI, 1890); le superficie del tipo di Liouville, quelle per le quali è $\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}=2$, ovvero $r_1+r_2=0$, ecc. (v. lavori citati ; lo stesso autore si è occupato poi anche dei sistemi di WEINGARTEN (v. Cap. XVI, § 14) negli spazi a curvatura costante (*Mem. Lincei*, IV_4, 1887).

Per la determinazione dei volumi negli spazi a curvatura costante v. SIMON (*Math. Ann.*, XLII), D'OVIDIO (*Acc. Torino*, 1893), LORIA (*Giorn. di Batt.*, XXVI), e per altri lavori riguardanti bensì i medesimi spazi, ma non specialmente la geometria *infinitesimale* di essi, rimandiamo al Cap. seguente.

Ricorderemo infine che *la divisione regolare di uno spazio non euclideo o pseudosferico in poliedri congruenti* porta al problema dei gruppi discontinui di sostituzioni lineari di una variabile (POINCARÈ) v. *Repert.* I, Cap. XIV, § 2. Per tali studi vedi BIANCHI, *Math. Ann.,* XXXVIII, XL, XLII, e *Rend. Lincei*, 1893.

CAPITOLO XXI.

La Geometria assoluta, e specialmente la geometria non euclidea nel piano e nello spazio.

§ 1. — Cenno storico sulla Geometria non euclidea.

Tutta la metrica della Geometria euclidea è fondata su di un' ipotesi la quale *logicamente* non ha nessuna ragione per essere preferita ad altre ipotesi consimili, e l'unica sua ragione di preferenza deriva da un accertamento probabile dei nostri sensi.

Tale ipotesi è in fondo quella che fa capo al celebre *postulato V* o *postulato delle parallele* degli elementi di Euclide. *

Numerosissimi sono stati in vari tempi i tentativi per dimostrare il postulato o per sostituirlo

---

* Una volta tale postulato era chiamato *Assioma* XI, ma ciò era dovuto ad un errore dei copisti che ci avevano tramandato il testo greco.

con altri; per diffuse e particolareggiate notizie su ciò rimandiamo all'opera di ENGEL e STAECKEL, *Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss* (Leipzig, 1895). Fra tali tentativi sono notissime le considerazioni di LEGENDRE contenute nelle prime due edizioni dei suoi *Elementi di Geometria* (1794) (v. anche le *Mém. de Paris*, 1833 e la *Planimetria di* BALTZER), sono degni di nota quelli anteriori di GIROLAMO SACCHERI (*Euclides ab omni naevo vindicatus etc.* Milano, 1733) su cui il BELTRAMI ha da poco tempo richiamato l'attenzione dei matematici (*Lincei Rend.*, 1889), e quelli di LAMBERT (1766) (v. l'opera di ENGEL-STAECKEL succit.).

Sembra che GAUSS possedesse già il modo di risolvere la quistione (v. ENGEL-STAECKEL, op. cit. e *Math. Ann.*, XLIX, pag. 149, e *Bull. de Darboux*, 1897, pag. 206) ma furono LOBATSCHEWSKY e GIOVANNI BOLYAI figlio di WOLFANGO, i primi che esposero in apposite Memorie idee nuove e originali sulla vera natura della teoria generale delle parallele, assumendo per principio fondamentale che il postulato *V* non è una verità che possa dedursi logicamente dalle altre, ma ne è indipendente. Le opere di LOBATSCHEWSKY su questo soggetto sono: *Expositions des principes de la géometrie*, ecc. presentata all'Univers. di Kasan nel 1826; *Nuovi fondamenti di geometria* (*Atti dell'Univ. di Kasan*, 1835-38) (queste memorie sono tradotte in tedesco da ENGEL in un volume recentemente pubblicato dal TEUBNER, Leipzig, 1899); *Géometrie imaginaire* (*Crelle*, XVII); *Geom. Untersuch.* ecc. (Berlin, 1840); *Pangéometrie* (Ka-

san, 1855; v. la traduzione italiana fattane da BATTAGLINI in *Giorn. di Batt.*, V, pag. 273); e l'opera di G. BOLYAI è intitolata *Appendix scientiam spatii absolute vera exibens*, ecc. e comparve come appendice all'opera di WOLFANGO BOLYAI intitolata *Tentamen*, ecc. (1832); una traduzione italiana di quell'opuscolo fu fatta da BATTAGLINI (*Giorn. di Batt.*, VI).

La teoria che così venne a stabilirsi fu chiamata *Geometria assoluta*, *Geometria immaginaria*, *Geometria astratta*, *Pangeometria*, *Metageometria*, o anche più impropriamente *Geometria non euclidea*.

Con essa si viene a stabilire una Geometria generale nella quale non si presuppone necessariamente il postulato di Euclide, e che contiene la geometria euclidea come caso particolare.

Si noti però che colla denominazione di *Geometria non-euclidea* si designa quella parte della *Geometria assoluta* da cui si esclude il caso particolare della euclidea; la *Geometria assoluta* resta così divisa in due parti *euclidea*, e *non euclidea*.

Notiamo però che il LOBATSCHEWSKY assumendo sempre il postulato della retta *infinita*, non giunse che ad una sola delle due geometrie non euclidee (la cosidetta geometria iperbolica, v. § 2).

Nelle formole della Geometria assoluta compare una costante indeterminata, il cui valore caratterizza lo spazio nel quale immaginiamo esistenti gli enti geometrici, nello stesso modo che uno spazio Riemanniano a curvatura costante è caratterizzato dal valore della curvatura; il valore di *tale costante indeterminata non può essere dato che* DALL'ESPERIENZA.

In tal maniera il postulato d'Euclide o altro consimile non può presentarsi che *come un dato sperimentale che si verifica esatto nei limiti delle nostre osservazioni.*

Alla piena intelligenza e al consolidamento della nuova scienza contribuirono in due sensi diversi le idee di RIEMANN sugli spazi a curvatura costante (v. Cap. XX), e quelle di CAYLEY (*Phil. Trans.*, 1859), sul modo di definire *proiettivamente* le proprietà metriche delle figure. I vantaggi che dalla teoria delle superficie e degli spazi a curvatura costante nel senso Riemanniano, si poteano trarre per la geometria non euclidea furono scoperti per la prima volta da BELTRAMI (*Saggio d'interpretazione della Geometria euclidea*, *Giorn. di Batt.*, VI, 1868, *Ann. di mat.*, II), e le relazioni fra le ricerche di CAYLEY e i concetti della geometria assoluta furono trovate da KLEIN (*Math. Ann.*, IV, VI). Fu con questi riavvicinamenti che restò dimostrata rigorosamente la impossibilità di dedurre logicamente il postulato *V*, ciò che in fondo Lobatschewsky e Bolyai aveano ammesso senza dimostrare.

Altri lavori speciali di Geometria assoluta furono quelli di CAYLEY (*Math. Ann.*, V), STORY (*Americ. J.*, IV, V), SIMON (*Crelle*, CIX), i quali estesero le formole di trigonometria, di BATTAGLINI (*Giorn. di Batt.*, XII, XVI), altri numerosi di D'OVIDIO (*Mem. Lincei*, 1875-76, *Atti Torino*, 1891-93), ecc.

Fra le principali esposizioni della Geometria non euclidea citeremo FRISCHAUF (Leipzig, 1875), KILLING (Leipzig, 1885), MANSION (Paris, 1893;

Mathesis, 1895), cui può aggiungersi un corso di lezioni (litogr. (1889-90)) di KLEIN.

Altre trattazioni originali della Geometria non euclidea si devono a DE TILLY (*Recherches sur les éléments de Géometrie*, Bruxelles, 1860; *Essai sur les principes fond.*, ecc. *Mém. de Bordeaux*, III_2, 1877; *Essai de géom. anal. génér. Mém. de Belg.*, 1892) e a FLYE S. MARIE (*Études anal.* ecc. Paris, 1871).

Di argomento più generale trattano i *Fondamenti di Geometria* del VERONESE e gli altri lavori già citati, insieme a questo, al Cap. XIX, § 1; l'appendice alla fine dell'opera del VERONESE contiene estese e minuziose notizie storico-critiche sul soggetto; v. anche un articolo di MANSION nella *Revue des Quest. scient.*, 1895, in cui si dà conto anche dei lavori di DE TILLY.

§ 2. — IL POSTULATO V D'EUCLIDE. I RISULTATI OTTENUTI SINO A LOBATSCHEWSKY E BOLYAI. LE TRE GEOMETRIE DAL PUNTO DI VISTA ELEMENTARE.

Il postulato V d'EUCLIDE è il seguente:

Se gli angoli interni da una stessa parte che una retta fa con due altre che essa incontra, sono tali che la loro somma è minore di due angoli retti, le due rette prolungate si incontrano da quella stessa parte.

Notiamo poi ancora gli altri postulati euclidei: *

Post. I. — *Dati due punti si possono sempre congiungere con una retta.*

Post. II. — *Una linea retta si può prolungare.*

Post. III. — *Dato un centro qualunque e un raggio qualunque si possa sempre descrivere un cerchio.*

Post. IV. — *Tutti gli angoli retti sono eguali fra loro.*

Post. VI. — *Due rette non comprendono fra esse spazio finito.*

I tre primi sono *postulati di costruzione.*

Gli sforzi fatti per dimostrare il postulato V, condussero a sostituire quel postulato con altri.

WALLIS nel 1693 in due note relative agli *Elementi di Geometria* (v. STAECKEL-ENGEL, cit.) vi sostituì l'altro:

Esistono triangoli simili; questo postulato è del resto *troppo* esteso e può essere sostituito da quest'altro (osservazione fatta da SACCHERI):

Esistono due triangoli equiangoli e non equivalenti.

Un altro postulato che si può sostituire a quello di EUCLIDE è quello adoperato da LEGENDRE:

a) Da un punto fuori di una retta si può condurre a questa una sola parallela, il che corri-

---

* Poniamo accanto a questi postulati il numero d'ordine che essi hanno ordinariamente nelle edizioni di Euclide; v. p. es. la importante edizione fatta da HEIBERG (1883-88). Per notizie critiche sui postulati v. P. TANNERY (*Bull. de Darboux*, V_2, $VIII_2$). Vedi poi anche un articolo di MANSION (*Soc. scient. de Bruxelles*, XIV, 1889-90).

sponde a supporre che *esiste un sol punto all' infinito sulla retta.*

Proposizioni equivalenti al postulato d'EUCLIDE sono anche:

b) La somma dei tre angoli di un triangolo è eguale a due angoli retti.

c) In un quadrilatero di cui due angoli sono retti, e due lati opposti adiacenti agli angoli retti sono eguali, i due altri angoli sono retti (postulato assunto da SACCHERI).

d) In un quadrilatero trirettangolo, il quarto angolo è retto (postulato assunto da LAMBERT e che è poco diverso dal precedente).

Le ipotesi per le quali si ammette che tali angoli sieno *ottusi* o *acuti*, le chiameremo, per brevità, *ipotesi dell'angolo ottuso* e *ipotesi dell'angolo acuto di* SACCHERI o di LAMBERT.

Indipendentemente dalla ammissione del postulato, si hanno i seguenti teoremi:

Se si ammette l'esistenza di un triangolo pel quale la somma degli angoli è eguale a due angoli retti lo stesso dovrà verificarsi in ogni altro triangolo (LEGENDRE).

Ammettendo che la retta abbia punti all' infinito, la somma dei tre angoli di un triangolo non può superare due angoli retti (LEGENDRE).

Nella stessa ipotesi non si può ammettere l'ipotesi dell'angolo ottuso di Saccheri, o di Lambert.

Se il postulato di Saccheri o di Lambert è vero in un caso, è vero sempre.

Se l'ipotesi dell'angolo acuto o ottuso di Saccheri o di Lambert è vera in un caso, è vera sempre.

Secondochè la somma dei tre angoli di un triangolo è minore, eguale o maggiore di due retti, è vera la ipotesi dell'angolo acuto di Saccheri, quella dell'angolo retto, quella dell'angolo ottuso (SACCHERI).

Nell' ipotesi in cui la somma degli angoli di un triangolo è minore di due retti, due rette o si incontrano, o sono assintoti l'una dell'altra (si avvicinano indefinitamente senza mai incontrarsi) o hanno una perpendicolare comune a partire dalla quale esse divergono (teor. di SACCHERI).

Nella stessa ipotesi l'area del triangolo è proporzionale al deficit angolare, dando questo nome alla differenza fra due angoli retti e la somma dei tre angoli (teor. di LAMBERT).

Ammettendo che per un punto situato nell' interno di un angolo di un triangolo si possa condurre una retta che intersechi entrambi i lati, si deduce che la somma dei tre angoli non è minore di due retti (LEGENDRE, v. anche BALTZER, *Leipz. Berichte*, 1870; *Crelle*, LXXIII, pag. 372).

Dai teoremi precedenti si delinea nettamente la divisione della Geometria generale in tre principali specie, e cioè:

I. *Geometria detta di Lobatschewsky o iperbolica.* La retta è indefinita ovvero aperta.

Non vale il postulato V, ma vale il postulato VI.

La somma degli angoli di un triangolo è minore di due retti.

Questa geometria corrisponde all' ipotesi dell'angolo acuto di Saccheri o di Lambert.

Da un punto possono condursi *due* parallele ad una retta data. In questa geometria si immagina che la retta abbia *due* punti all'infinito.

Chiamando al solito a, b, c, A, B, C i lati e gli angoli di un triangolo valgono le seguenti relazioni trigonometriche:

$$\operatorname{sen}\frac{b}{R}\operatorname{sen}C = \operatorname{sen}\frac{c}{R}\operatorname{sen}B \qquad \textit{(teor. del seno)}$$

$$\operatorname{sen}\frac{c}{R}\cos A + \operatorname{sen}\frac{a}{R}\cos\frac{b}{R}\cos C = \operatorname{sen}\frac{b}{R}\cos\frac{a}{R}$$

$$\cos\frac{a}{R} = \cos\frac{b}{R}\cos\frac{c}{R} + \operatorname{sen}\frac{b}{R}\operatorname{sen}\frac{c}{R}\cos A \qquad \textit{(teor. del coseno)}$$

$$\cos A + \cos B\cos C = \operatorname{sen}B\operatorname{sen}C\cos\frac{a}{R}$$

$$\operatorname{sen}C\operatorname{sen}A = \operatorname{sen}B\cos\frac{a}{R} - \cos C\operatorname{sen}A\cos\frac{b}{R}$$

dove R è una quantità costante ed *immaginaria pura*; potrebbero quindi sostituirsi al modo solito in queste formole le funzioni circolari colle funzioni iperboliche.

La terza di queste relazioni era stata pubblicata nel 1825 da Taurinus che si occupò quasi contemporaneamente a Lobatschewsky dei principi della Geometria (v. il citato libro di Engel-Staeckel).

Lambert sin dal 1766 avea osservato che la geometria derivante da tale ipotesi, cioè da quella dell'angolo acuto, si potea interpretare su di *una sfera di raggio immaginario;* le precedenti for-

mole trigonometriche mostrano la legittimità di questo riavvicinamento.

Nella geometria di Lobatschewsky le curve i cui punti hanno distanze eguali da una retta fissa *(curva delle distanze eguali)* hanno le proprietà:

1. *Le loro normali sono tutte perpendicolari alla retta, e reciprocamente.*

2. *Ogni retta che incontra la curva in due punti, fa angoli eguali in questi, colla curva stessa.*

3. *Le due tangenti condotte da un punto alla curva sono di egual lunghezza.*

Una di tali curve e avente inoltre la proprietà che le sue normali sieno tutte parallele si dice un *oriciclo*, ovvero una *curva limite di* Lobatschewsky.

Un oriciclo è come un cerchio il cui centro è all' infinito.

Nello spazio iperbolico a tre dimensioni si avrà similmente una *orisfera*, o *una superficie limite di* Lobatschewsky; tali superficie corrispondono a quelle indicate con F da G. Bolyai.

II. *Geometria Euclidea, o parabolica.* La retta è indefinita ovvero aperta.

Valgono i postulati V e VI.

La somma degli angoli di un triangolo è eguale a due retti.

Questa geometria corrisponde all' ipotesi dell' angolo retto di Saccheri o di Lambert.

Da un punto può condursi *una sola* parallela ad una retta data. La retta ha *un sol* punto all' infinito.

Valgono le formole trigonometriche indicate di

sopra quando però in esse si suppone $\frac{1}{R} = 0$ cioè $R = \infty$, e quindi in luogo di

$$R \operatorname{sen} \frac{a}{R} \quad \text{si sostituisce} \quad a$$

e in luogo di

$$\cos \frac{a}{R} \quad \text{si sostituisce} \quad 1.$$

III. *Geometria detta di Riemann*, o *ellittica*. La retta è chiusa ed è finita.

Non vale il postulato V e non vale neanche più il postulato VI.

La somma degli angoli di un triangolo è maggiore di due retti.

Questa geometria corrisponde all'ipotesi dell'angolo ottuso di SACCHERI o di LAMBERT.

Da un punto non può condursi alcuna parallela ad una retta; la retta non ha alcun punto all'infinito.

Le formole trigonometriche sono le stesse delle precedenti, ma in esse però bisogna immaginare R una quantità essenzialmente reale positiva.

Questa geometria può suddividersi, come ha osservato per la prima volta il KLEIN, nel seguente modo:

Colle formole trigonometriche si trova che se due rette si incontrano in un punto, si incontrano ancora ad una distanza $R\pi$ dal primo punto, e inoltre che partendo su di una retta da un punto, dopo un cammino lungo *al più* $2R\pi$ si torna certamente al punto di partenza. Con questi principi sono allora possibili due ipotesi, e cioè:

a) che percorrendo una retta si torni per la prima volta al punto di partenza dopo un cammino eguale semplicemente a $R\pi$; allora il secondo punto in cui si incontrano due rette è il medesimo del primo, e quindi sussiste il teorema che: *due rette si incontrano in un sol punto e per due punti passa una sola retta. La lunghezza della retta è allora eguale solo ad* $R\pi$; la Geometria ricavata da questa ipotesi si può chiamare *Geometria Riemanniana semplice*, o *Geometria ellittica semplice* (Klein).

In tale Geometria la massima distanza di due punti è $\frac{1}{2} R\pi$; *e, dato un punto, tutti quelli distanti da esso di* $\frac{1}{2} R\pi$ *formano una retta.*

Il piano in tale Geometria non è diviso in due parti da una sua retta.

b) che percorrendo una retta, si torni per la prima volta al punto di partenza dopo un cammino eguale a $2R\pi$; *allora due rette si incontrano sempre in due punti, ed esistono coppie di punti per cui passano infinite rette.*

La lunghezza di ogni retta è allora eguale a $2R\pi$; la Geometria ricavata da tale seconda ipotesi si può chiamare *Geometria Riemanniana o ellittica doppia* (Klein).

La massima distanza fra due punti è $R\pi$; *e, dato un punto, non vi è che un solo punto distante da esso di* $R\pi$.

Esiste sempre una perpendicolare comune a due rette date.

Il piano è spezzato da ogni sua retta o in generale da ogni sua linea chiusa.

Ogni circolo ha DUE *centri.*

Questa speciale Geometria Riemanniana è simile alla Geometria sferica, e può interpretarsi su di una sfera.

Interpretando la Geometria ellittica su di una superficie a curvatura positiva costante, la doppia distinzione di questa Geometria ha anche rapporto colla doppia ipotesi che può farsi sulla *bilateralità o unilateralità* della superficie stessa (v. Cap. XVIII, § 1, pag. 787).

Questa doppia distinzione della Geometria Riemanniana sfuggì ad alcuni, p. es. a BELTRAMI; essa fu trovata da KLEIN (v. *Math. Ann.*, IV, pag. 604, nota, e VI, pag. 125). V. anche NEWCOMB (*Crelle*, LXXXIII), e KILLING *(cit.)* il quale ultimo Autore chiama *Polarform des Riemannschen Raumes* lo *spazio ellittico semplice.* Si può anche riscontrare il volume I delle citate *litogr.* lezioni di KLEIN, pag. 243, 293.

Osserviamo che il postulato IV vale per tutte tre le geometrie; esso corrisponde in certo modo al postulato dell'*invariabilità delle figure* senza di cui non può costruirsi alcun sistema geometrico (v. DE TILLY, *Essai sur les principes fondam.*, etc. Bordeaux, 1879, pag. 18); nello stesso modo i postulati di costruzione I, II, III valgono per tutte le geometrie.

Terminando questo paragrafo osserveremo che DE TILLY nei lavori cit. al paragrafo precedente e specialmente in quello del 1893, ha fondato le

tre geometrie partendo dal solo concetto di distanza, nozione considerata come primitiva, ed escludendo gli angoli. Già il FOURIER avea avuto l'idea di fondare sul concetto di distanza tutta la geometria euclidea (v. il passo di FOURIER riprodotto in *Mathesis*, IX, pag. 139-141, 1889). Il DE TILLY per caratterizzare le tre geometrie ricorse alla relazione, fra le distanze di 4 punti nel piano e alle distanze di 5 punti nello spazio, che fu indicata da LAGRANGE e studiata da CAYLEY, ed estesa poi da SCHERING agli spazi non euclidei (v. pag. 29 e 50 e le citazioni contenute a p. 50, e su tale relazione egli stabilì i fondamenti delle tre geometrie. Dagli stessi principi l'autore ricavò anche una dimostrazione dell'impossibilità di dedurre *logicamente* il postulato d'Euclide, cosa che i primi cultori di Geometria assoluta non dimostrarono, ma che era già risultata come conseguenza dei lavori di BELTRAMI; inoltre l'autore dette una dimostrazione sommaria del teorema che *non esiste altro sistema di geometria oltre l'euclideo e i due non euclidei* (per la critica dei lavori di DE TILLY v. le pag. 592 e seg. del libro di VERONESE).

§ 3. — LE RELAZIONI METRICHE ORDINARIE SOTTO FORMA PROIETTIVA.

Prima di tutto notiamo che le relazioni metriche ordinarie possono porsi sotto forma proiettiva facendo intervenire nel piano i due punti ciclici

immaginari all'infinito, e nello spazio il cerchio immaginario all'infinito (v. pag. 137, 166).

Sieno $x_1\, x_2\, x_3$, $x'_1\, x'_2\, x'_3$ le coordinate omogenee di due punti P, P'; $\xi_1\, \xi_2\, \xi_3$, $\xi'_1\, \xi'_2\, \xi'_3$ quelle dei due punti ciclici del piano (v. pag. 41); *la distanza fra i due punti è espressa dalla formola*

$$r = R\, \frac{\sqrt{(x\, x'\, \xi)\, (x\, x'\, \xi')}}{(x\, \xi\, \xi')\, (x'\, \xi\, \xi')}$$

dove R è una costante che dipende dall'unità di misura.

Se si introduce l'unità di misura e si immaginano a, a' distanti fra loro della distanza 1, *la espressione proiettiva di r diventa*

$$r = \frac{\sqrt{(x\, x'\, \xi)\, (x\, x'\, \xi')}\, (a\, \xi\, \xi')\, (a'\, \xi\, \xi')}{\sqrt{(a\, a'\, \xi)\, (a\, a'\, \xi')}\, (x\, \xi\, \xi')\, (x'\, \xi\, \xi')}\,.$$

Passiamo ora all'*angolo* di due rette:

Sieno $u_x = 0$, $u'_x = 0$ le equazioni in coordinate omogenee delle due rette nel piano; *l'angolo di esse è dato dalle formole proiettive seguenti:*

$$\cos\omega = \frac{1}{2}\, \frac{u_\xi\, u'_{\xi'} + u'_\xi\, u_{\xi'}}{\sqrt{u_\xi\, u_{\xi'}\, u'_\xi\, u'_{\xi'}}}$$

$$\operatorname{sen}\omega = \frac{i}{2}\, \frac{u_\xi\, u'_{\xi'} - u'_\xi\, u_{\xi'}}{\sqrt{u_\xi\, u_{\xi'} \,.\, u'_\xi\, u'_{\xi'}}}\,.$$

È importante a questo proposito il *teorema di* LAGUERRE (*Nouv. Ann.*, XII, pag. 64 (1853), (da noi già enunciato a pag. 41):

L'angolo ω è dato dalla formola

$$\omega = \frac{i}{2} \log \frac{u_\xi \, . \, u'_{\xi'}}{u_{\xi'} \, . \, u'_\xi}.$$

cioè ω è eguale a $\frac{i}{2}$ moltiplicato per il logaritmo del rapporto anarmonico della quaterna formata dalle due rette e da quelle che vanno ai due punti ciclici.

Per trovare analoghe formole nello spazio si deve introdurre la considerazione del cerchio immaginario all'infinito.

Si voglia considerare la distanza dei punti di coordinate omogenee

$$x_1 \, x_2 \, x_3 \, x_4, \quad x'_1 \, x'_2 \, x'_3 \, x'_4.$$

Formiamo il *cono quadrico* che proietta da

$$y_1 \, y_2 \, y_3 \, y_4$$

dello spazio il cerchio immaginario all'infinito e sia $F(X, y) = 0$ l'equazione di tal cono, dove le X sono le coordinate correnti; sia poi $T(X) = 0$ l'equazione del piano che passa per il medesimo cerchio immaginario all'infinito; *allora la distanza fra i due punti nello spazio si esprimerà colla formola*:

$$r = R \frac{\sqrt{F(x, x')}}{T(x) \, T(x')}$$

dove R è al solito una costante dipendente dall'unità di misura, e che si può determinare come sopra.

Si abbiano due rette partenti da un punto (y); su una di esse sia situato il punto (x) e sull'altra il punto (x'); si indichi con $F_{x'}$, la polare di F col polo (x') e rispetto alle variabili (x), e con $\Phi_{x'}(x\, y) = 0$ l'equazione del piano tangente condotto per il punto (x') al cono di vertice (y).

L'angolo delle due rette è allora dato dalle formole

$$\cos \omega = \frac{F_{x'}(x, y)}{\sqrt{F(x, y)\, F(x'\, y)}}$$

$$\operatorname{sen} \omega = i \frac{\sqrt{\Phi_{x'}(x, y)}}{\sqrt{F(x, y)\, F(x'\, y)}}$$

e fra F e Φ sussiste la relazione

$$\Phi_{x'}(x, y) = F_{x'}^2(x\, y) - F(x\, y)\, F(x'\, y).$$

L'angolo di due piani è il prodotto di $\frac{i}{2}$ per il logaritmo del doppio rapporto della quaterna formata dai due piani, o dagli altri due passanti per il loro asse e tangenti al cerchio immaginario all'infinito.

Considerando il cerchio immaginario all'infinito come una quadrica-inviluppo degenere, i *tre assi principali di una quadrica qualunque sono tre spigoli del tetraedro autoconiugato* (v. pag. 163-193) *relativo alla quadrica data e alla quadrica degenere rappresentata dal cerchio immaginario all'infinito.*

Le quadriche confocali (pag. 188) *sono quelle iscritte in una medesima superficie sviluppabile contenente il cerchio immaginario all'infinito.*

§ 4. — L'ASSOLUTO DI CAYLEY. LA METRICA PROIETTIVA. INTERPRETAZIONE PROIETTIVA DELLE TRE GEOMETRIE.

La profonda idea di CAYLEY della quale ora tratteremo, fu da lui indicata nella 6.ª Memoria sulla teoria delle forme algebriche (*Phil. Trans.*, 1859) binarie e ternarie, e elegantemente utilizzata poi da KLEIN (*Math. Ann.*, IV, VI) per interpretare proiettivamente la geometria non euclidea.

(Forme di 1.ª specie.) Cominciamo dalle forme di 1.ª specie, cioè ad una sola dimensione.

Sulla retta immaginiamo stabilita una *coppia* di punti che chiameremo l'*assoluto della retta*. Se $x_1\, x_2$ sono le cordinate omogenee correnti di un punto della retta, la coppia di punti sarà rappresentata da una forma binaria quadratica in $x_1\, x_2$, che noi vogliamo indicare con Σ_{xx}; a questo assoluto riferiamo i rapporti metrici fra i punti della retta.

Dati due punti $x\, x'$, e chiamati $\xi\, \xi'$ i punti dell'*assoluto*, formiamo il doppio rapporto

$$D = \frac{(x\,\xi)\,(x'\,\xi')}{(x\,\xi')\,(x'\,\xi)}$$

e chiamiamo *distanza* dei due punti $x\, x'$ la espressione

$$r = R \log D$$

dove R è una costante arbitraria.

Indicando con $\Sigma_{xx'}$ *la polare di* Σ_{xx}, *di polo* x', *si ha*

$$r = R \frac{\Sigma_{xx'} + \sqrt{\Sigma^2_{xx'} - \Sigma_{xx}\Sigma_{x'x'}}}{\Sigma_{xx'} - \sqrt{\Sigma^2_{xx'} - \Sigma_{xx}\Sigma_{x'x'}}}.$$

La distanza r soddisfa alla relazione fondamentale (cui soddisfanno infatti le distanze su di una retta nel senso ordinario della parola):

$$r_{12} + r_{23} + r_{31} = 0$$

indicando con r_{ij} *la distanza fra i due punti* i, j.

Possiamo ora distinguere i tre casi:

I. I due punti $\xi\,\xi'$ sono distinti (cioè il discriminante di Σ è diverso da zero) e immaginari coniugati. In tal caso si ha la *Geometria iperbolica* sulla retta.

II. I due punti $\xi\,\xi'$ sono coincidenti. Si ha la *Geometria parabolica.*

III. I due punti $\xi\,\xi'$ sono reali. Si ha la *Geometria ellittica.*

Nella Geometria iperbolica i due punti $\xi\,\xi'$ *hanno una distanza infinita da qualunque altro punto; la retta ha allora due punti all'infinito.*

La definizione di distanza r nel caso della Geometria *parabolica* risulta sempre zero se R è diverso da ∞, ma risulta indeterminata se R si fa convergere a ∞.

Poniamo allora $\xi'_1 = \xi_1 + \varepsilon\,\zeta_1$, $\xi'_2 = \xi_2 + \varepsilon\,\zeta_2$, in luogo di R poniamo $\frac{R}{\varepsilon}$, e definiamo la distanza come un limite, *propriamente*

$$r = \lim_{\varepsilon=0}\left[\frac{R}{\varepsilon}\log D\right].$$

Nella Geometria parabolica l'unico punto ξ è punto all' infinito, cioè ha distanza ∞ da qualunque altro punto; la distanza r fra due punti, resta espressa come la differenza di due birapporti

$$r = \frac{(x'\,O)\,(E\,\xi)}{(x'\,\xi)\,(E\,O)} - \frac{(x\,O)\,(E\,\xi)}{(x\,\xi)\,(E\,O)}$$

dove O è il punto origine sulla retta e E è il punto unità.

Nella Geometria ellittica la lunghezza della retta è finita ed eguale a $2\,R\,\pi$.

(Forme di 2.ª specie.) Nel piano immaginiamo una conica di equazione $\Sigma_{xx} = 0$, che chiameremo *l'assoluto del piano.* La equazione della stessa in coordinate di rette sia $S_{uu} = 0$.

Ogni retta del piano taglia la conica in due punti che sono reali, immaginari coniugati o coincidenti; tali punti saranno i *punti fondamentali* per la *Geometria su quella retta del piano.*

Da ogni punto del piano possono condursi due tangenti alla conica assoluta; queste due rette saranno le rette fondamentali per la *Geometria del fascio di rette partenti da quel punto.*

Definiamo per *distanza di due punti* $(x)\,(x')$ la espressione

$$r = R \log \frac{\Sigma_{xx'} + \sqrt{\Sigma^2_{xx'} - \Sigma_{xx}\,\Sigma_{x'x'}}}{\Sigma_{xx'} - \sqrt{\Sigma^2_{xx'} - \Sigma_{xx}\,\Sigma_{x'x'}}}$$

e *per angolo di due rette* $(u)\,(u')$ l'espressione

$$\omega = R' \log \frac{S_{uu'} + \sqrt{S^2_{uu'} - S_{uu}\,S_{u'u'}}}{S_{uu'} - \sqrt{S^2_{uu'} - S_{uu}\,S_{u'u'}}}.$$

La conica assoluta è il luogo dei punti del piano che hanno distanza infinita da un dato punto.

Il luogo dei punti del piano che distano di una distanza costante da un punto fisso (x), *è una conica che tocca la conica assoluta nei due punti in cui questa è tagliata dalla polare di* (x).

Correlativamente:

Quelle rette che con una data retta (u) *formano lo stesso angolo, inviluppano una conica che tocca la conica assoluta nei due punti d'intersezione di questa con* (u).

Le rette che si incontrano sulla conica assoluta formano un angolo zero e sono quindi da considerarsi parallele. Quindi:

In generale da ogni punto si potranno condurre due parallele (reali, immaginarie, coincidenti) ad una retta data.

Supposto che la conica Σ sia *immaginaria* e che si ponga $R = i R_1$ e $R' = i R_1'$, *la lunghezza di ogni retta reale del piano è finita ed eguale a* $2 R_1 \pi$, *e la somma degli angoli in un fascio di rette è* $2 R'_1 \pi$. Ponendo poi ancora $R'_1 = \frac{1}{2}$ si ha esattamente la *Geometria Riemanniana o ellittica* (v. § 2).

Supposto che la conica Σ sia *reale*, e che si ponga ancora $R = i R_1$, $R' = i R_1'$, e $R_1' = \frac{1}{2}$, si ha la *Geometria di Lobatschewsky o iperbolica.*

Supposto infine che la conica sia degenere, e si riduca, come inviluppo, ad una coppia di punti, si ha la *Geometria parabolica in senso esteso* la quale

si riduce alla *Geometria euclidea* quando quei punti sono i due *punti ciclici (immaginari coniugati).*

Stabiliti questi principi per le forme di 2.ª specie, non presenta più alcuna difficoltà l'estensione di essi alle forme di 3.ª specie, in particolare allo spazio ordinario. In questo *l'assoluto sarà una quadrica.* Secondo che questa quadrica è immaginaria, reale ma non a generatrici reali, o degenerata (come inviluppo) in una conica piana e propriamente in un cerchio immaginario, si hanno *le tre geometrie, ellittica, iperbolica, parabolica,* del § 2.

§ 5. — Rappresentazione di Beltrami della geometria non euclidea, su superficie o varietà superiori degli spazi euclidei.

La geometria di Lobatschewsky *coincide colla Geometria in uno spazio a curvatura negativa di* Riemann *costante* (v. Cap. XX); *basta sostituire alle linee rette le linee geodetiche.*

Quindi, in particolare, la geometria *piana* di Lobatschewsky o *iperbolica* coincide con quella su di una superficie a curvatura costante negativa (v. Cap. XVI, § 11, pag. 706); ecco perchè quella geometria può anche chiamarsi *Geometria pseudosferica.*

Come abbiamo già detto al § 2, il Lambert sin dal 1766 avea osservato che la geometria derivante dalla cosiddetta *ipotesi dell'angolo acuto* si potea interpretare su di una sfera di raggio im-

maginario; inoltre Minding (*Crelle*, XIX, XX, 1839-40) avea già osservato che le formole trigonometriche relative ai triangoli pseudosferici si poteano ricavare da quelle dei triangoli sferici mutando R in $R\sqrt{-1}$, (v. pag. 706) e della stessa cosa si occupò poi il Codazzi (*Ann. di Tortolini*, 1857), ma fu il Beltrami (*Giorn. di Batt.*, IV, 1868), il primo che trovò la vera ed elegante significazione di questi fatti. In un lavoro posteriore (*Ann. di mat.*, II, pag. 261) lo stesso Beltrami estese poi agli spazi a tre dimensioni le considerazioni già fatte precedentemente per il piano.

La costante R che entra nelle formole della Geometria di Lobatschewsky (v. § 2), *non è altro così che la radice quadrata della inversa della curvatura dello spazio curvo nel quale si può interpretare quella Geometria.*

In quanto alla Geometria piana di Riemann o *ellittica* abbiamo già notato al § 2 che essa si suddivide in due altre, *una sola* delle quali può interpretarsi sulla *sfera;* l'altra geometria corrisponde però sempre a quella di *una superficie a curvatura costante positiva*, ma avente una *connessione* diversa da quella della sfera. Vedi su ciò le considerazioni fatte da Klein nelle sue lezioni già citate del 1892 (vol. I, pag. 243 — 293), e quanto noi abbiamo riferito a pag. 881.

CAPITOLO XXII.

Geometria moderna del triangolo.

Punti e circoli di Lemoine e di Brocard. Retta di Eulero. Circolo dei nove punti o di Feuerbach. Circoli di Taylor, di Tucker. Retta di Simpson.

Crediamo utile raccogliere in quest'ultimo Capitolo i principali risultati sulla cosiddetta *Geometria del triangolo.*

Dato un triangolo ABC, una retta che si inclini ai lati AB, AC di quanto BC si inclina rispett. ai lati AC, AB, si chiama una retta *antiparallela a* BC.

I punti medi di tutte le antiparallele ad un lato di un triangolo sono in una retta passante per il vertice opposto; tale retta si chiama *simediana* del triangolo.

Le tre simediane passano per un punto, detto punto di Lemoine.

Il punto di Lemoine ha dai tre lati distanze proporzionali ai lati medesimi, e la somma dei quadrati delle medesime distanze è minima.

Conducendo dal punto di LEMOINE le parallele, ai tre lati del triangolo, i 6 punti in cui queste incontrano i lati formano l'ESAGONO DI LEMOINE, e *tali 6 punti sono di un circolo* (PRIMO CIRCOLO DI LEMOINE O CIRCOLO DI RAPPORTO TRIPLO).

Il centro del primo circolo di Lemoine è il punto medio della congiungente il punto di Lemoine col centro del circolo circoscritto al triangolo.

Chiamando D, D'; $E E'$; $F F'$; rispett. i vertici dell'esagono di LEMOINE situati su ciascuno dei tre lati del triangolo, si ha che *i segmenti* $D D'$, $E E'$, $F F'$ *stanno fra loro come i cubi dei lati su cui sono situati.*

Se per il punto di LEMOINE si conducono le antiparallele ai lati del triangolo, i 6 punti in cui queste vanno a tagliare i lati a cui non sono antiparallele, stanno su di un circolo che si chiama SECONDO CIRCOLO DI LEMOINE, O CIRCOLO DEL COSENO.

I segmenti che questo circolo intercetta sui lati del triangolo sono proporzionali ai coseni degli angoli del triangolo.

Dato un triangolo $A B C$ vi è un punto O del piano tale che gli angoli $O A B$, $O B C$, $O C A$ sono eguali, e un punto O' tale che gli angoli $O' C B$, $O' B A$, $O' A C$ sono eguali. Il primo punto si dice PUNTO POSITIVO DI BROCARD, e il secondo si dice PUNTO NEGATIVO DI BROCARD. Naturalmente queste distinzioni non hanno un valore assoluto se non quando si fissa qual'è la posizione reciproca dei vertici del triangolo fondamentale; noi sup-

porremo perciò che il cammino $A B$, $B C$, $C A$ sia un cammino *in senso inverso* a quello del movimento dell'indice dell'orologio.

L'angolo $O A B$ è eguale a $O' B A$, e così per gli altri; il valore comune di tali angoli si chiama ANGOLO DI BROCARD; *esso non può essere maggiore di un terzo di angolo retto.*

Esso è dato dalla formola

$$\text{ctg}\, \omega = \text{ctg}\, A + \text{ctg}\, B + \text{ctg}\, C$$

se ω è l'angolo di Brocard, e A, B, C sono gli angoli del triangolo.

Il circolo concentrico al primo circolo di LEMOINE, e passante per il punto di LEMOINE, e quindi pel centro del circolo circoscritto al triangolo si chiama CIRCOLO DI BROCARD.

Conducendo dal centro del circolo circoscritto al triangolo, le perpendicolari ai lati e chiamando $A' B' C'$ i punti in cui queste tagliano il circolo di BROCARD, *le rette $B A'$, $C B'$, $A C'$ concorrono nel punto positivo di Brocard, e le rette $A B'$, $B C'$, $C A'$ concorrono nel punto negativo di Brocard.*

Il circolo di Brocard passa per i due punti di Brocard.

Chiamando L_1, L_2 i raggi dei due circoli di LEMOINE, B il raggio del circolo di BROCARD, e R il raggio del circolo circoscritto al triangolo, *si hanno le relazioni*

$$R^2 = 3\, L_1^2 + B^2 \qquad L_1^2 = L_2^2 + B^2.$$

Il circolo di BROCARD si suol anche chiamare CIRCOLO DEI CINQUE PUNTI O CIRCOLO DEI SETTE PUNTI.

Se da un punto si conducono le parallele ai lati di un triangolo, i 6 punti in cui queste incontrano i lati sono su di una conica (CONICA DEI 6 PUNTI); *questa diventa un cerchio (1.° cerchio di Lemoine) se il punto da cui si conducono le parallele è il punto di Lemoine.*

Il punto di *Lemoine* e il baricentro si otterrebbero l'uno dall'altro colla costruzione relativa alla *trasformazione arguesiana* (v. Cap. XVII), cioè quei due punti sono *l'uno il trasformato arguesiano dell'altro.*

Similmente, *i due punti di Brocard sono in analogo rapporto fra loro.*

In un triangolo il punto di concorso H delle altezze (detto anche *ortocentro), il punto S di concorso delle tre mediane* (detto anche *baricentro), e il punto d'incontro M delle tre perpendicolari nei punti medi dei lati (centro del cerchio circoscritto) sono in una medesima retta*, detta RETTA DI EULERO *(Novi Comm. Petrop.*, XI (1765), pagina 114).

Il punto H M è diviso internamente in S nel rapporto $\frac{HS}{SM} = 2.$

Il CIRCOLO DEI NOVE PUNTI detto anche, erroneamente (v. MACKAY sottoc.) da alcuni *cerchio di* EULERO è quello che passa per i tre punti medi dei lati del triangolo. *Esso passa anche per i piedi delle tre altezze, e per i tre punti medi dei segmenti compresi fra i vertici e l'ortocentro (punto d'incontro delle tre altezze).*

Il centro N del circolo dei nove punti è situato sulla retta di Eulero ed è tale che il segmento M N è diviso internamente in S ed esternamente in H nel rapporto 2.

Il raggio del circolo dei nove punti è la metà di quello del cerchio circoscritto.

Il circolo dei nove punti è tangente in quattro punti ai quattro circoli iscritti ed ex-iscritti al triangolo.

Questo è il *teorema di* FEUERBACH (*Eigenschaften einiger merkwürdigen Punkte des geradlinigen Dreiecks*, *Nürnberg*, 1822); perciò da alcuni il circolo dei nove punti si suol chiamare anche CIRCOLO DI FEUERBACH.

Il circolo dei nove punti è anche tangente a ciascuno dei 12 circoli iscritti ed ex-iscritti ai 4 triangoli formati dall'ortocentro e dai tre vertici a due a due (teor. di W. HAMILTON, *Nouv. Ann.* 1862, pag. 183).

Sul circolo dei nove punti esistono poi ancora altri punti rimarchevoli e propriamente: *due punti di* SCHROETER (*Nouv. Ann.*, 1865, pag. 178), *un punto di* VIGARIÈ (*Mathesis*, 1888), *un punto di* LEMOINE (*J. de math. élém. de Longchamps*, 1889, pag. 93; 1890, pag. 118), *due punti di* BOUBALS (*Id.*, 1891, pag. 215).

Il circolo dei nove punti è caso particolare della CONICA DEI NOVE PUNTI, la quale è quella che passa per i sei punti medi dei lati di un quadrangolo completo, e per i tre punti diagonali.

Quando uno dei vertici del quadrangolo diventa l'ortocentro degli altri tre, la conica diventa un cerchio; e quando i 4 vertici stanno su di una circonferenza la conica è un' iperbole equilatera.

La conica dei nove punti è il luogo dei centri delle coniche del fascio avente per punti-base i quattro vertici del quadrangolo.

La bibliografia sul circolo dei nove punti è la seguente: BRIANCHON e PONCELET (*Ann. de Gerg.*, XI, pag. 215 (1820)), STEINER (*Id.*, XIX, p. 86; e *Die geom. Constr.* Berlin, 1833, pag. 55), CASEY (*Quart. J.*, 1860, IV), KÜCHER (*Grunert's Arch.*, XLVII), SCHROETER (*Crelle*, LXVIII, *Math. Ann.*, VII), LAPPE (*Id.*, LXXI), BAUR (*Schlömilch's Zeits.*, XII), SCHUBERT (*Id.*, XVI). Per la storia del circolo dei nove punti v. MACKAY (*Proc. of the R. Soc. of Edinburgh*, XI, 1892-93).

Il CERCHIO DI TAYLOR è quello che passa per i 6 punti che sono le proiezioni ortogonali dei piedi delle altezze sui lati del triangolo fondamentale (*Proc. Lond. Soc.* XX, 1889).

Considerando un qualunque triangolo omotetico al triangolo fondamentale, prendendo il punto di Lemoine per centro di omotetia, *i lati dei due triangoli si tagliano in sei punti situati su di un medesimo cerchio;* tali circoli si chiamano di TUCKER.

Il circolo circoscritto, i due circoli di Lemoine, il circolo di Taylor, sono speciali circoli di Tucker; il luogo dei centri di tutti i circoli di Tucker è una retta, diametro del circolo di Brocard.

L'inviluppo dei circoli di Tucker è un'ellisse detta ELLISSE DI BROCARD, *la quale ha per fochi i due punti di Brocard, è iscritta al triangolo e tocca i lati ai piedi delle simediane.* (BROCARD, *Ann.*

de Toulouse, 1887; *J. des math. spéciales*, 1889; Catalan, *Mém. de Belgique*, XLIX, 1891.)

Un'altra proprietà elementare ma interessante della Geometria del triangolo è la seguente:

Se da un punto della circonferenza circoscritta ad un triangolo si conducono le perpendicolari ai tre lati, i piedi di queste sono in una retta (retta di Simpson o di Wallace, *pedale del triangolo).*

L'inviluppo della retta di Simpson è l'ipocicloide tricuspide (v. pag. 769).

Il teor. della pedale lo enunciò Servois (*Ann. de Gerg.*, IV, 1813-14, pag. 251) ascrivendolo a Simpson; Gergonne (*Ibid.*) ne dette una dimostrazione analitica, e se ne propose una estensione al tetraedro, che fu riconosciuta erronea da Durrande (*Ibid.*, VII). Steiner ne fece altra estensione (*Ibid.*, XIX). Vedi anche: Brocard (*Bull. Soc. math.*, 1872, 77), e Mackay (*Soc. math. Edinb.*, IX, 1890, *Ass. Franç.*, 1893); altre indicazioni bibliografiche si trovano nell' *Interm. des Math.*, III, 160; IV, 7).

Gli studi sulla cosiddetta *Geometria del triangolo*, non sono di epoca antica.

A prescindere da altri sparsi lavori, più antichi o già citati di sopra, fra le prime importanti considerazioni sulla Geom. del triangolo citeremo quelle di Lemoine (*Nouv. Ann.*, 1873, *Ass. Franç.*, 1873-74), di Brocard (*Nouv. Corr. math. de Catalan,* III, 1877, 1879, 1880), Neuberg (*Id.*, 1879, 1880, *Ass. Franç.*, 1888, *Mém. de Belg.*, 1890), Schoute (*Ac. d'Amsterdam*, 1886), Cesàro (*Nouv.

Ann., 1887; *Mathesis*, 1890), ecc. V. anche LEMOINE (*Bull. Soc. Math.*, XII, 72; XIV, 167).

Un'opera, che raccoglie la maggior parte dei risultati ottenuti, è quella in inglese di CASEY (*A sequel to Euclid*, 1888; trad. anche in francese, *Géom. élém. recente*, Paris, 1890); un'altra opera dello stesso genere è quella di POULAIN (*Nouv. géom. du triangle*, Paris, 1892, *Croville-Morant éditeur*).

Un sunto molto ristretto di alcuni risultati si trova in *Period. di mat.*, VI, redatto da LUGLI.

Per la parte storica si vegga VIGARIÈ (*Esquisse historique sur . . . la géom. du triang. Associat. Franç.*, 1889).

Le generalizzazioni, fatte sin qui, dei teoremi sopranotati sono specialmente quelle relative al quadrilatero, all'esagono, ecc. e poi quelle relative al tetraedro.

Le prime furono fatte da NEUBERG (*Mathesis*, 1885), TUCKER (*Educat. Times*, 1885), CASEY (*Irish. Acad.*, 1886; *Mathesis*, 1890), NEUBERG e TARRY (*Ass. Franç.*, 1886), ecc.

Per le seconde citeremo PICQUET (*Ass. Franç.*, 1874) e NEUBERG (*Mém. de l'Acad. de Belgique*, 1884).

INDICE ALFABETICO

DELLE COSE CONTENUTE NEL I E II VOLUME DI QUEST'OPERA. *

* Il numero romano rappresenta il volume, e il numero arabo la pagina

E

F

H

I

J

L

O

P

V

W

ELENCO

DELLE OPERE E MEMORIE

pubblicate sino al 1899 da

ERNESTO PASCAL

(vendibili presso U. Hoepli - *Milano).*

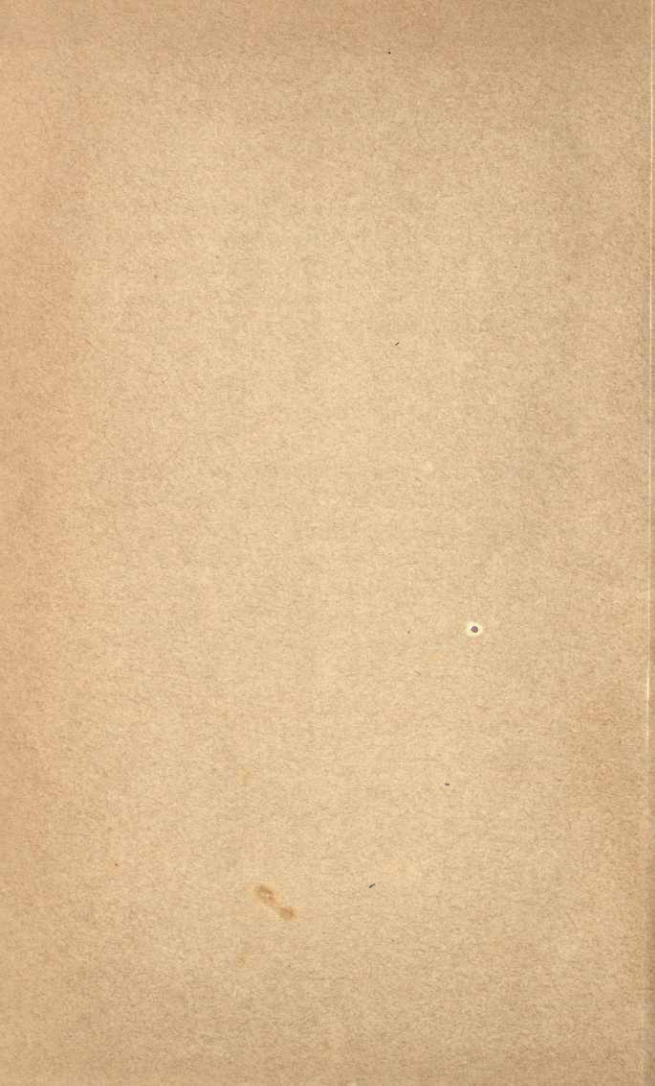
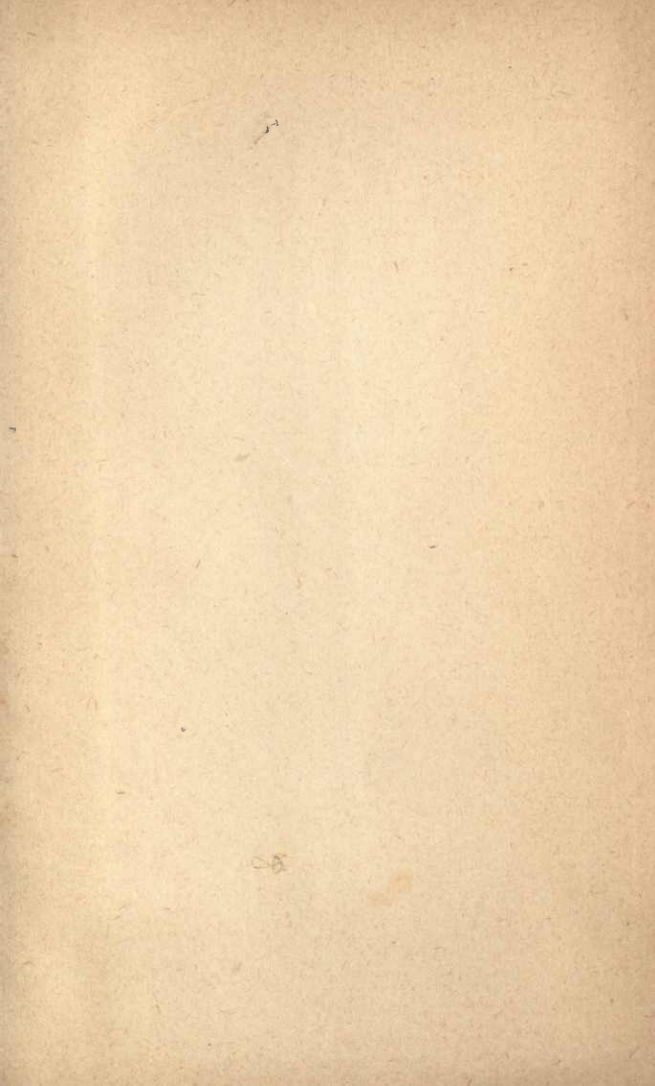
1. Relazioni fra le ellissi centrali d'inerzia delle aree e i baricentri dei volumi generati da esse. (*Rend. Acc. Napoli*, 1886.)
2. Teoremi baricentrici. (*Rend. Acc. Nap.*, 1886.)
3. Sulla costruzione del poligono regolare di 257 lati. (*Rend. Acc. Nap.*, 1887.)
4. Sopra una formola numerica. (*Giorn. di Batt.*, vol. XXV, 1887.)
5. Costruzioni geometriche di tre poligoni regolari. (*Giorn. di Batt.*, vol. XXV, 1887.)
6. Sulla risultante di un'ennica e di una cubica. (*Giorn. di Batt.*, vol. XXV, 1887.)
7. Sopra un nuovo simbolo nella teoria delle forme binarie a due serie di variabili. (*Rend. Acc. Nap.*, 1887.)
8. Sopra un metodo per esprimere una forma invariantiva qualunque di una binaria cubica mediante quelle del sistema completo. (*Rend. Acc. Nap.*, 1887.)

9. Sopra un'applicazione del metodo per esprimere una forma invariantiva qualunque di una binaria cubica mediante quelle del sistema completo. (*Rend. Acc. Nap.*, 1888.)
10. Sopra certi covarianti simultanei dei sistemi di due quartiche e di due quintiche. (*Ann. di mat.*, vol. XVI, 1888.)
11. Sopra alcune forme invariantive del sistema di due biquadratiche. (*Rend. Acc. Nap.*, 1888.)
12. Su di un teorema sul calcolo simbolico nella teoria delle forme binarie. (*Giorn. di Batt.*, vol. XXVI, 1888.)
13. Aggiunte alla Nota intitolata: Su di un teorema sul calcolo simbolico nella teoria delle forme binarie. (*Giorn. di Batt.*, vol. XXVI, 1888.)
14. Sopra un teorema fondamentale nella teoria del calcolo simbolico delle forme ennarie. (*Rend. Acc. Lincei*, 1888.)
15. Sopra le relazioni che possono sussistere identicamente fra formazioni simboliche del tipo invariantivo nella teoria generale delle forme algebriche. (*Mem. Acc. Lincei*, 1888.)
16. Sullo sviluppo delle funzioni sigma abeliane dispari di genere tre. (*Ann. di mat.*, volume XVII, 1889.)
17. Zur Theorie der ungeraden Abelschen Sigmafunctionen. (*Gött. Nach.*, 1889.)
18. Sulle formole di ricorrenza per lo sviluppo delle funzioni abeliane dispari a tre argomenti. (*Ann. di mat.*, vol. XVII, 1889.)
19. Sulla teoria delle funzioni sigma iperellittiche pari e dispari di genere tre. (*Ann. di mat.*, vol. XVII, 1889.)

20. Sulla teoria delle funzioni sigma abeliane pari a tre argomenti. (*Ann. di mat.*, vol. XVIII, 1890.)
21. Zur Theorie der geraden Abelschen Sigmafunctionen. (*Gött. Nach.*, 1889.)
22. Sopra le funzioni iperellittiche di prima specie per *p* eguale a due. (*Ann. di mat.*, volume XVIII, 1890.)
23. L'equazione razionale della superficie di Kummer. (*Ann. di mat.*, vol. XVIII, 1890.)
24. Sulle sestiche di contatto alla superficie di Kummer. (*Ann. di mat.*, vol. XIX, 1891.)
25. Necrologia del Senatore Enrico Betti. (*Riv. di mat.*, II, 1892.)
26. Rappresentazione geometrica delle caratteristiche di genere 3 e 4 e loro gruppi di sostituzioni. (*Ann. di mat.*, vol. XX, 1892.)
27. A proposito di un libro del Prof. Gino Loria sulla scuola napoletana di matematica nella prima metà del secolo. (*Riv. di mat.*, II, 1892.)
28. Sui poliedri circolari che si possono formare coi 45 piani tritangenti della superficie di 3.° ordine. (*Rend. Ist. Lomb.*, 1892.)
29. Configurazione delle 36 bisestuple gobbe formate colle 27 rette della superficie di 3.° ordine. (*Rend. Ist. Lomb.*, 1892.)
30. Configurazione delle 216 quintuple gobbe di 2.ª specie. (*Rend. Ist. Lomb.*, 1892.)
31. Altre ricerche sulle rette della superficie di 3.° ordine. (*Rend. Ist. Lomb.*, 1893.)
32. Saggio sul gruppo delle sostituzioni fra le 27 rette della superficie di 3.° ordine e sui gruppi ad esso isomorfi. (*Ann. di mat.*, vol. XX, 1892.)

33. Sulle 315 coniche coordinate alla curva piana generale di 4.° ordine. Nota I. (*Rend. Acc. Lincei*, 1892.)
34. Ricerche sugli aggruppamenti formati colle coniche coordinate alla quartica piana. Nota II. (*Rend. Acc. Lincei*, 1892.)
35. Sugli aggruppamenti tripli di coniche ecc. Nota III. (*Rend. Acc. Lincei*, 1893.)
36. Su di una estensione della configurazione delle 10 rette della superficie di 5.° ordine a quintica doppia. (*Rend. Acc. Lincei*, 1893.)
37. Osservazioni sui gruppi di sostituzioni fra le caratteristiche dispari di genere 3 e di genere 4. (*Rend. Acc. Lincei*, 1893.)
38. Sulla configurazione dei 120 piani tritangenti della sestica storta di genere 4. (*Rend. Acc. Lincei*, 1893.)
39. Sui piani tritangenti della sestica storta di genere 4. (*Rend. Acc. Lincei*, 1893.)
40. Continuazione del saggio sul gruppo delle sostituzioni fra le rette della superficie cubica. (*Ann. di mat.*, vol. XXI, 1893.)
41. Commemorazione di Felice Casorati. (*Annuario dell'Università di Pavia*, anno 1893-94.)
42. Paolo Ruffini e i primordi della teoria dei gruppi (traduzione dal tedesco di Burkhardt). (*Ann. di mat.*, vol. XXII, 1894.)
43. Relazione sul corso di matematiche superiori dettato nella Università di Pavia nell'anno 1892-93. (*Fondamenti analitici e geometrici per la teoria degli integrali e delle funzioni abeliane.*)

44. Sugli insegnamenti di matematiche superiori nelle Università italiane. (*Riv. di mat.*, III, 1893, Torino.)
45. Cenno necrologico su Giuseppe Battaglini. (*Riv. di mat.*, IV, 1894.)
46. Lezioni di calcolo infinitesimale in due volumi di pag. IX-316 e VI-318. Milano, 1895.
47. Un capitolo di calcolo differenziale. (Sulla serie di Taylor-Maclaurin). (*Riv. di mat.*, V, 1895.)
48. Sulle funzioni σ ellittiche pari. (*Ann. di mat.*, vol. XXIII, 1895.)
49. Riemann e la sua importanza nello sviluppo della matematica moderna. (Traduzione dal tedesco di Felix Klein.) (*Ann. di mat.*, volume XXIII, 1895.)
50. Esercizi e note critiche di calcolo infinitesimale. Volume di pag. XIX-371. Milano, 1895.
51. Teorica delle funzioni ellittiche. Volume di pag. XII-227. Milano, 1896.
52. Sopra due relazioni rimarchevoli fra i valori delle derivate delle funzioni σ ellittiche per argomento zero. (*Ann. di mat.*, vol. XXIV, 1895.)
53. I determinanti. Teoria ed applicazioni. Un volume di pag. VI-330. Milano, 1896.
54. Su di un teorema di Netto relativo ai determinanti e su di un altro teorema ad esso affine. (*Rend. Acc. Lincei*, 1896.)
55. Sopra le relazioni fra i determinanti formati coi medesimi elementi. (*Rend. Istit. Lomb.*, 1896.)
56. Funzioni olomorfe nel campo ellittico. (*Rend. Acc. Lincei*, 1896.)

57. Sulla ricerca del secondo termine dello sviluppo in serie delle funzioni sigma abeliane pari di genere tre. (*Ann. di mat.*, vol. XXIV, 1896.)
58. Introduzione alla teoria della trasformazione delle funzioni ellittiche. Lezioni dettate nella Università di Pavia nel 1896. (litogr.)
59. Sopra le varie forme delle relazioni fra i determinanti di una matrice rettangolare. (*Ann. di mat.*, vol. XXIV, 1896.)
60. Calcolo delle variazioni e calcolo delle differenze finite. Un volume di pag. XII-330. Milano, 1887.
61. Costumi ed usanze nelle Università italiane. Discorso. Pag. 65. Milano, 1897.
62. Cinque lezioni sulla interpretazione geometrica della teoria invariantiva delle forme binarie. Lezioni dettate nell'Università di Pavia nel 1898. (litogr.)
63. Pochi cenni su Francesco Brioschi. Estratto dall'*Annuario dell'Università di Pavia*, 1898-1899.
64. Repertorio di matematiche superiori. Parte I. *Analisi*; un volume di pag. XV-642; Parte II. *Geometria*; un volume di pag. XVIII-927. Milano, 1897-1900.

Del medesimo autore:

Calcolo infinitesimale:	Lire
Parte I. *Calcolo differenziale,* di pag. IX-316, con 10 incisioni	3 —
» II. *Calcolo integrale,* di pag. VI-318, con 15 incisioni	3 —
» III. *Calcolo delle variazioni e Calcolo delle differenze finite,* di pag. XII-330 .	3 —
Esercizi di calcolo infinitesimale (Calcolo differenziale e integrale) di pag. XX-372 . .	3 —
Determinanti e applicazioni, di pag. VIII-350 .	3 —
Funzioni ellittiche, di pag. 240	1 50
Gruppi continui di trasformazioni (Parte generale della teoria) di pag. XI-378 . . .	3 —

REPERTORIO DI MATEMATICHE SUPERIORI

I.

ANALISI.

Algebra superiore
Sostituzioni
Determinanti
Equazioni algebriche
Calcolo differenziale
Calcolo integrale
Equazioni differenziali
Gruppi di trasformazioni
Differenze finite
Calcolo delle variazioni
Teoria degli invarianti
Variabili complesse
Funzioni automorfe
Integrali abeliani
Funzioni ellittiche
Funzioni abeliane
Funzioni iperboliche
Funzioni sferiche
Funzioni cilindriche
Funzioni ipergeometriche
Serie di Fourier
Teoria dei numeri
Calcolo delle probabilità
Macchine analitiche

Volume di pag. XVI-642, Prezzo L. 6.—